ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ФУНКЦИЙ В L_2

М. Ш. Шабозов, А. А. Шабозова

Для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций, принадлежащих пространству L_2, получены точные неравенства типа Джексона — Стечкина для специального модуля непрерывности m-го порядка, порожденного оператором (функцией) Стеклова. Аналогичные характеристики гладкости функций рассматривались ранее в работах В. А. Абилова, Ф. В. Абиловой, В. М. Кокилашвили, С. Б. Вакарчука, В. И. Забутной, К. Тухлиева и других. Для классов функций, определенных при помощи указанных характеристик, решен ряд экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации.

Ключевые слова: наилучшее приближение, периодическая функция, специальный модуль непрерывности, неравенства Джексона — Стечкина, экстремальные задачи.

M. Sh. Shabozov, A. A. Shabozova. Sharp inequalities of Jackson–Stechkin type for periodic functions in L_2 differentiable in the Weyl sense.

For periodic functions differentiable in the sense of Weyl and belonging to the space L_2, sharp inequalities of Jackson–Stechkin type are obtained for a special mth-order modulus of continuity generated by the Steklov operator (function). Similar characteristics of smoothness of functions were considered earlier by V. A. Abilov, F. V. Abilova, V. M. Kokilashvili, S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, K. Tukhliev, etc. For classes of functions defined in terms of these characteristics, we solve a number of extremal problems of polynomial approximation theory.

Keywords: best approximation, periodic function, special modulus of continuity, Jackson–Stechkin inequalities, extremal problems.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-255-264

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности (см., например, [1–6] и приведенную там литературу). Введение таких модификаций модуля непрерывности позволяет сформулировать естественные аналоги задач теории приближения и получить результаты, раскрывающие их содержательную сущность. В качестве примера укажем на некоторые работы М. К. Потапова и его учеников [7–10], где вместо оператора сдвига $T_h(f) := f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$, предложены различные усредняющие операторы и получены конструктивные характеристики исследуемых классов функций в терминах введенных обобщенных модулей непрерывности.

В случае аппроксимации 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в ряде работ [11–14] вместо оператора сдвига $T_h(f)$ была использована функция Стеклова $S_h(f)$. В этой статье продолжим указанную тематику и обобщим некоторые результаты цитированных выше работ для классов функций, дифференцируемых в смысле Вейля [15].

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом модуля по Лебегу 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$\mathcal{F}_{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big), \tag{1}$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{F}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| \colon T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье функции f; $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$; $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f. Отметим, что в (1) вместо знака формального соответствия "$\sim$" можно поставить знак равенства "$=$", подразумевая под этим, что ряд в правой части сходится к f по норме пространства L_2, поскольку, как известно, $\|f - S_{n-1}(f)\| \to 0$ при $n \to \infty$. В аналогичных ситуациях ниже именно так и будем поступать, не оговаривая это явно.

Для произвольной функции $f \in L_2$ запишем функцию Стеклова

$$\mathcal{S}_h(f, x) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)dt, \quad h > 0,$$

и полагаем $\mathcal{S}_{h,i} = \mathcal{S}_h(\mathcal{S}_{h,i-1}(f))$, $i \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{S}_{h,0}(f) = f$. Обозначим через $\mathbb{I}$ единичный оператор в L_2 и, следуя работам [11; 13; 14], определим конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\Delta_h^1(f, x) := \mathcal{S}_h(f, x) - f(x) = (\mathcal{S}_h - \mathbb{I})(f, x), \tag{3}$$

$$\Delta_h^m(f, x) := \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, \cdot), x) = (\mathcal{S}_h - \mathbb{I})^m(f, x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \mathcal{S}_{h,k}(f, x), \ \ m = 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

Используя эти обозначения, введем следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$ равенством

$$\Omega_m(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^m(f, \cdot)\| \colon 0 < h \leq t\}, \tag{5}$$

которое назовем *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка.* Излагаемые далее результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля, а потому приводим необходимые в дальнейшем определения и обозначения, в которых используются эти понятия.

Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье (1) производную вещественного неотрицательного порядка α в смысле Вейля [15], определенную равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \Big(a_k(f)\cos\Big(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) + b_k(f)\sin\Big(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\Big). \tag{6}$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$. Если $S_{n-1}\big(f^{(\alpha)}, x\big)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда (6), то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ элементами $T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}$ вычисляется как

$$E_{n-1}\big(f^{(\alpha)}\big) := \inf\big\{\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| \colon T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1}\big\} = \big\|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\big\| = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2}. \tag{7}$$

Напомним определение синк функции, необходимое для дальнейшего,

$$\operatorname{sinc} t := \Big\{\frac{\sin t}{t},\ \text{если}\, t \neq 0;\ 1,\ \text{если}\, t = 0\Big\}.$$

Нам также понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(\alpha)}$ *имеет место равенство*

$$\Omega_m^2\Big(f^{(\alpha)}, t\Big) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}\colon |h| \leq t\Big\}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим ряд Фурье произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Учитывая определение дробной производной в смысле Вейля, запишем

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^{\alpha} c_k(f)e^{ikx}. \tag{9}$$

Пользуясь равенством (9) для разностей (3) и (4), находим

$$\Delta_h^1(f^{(\alpha)}, x) := S_h(f^{(\alpha)}, x) - f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^{\alpha} c_k(f)e^{ikx}\frac{1}{2h}\int_0^h \big(e^{ikt} + e^{-ikt} - 2\big)dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^{\alpha} c_k(f)e^{ikx}\frac{1}{h}\int_0^h (\cos kt - 1)\, dt = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^{\alpha} c_k(f)(1-\operatorname{sinc} kh)e^{ikx}.$$

Методом математической индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^m(f^{(\alpha)}, x) = (-1)^m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^{\alpha} c_k(f)(1-\operatorname{sinc} kh)^m e^{ikx}. \tag{10}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (10) и учитывая, что $|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 = \rho_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$\|\Delta_h^m(f^{(\alpha)}, \cdot)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2\alpha}|c_k(f)|^2(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m},$$

откуда в силу (5) получаем утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $t \in (0, 3\pi/4]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(\alpha)},\\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(\alpha)}, t/n)} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, учитывая равенство (2) и тот факт, что [16, с. 435]

$$\max\{|\operatorname{sinc} u|\colon u \geq nt\} = \operatorname{sinc} nt,\ 0 < nt \leq 3\pi/4,$$
$$\min\{(1-\operatorname{sinc} u)^m\colon u \geq nt\} = \big(1 - \max_{u \geq nt}\operatorname{sinc} u\big)^m = (1-\operatorname{sinc} nt)^m,$$

для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ получаем

$$\Omega_m^2\left(f^{(\alpha)}, t\right) \geq \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)(1-\operatorname{sinc} kt)^{2m}$$

$$\geq n^{2\alpha}(1-\operatorname{sinc} nt)^{2m}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f) = n^{2\alpha}(1-\operatorname{sinc} nt)^{2m}E_{n-1}^2(f). \tag{12}$$

Из неравенства (12) сразу вытекает оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (11)

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} \leq (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}. \tag{13}$$

Для получении аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(\alpha)}$, для которой $f_0^{(\alpha)}(x) = n^{\alpha}\cos\left(nx + \dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$ и

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Omega_m(f_0^{(\alpha)}, t) = n^{\alpha}(1-\operatorname{sinc} nt)^m. \tag{14}$$

Пользуясь равенствами (14), запишем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} \geq \frac{n^{\alpha}E_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(f_0^{(\alpha)}, t/n)} = \left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{-m}. \tag{15}$$

Требуемое равенство (11) получаем из сопоставления неравенств (13) и (15).

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $t \in (0, 3\pi/4]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}. \tag{16}$$

В частности, при $t = \pi/2$ из (16) следует равенство $\displaystyle\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, \pi/(2n)\right)} = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m$.

Доказательство. В левой части равенства (16), полагая $f^{(\beta)} = g$, получаем $f^{(\alpha)} = g^{(\alpha-\beta)}$, т. е. из условия $f \in L_2^{(\alpha)}$, $f \neq \mathrm{const}$ вытекает, что $g \in L_2^{(\alpha-\beta)}, g \neq \mathrm{const}$, а потому в силу (11) имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\Omega_m\left(f^{(\alpha)}, t/n\right)} = \sup_{\substack{g\in L_2^{(\alpha-\beta)}\\ g\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(g\right)}{\Omega_m\left(g^{(\alpha-\beta)}, t/n\right)} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-m}.$$

Следствие доказано.

Условимся под *весовой функцией на отрезке* $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке. Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику:

$$\chi_{n,m,\alpha,p}\left(\Omega_m; q, h\right) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\displaystyle\int_0^h \Omega_m^p\left(f^{(\alpha)}, t\right)q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{17}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $0 < nh \leq \pi$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция.

Отметим, что величина (17) при $\alpha \in \mathbb{N}$ и различных значениях параметров m, p и конкретных весовых функциях q исследована во многих работах (см., например, [13; 14] и приведенную там литературу). Наиболее общий результат получен в [13], где доказано, что если $m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, q — весовая на $[0, h]$ функция, то имеет место двустороннее неравенство

$$(\mathcal{A}_{n,m,\alpha,p}(q,h))^{-1} \leq \chi_{n,m,\alpha,p}(q,h) \leq \left(\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,r,p}(q,h)\right)^{-1}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{A}_{n,m,\alpha,p}(q,h) = \left(k^{\alpha p} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}.$$

В связи с неравенством (18) возникает естественный вопрос, каковы условия, при выполнении которых в (18) выполняются соотношения

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,\alpha,p}(q,h) = \mathcal{A}_{n,m,\alpha,p}(q,h). \tag{19}$$

Для весовых функций $q(t) \equiv 1$, $q(t) = t$ и $\alpha \in \mathbb{N}$ доказательство (19) имеется в [13]. В общем случае, следуя рассуждениям работы [17], С. Б. Вакарчук и В. И. Забутная в [13] доказали, что если $\alpha \in \mathbb{N}$ и весовая функция $q \in C^{(1)}[0, h]$ при всех $1/\alpha < p \leq 2$, $0 \leq t \leq h$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(\alpha p - 1) q(t) - t q^{'}(t) \geq 0, \tag{20}$$

то имеет место соотношение (19).

Заметим, что условие (20) весьма ограничительно, поскольку множество весовых функций q, для которых выполняется неравенство (20), весьма узко.

В настоящей работе авторы нашли точное значение величины (17), во-первых, для всех значений $0 < p \leq \infty$ и, во вторых, без дополнительного предположения, что $q \in C^{(1)}[0, h]$ и удовлетворяет условию (20).

Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(q,h) = \left(n^{\alpha p} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m\|_p$ в знаменателе дроби в правой части (17) определен соотношением

$$\|\Omega_m\|_p := \begin{cases} \left(\int_0^h \Omega_m^p \left(f^{(\alpha)}, t\right) q(t) dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0 < t \leq h} \Omega_m \left(f^{(\alpha)}, t\right), & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал лишь при $1 \leq p < \infty$ является нормой. Переходим к доказательству равенства (21). Возведем обе части неравенства $\Omega_m(f^{(\alpha)}, t) \geq n^{\alpha}(1 - \operatorname{sinc} nt)^m E_{n-1}(f)$, вытекающего из (12), в степень $p\,(0<p\le\infty)$, умножим на весовую функцию q и интегрируем от 0 до h, где $0<h\le 3\pi/(4n)$. В итоге получим

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}\ge n^\alpha E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f\in L_2^{(\alpha)}$, то из него получаем оценку сверху для величины (17):

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(q,h)\le\left(n^{\alpha p}\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{22}$$

С целью получения оценки снизу той же величины рассмотрим функцию $f_0(x)=\cos nx$ из L_2, которая была введена нами при доказательстве теоремы 1 и для которой имеют место равенства (14). Пользуясь ими получаем

$$\chi_{n,m,\alpha,p}\left(\Omega_m;q,h\right)\ge\frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(n^{\alpha p}\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{23}$$

Сопоставляя оценку сверху (22) с оценкой снизу (23), получаем требуемое соотношение (21).

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, $\alpha>\beta$, $m,n\in\mathbb{N}$, $0<h\le 3\pi/(4n)$, $0<p\le\infty$, q *— весовая функция на отрезке* $[0,h]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторив схему рассуждений при доказательстве следствия 1, получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)},\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}=\sup_{\substack{g\in L_2^{(\alpha-\beta)}\\ g\ne\mathrm{const}}}\frac{n^{\alpha-\beta}E_{n-1}\left(g\right)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(g^{(\alpha-\beta)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$=\left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Следствие доказано.

Для заданных $h>0$, $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<p\le\infty$ и весовой функции на $[0,h]$ q обозначим через $W_{p,m}^{(\alpha)}\left(q,h\right)=W_p^{(\alpha)}\left(\Omega_m;q,h\right)$ класс функций $f\in L_2^{(\alpha)}$, для которых

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(\alpha)},t\right)q(t)dt\le 1.$$

При $\alpha>\beta\ge 0$ требуется найти величину

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\bigl(W_{p,m}^{(\alpha)}\left(q,h\right)\bigr):=\sup\left\{E_{n-1}\left(f^{(\beta)}\right):f\in W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)\right\}. \tag{25}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > \beta \geq 0$, $0 < p \leq \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, q — *весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда выполняется равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}(W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)) = \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} \cdot n^{-(\alpha-\beta)}. \tag{26}$$

Доказательство. Из неравенства (24) для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(\beta)}) \leq \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \frac{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t) q(t) dt\right)^{1/p}}{\left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{27}$$

Из (27) для произвольной функции $f \in W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(\beta)}) \leq n^{-(\alpha-\beta)} \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p},$$

откуда и следует оценка сверху

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\big(W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)\big) \leq n^{-(\alpha-\beta)} \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{28}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу величины (25), введем функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^\alpha} \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} \cos nx.$$

Для этой функции в силу равенств (7) и (8) имеем

$$E_{n-1}\left(f_1^{(\beta)}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}}, \tag{29}$$

$$\Omega_m(f_1^{(\alpha)}, t) = \frac{(1 - \operatorname{sinc} nt)^m}{\left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}},$$

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_1^{(\alpha)}, t) q(t) dt = 1.$$

Последнее равенство означает, что функция $f_1 \in W_{p,m}^{(\alpha)} q, h)$, а потому, учитывая равенство (29), запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}(W_{p,m}^{(\alpha)}(q,h)) \geq E_{n-1}(f_1^{(\beta)}) = n^{-(\alpha-\beta)} \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{30}$$

Требуемое равенство (26) получаем из сравнения оценки сверху (28) с оценкой снизу (30). Теорема доказана.

Из теоремы вытекают очевидные следствия.

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3 *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $q(t) \equiv 1$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\left(W_{1/m,m}(1,h)\right) = n^{-(\alpha-\beta)}\Big(\frac{n}{nh-\mathrm{Si(nh)}}\Big)^m, \tag{31}$$

где $\mathrm{Si}(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sinc} u\,du$ *— интегральный синус. В частности, при* $h = \pi/(2n)$ *и* $\alpha - \beta > m$ *из равенства* (31) *имеем*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\Big(W_{1/m,m}\Big(1,\frac{\pi}{2n}\Big)\Big) = n^{-(\alpha-\beta)+m}\Big(\frac{2}{\pi-2\mathrm{Si}(\pi/2)}\Big)^m.$$

Следствие 4. *В условиях теоремы* 3 *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $q(t) \equiv t$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\left(W_{1/m,m}(t,h)\right) = n^{-(\alpha-\beta)}\left(2(nh/2)^2 - \sin^2(nh/2)\right)^{-m}, \tag{32}$$

и, в частности, при $h = \pi/(2n)$ *и* $\alpha - \beta > m$ *из* (32) *следует*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\beta)}\Big(W_{1/m,m}\Big(t,\frac{\pi}{2n}\Big)\Big) = n^{-(\alpha-\beta)}\Big(\frac{8}{\pi^2-4}\Big)^m.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ditzian Z., Totik V.** Moduli of smoothness. N Y: Springer-Verlag, 1987. (Springer Ser. Comput. Math.; vol. 9). doi: 10.1007/978-1-4612-4778-4 . 227 p.
2. **Руновский К.В.** О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб. 1994. Т. 185, №8. С. 81–102.
3. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона—Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденными произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 11–14.
4. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 783–788.
5. **Вакарчук С.Б.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
6. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 3. С. 338–348.
7. **Потапов М.К.** О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. № 3. С. 38–48.
8. **Потапов М.К.** О применении несимметричных операторов обобщенного сдвига в теории приближений // Тр. математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2001. Т. 8. С. 185–189.
9. **Потапов М.К.** О свойствах и о применении в теории приближений одного свойства операторов обобщенного сдвига // Мат. заметки. 2001. Т.69, № 3. С. 412–426.
10. **Нападенина А.Ю.** О совпадении классов функций, определяемых операторами обобщенного сдвига или порядком наилучшего приближения // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 2. С. 29–33.
11. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 803–811.
12. **Kokilashvili V., Yildirir Y.E.** On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Ramzadze Math. Inst. 2007. Vol. 143. P. 103–113.
13. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона—Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
14. **Шабозов М.Ш., Тухлиев К.** Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 6. С. 908–917.

15. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich. 1917. Vol. 62. P. 296–302.
16. **Тайков Л.В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т 20, № 3. С. 433–438.
17. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.

Поступила 20.08.2019
После доработки 31.10.2019
Принята к публикации 11.11.2019

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Таджикский национальный университет;
Университет Центральной Азии
г. Душанбе
e-mail: shabozov@mail.ru

Шабозова Адолат Азамовна
ассистент кафедры теории функций и математического анализа
Таджикский национальный университет;
Университет Центральной Азии
г. Душанбе
e-mail: shabozova91@mail.ru .

REFERENCES

1. Ditzian Z., Totik V. *Moduli of Smoothness.* Springer Ser. Comput. Math., vol. 9. N Y: Springer-Verlag, 1987. 227 p. ISBN: 978-1-4612-4778-4 .
2. Runovskii K.V. On approximation by families of linear polynomial operators in L_p spaces, $0 < p < 1$. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995, vol. 82, no. 2, pp. 441–459. doi: 10.1070/SM1995v082n02ABEH003574 .
3. Vasil'ev S. Sharp Jackson–Stechkin inequality in L_2 with the modulus of continuity generated by an arbitrary finite-difference operator with constant coefficients. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 66, no. 1, pp. 5-8.
4. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 5, pp. 736–741. doi: 10.1023/A:1024029208953 .
5. Vakarchuk S.B. Exact Constants in Jackson-type inequalities and exact values of widths. *Math. Notes.*, vol. 78, no. 5-6, pp. 735–739. doi: 10.1007/s11006-005-0176-y .
6. Ivanov A.V., Ivanov V.I. Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 3-4, pp. 320–329. doi: 10.1134/S0001434613090034 .
7. Potapov M. On the application of a generalized translation operator in the approximation theory. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1998, vol. 53, no. 3, pp. 37–47.
8. Potapov M.K. On the application of asymmetric generalized shift operators in the theory of approximations. *Trudy Matem. Tsentra im N.I. Lobachevskogo (Kazan')*, 2001, vol. 78, pp. 185–189 (in Russian).
9. Potapov M.K. Properties of a Family of Operators. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3, pp. 373–386. doi: 10.1023/A:1010287509486 .
10. Napedenina A. Coincidence of classes of functions determined by a generalized shear operator or the best approximation order. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2004, vol. 59, no. 2, pp. 32–36.
11. Abilov V.A., Abilova F.V. Problems in the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 5-6, pp. 749–757. doi: 10.1023/B:MATN.0000049674.45111.71 .
12. Kokilashvili V., Yildirir Y.E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A.Ramzadze Math. Inst.*, 2007, vol. 143, pp. 103–113.

13. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson – Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2, *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 3-4, pp. 458–472. doi: 10.1134/S0001434612090180 .
14. Shabozov M.Sh., Tukhliev K. Best polynomial approximations and the widths of function classes in L_2. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 6, pp. 930–937. doi: 10.1134/S0001434613110291 .
15. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1917, vol. 62, no. 1-2, pp. 296–302.
16. Taikov L.V. Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 1976, vol. 20, no. 3, pp. 797–800. doi: 10.1007/BF01097254 .
17. Shabozov M.S., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths. *Math. notes*, 2011, vol. 90, no. 5-6, pp. 748–757. doi: 10.1134/S0001434611110125 .

Received August 20, 2019
Revised October 31, 2019
Accepted November 11, 2019

Mirgand Shabozovich Shabozov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru .

Adolat Azamovna Shabozova, Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: shabozova91@mail.ru .

Cite this article as: M. Sh. Shabozov, A. A. Shabozova. Sharp inequalities of Jackson–Stechkin type for periodic functions in L_2 differentiable in the Weyl sense, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 255–264 .