ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54+519.17

НЕКОТОРЫЕ ШУРОВЫ СХЕМЫ ОТНОШЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ГРУППАМИ СУДЗУКИ И РИ

Л. Ю. Циовкина

Схемой отношений называется пара $(\Omega,\mathcal{R})$, состоящая из конечного множества Ω и множества $\mathcal{R}=\{R_0,R_1\ldots,R_s\}$ бинарных отношений на Ω, удовлетворяющего следующим условиям: (1) $\mathcal{R}$ — разбиение множества Ω^2; (2) $\{(x,x)\mid x\in\Omega\}\in\mathcal{R}$; (3) ${R_t}^T=\{(y,x)\mid(x,y)\in R_t\}\in\mathcal{R}$ для всех $0\le t\le s$; (4) для всех $0\le i,j,t\le s$ существуют константы c_{ij}^t (называемые *числами пересечений* схемы) такие, что $c_{ij}^t=|\{z\in\Omega|(x,z)\in R_i$ и $(z,y)\in R_j\}|$ для любой пары $(x,y)\in R_t$. Схема отношений $(\Omega,\mathcal{R})$ называется *шуровой*, если для некоторой группы подстановок на Ω ее набор орбиталов на Ω совпадает с $\mathcal{R}$. Данная работа посвящена исследованию шуровых схем отношений, связанных с группами Судзуки $Sz(q)$ и Ри ${}^2G_2(q)$, где $q>3$, для которых графы ряда базисных отношений являются антиподальными дистанционно регулярными графами диаметра 3. Пусть G — одна из указанных групп, $r=(q-1)_{2'}$, B — подгруппа Бореля группы G, U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B, K — подгруппа из B индекса r, g — инволюция из $G-B$ и f — элемент из $B\cap B^g$ порядка r. Пусть Ω — множество правых смежных классов группы G по подгруппе K, $h_i=f^i$ и $h_{r+i}=gf^i$ для всех $i\in\{0,\ldots,r-1\}$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество $\{R_0,R_1,\ldots,R_{2r-1}\}$ бинарных отношений на Ω, определенных для каждого $t\in\{0,1,\ldots,2r-1\}$ по правилу: $(Kx,Ky)\in R_t$ тогда и только тогда, когда элемент xy^{-1} содержится в двойном смежном классе Kh_tK. В работе доказано, что $\mathcal{X}=(\Omega,\mathcal{R})$ — шурова схема отношений, множество базисных отношений которой совпадает с набором орбиталов G на Ω, и установлено, что число пересечений c_{ij}^t, где $0\le i,j,t\le 2r-1$, схемы $\mathcal{X}$ равно $|U|$ при $t\le r-1, i,j\ge r$ и $j-i\equiv t \pmod r$; $(|U|-1)/r$ — при $i,j,t\ge r$; 1 — в случаях, если $t\le r-1, i,j\le r-1$ и $i+j\equiv t \pmod r$, или $i\le r-1, t,j\ge r$ и $j-i\equiv t \pmod r$, или $t,i\ge r, j\le r-1$ и $i+j\equiv t \pmod r$; 0 — в остальных случаях; здесь $|U|=q^2$ при $G=Sz(q)$ и $|U|=q^3$ при $G={}^2G_2(q)$. Как следствие, найдены структурные параметры $m_{h_t}(h_i,h_j)=|\{Kx\in\Omega|\ Kx\subseteq Kh_i^{-1}Kh_t\cap Kh_jK\}|$ алгебры Гекке $\mathbb{C}(K\backslash G/K)$ группы G относительно K. А именно, показано, что $m_{h_t}(h_i,h_j)$ — это в точности число пересечений c_{ij}^t схемы $\mathcal{X}$ для всех $0\le i,j,t\le 2r-1$. По построению граф базисного отношения R_t с $t\ge r$ схемы $\mathcal{X}$ эквивалентен графу $\Gamma(G,K,Kh_tK)$ смежных классов группы G относительно подгруппы K и элемента h_t, и, как известно, является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений $\{|U|,(|U|-1)(r-1)/r,1;1,(|U|-1)/r,|U|\}$. Последний факт доказан в более ранней статье автора, где был предложен метод исследования графов $\Gamma(G,K,Kh_tK)$, основанный на анализе взаимного распределения окрестностей их вершин. В настоящей работе приведено доказательство дистанционной регулярности этих графов как следствие из найденных свойств схемы $\mathcal{X}$.

Ключевые слова: шурова схема отношений, дистанционно регулярный граф, антиподальный граф.

L. Yu. Tsiovkina. Some Schurian association schemes related to Suzuki and Ree groups.

An *association scheme* is a pair $(\Omega,\mathcal{R})$ consisting of a finite set Ω and a set $\mathcal{R}=\{R_0,R_1\ldots,R_s\}$ of binary relations on Ω satisfying the following conditions: (1) $\mathcal{R}$ is a partition of the set Ω^2; (2) $\{(x,x)\mid x\in\Omega\}\in\mathcal{R}$; (3) ${R_t}^T=\{(y,x)\mid(x,y)\in R_t\}\in\mathcal{R}$ for all $0\le t\le s$; (4) for all $0\le i,j,t\le s$, there exist constants c_{ij}^t (called the *intersection numbers* of the scheme) such that $c_{ij}^t=|\{z\in\Omega|(x,z)\in R_i,(z,y)\in R_j\}|$ for any pair $(x,y)\in R_t$. An association scheme $(\Omega,\mathcal{R})$ is called *Schurian* if, for some permutation group on Ω, the set of orbitals of this group on Ω coincides with $\mathcal{R}$. This work is devoted to the study of Schurian association schemes related to Suzuki groups $Sz(q)$ and Ree groups ${}^2G_2(q)$ with $q>3$ for which some graphs of their basic relations are antipodal distance-regular graphs of diameter 3. Assume that G is one of the mentioned groups, $r=(q-1)_{2'}$, B is a Borel subgroup of G, U is a unipotent subgroup of G contained in B, K is a subgroup of B with index r, g is an involution in $G-B$, and f is an element of order r in $B\cap B^g$. Let Ω be the set of the right K-cosets of G, and put $h_i=f^i$ and $h_{r+i}=gf^i$ for all $i\in\{0,\ldots,r-1\}$. Denote by $\mathcal{R}$ the set $\{R_0,R_1,\ldots,R_{2r-1}\}$ of binary relations on Ω defined for each $t\in\{0,1,\ldots,2r-1\}$ by the rule: $(Kx,Ky)\in R_t$ if and only if xy^{-1} is contained in the double coset Kh_tK. We prove that $\mathcal{X}=(\Omega,\mathcal{R})$ is a Schurian association scheme and its set of basic relations coincides with the set of orbitals of G on Ω. We find that the intersection number c_{ij}^t, where $0\le i,j,t\le 2r-1$, of the scheme $\mathcal{X}$ is $|U|$ if $t\le r-1$, $i,j\ge r$, and $j-i\equiv t \pmod r$; $(|U|-1)/r$ if $i,j,t\ge r$; 1 if either $t\le r-1$, $i,j\le r-1$, and $i+j\equiv t \pmod r$, or $i\le r-1, t,j\ge r$, and $j-i\equiv t \pmod r$, or $t,i\ge r$, $j\le r-1$, and $i+j\equiv t \pmod r$; and 0 in the remaining cases, where $|U|=q^2$ if $G=Sz(q)$ and $|U|=q^3$ if $G={}^2G_2(q)$. As a corollary, we find the structural parameters $m_{h_t}(h_i,h_j)=|\{Kx\in\Omega|\ Kx\subseteq Kh_i^{-1}Kh_t\cap Kh_jK\}|$ of the Hecke algebra $\mathbb{C}(K\backslash G/K)$ of G with respect to K. Namely, we show that $m_{h_t}(h_i,h_j)$ is exactly the intersection number c_{ij}^t of the scheme $\mathcal{X}$ for all $0\le i,j,t\le 2r-1$. By definition, the graph of the basic relation R_t with $t\ge r$ of $\mathcal{X}$ is equivalent to the coset graph $\Gamma(G,K,Kh_tK)$ of G with respect to K and the element h_t and, as is known, is an antipodal distance-regular graph of diameter 3 with intersection array $\{|U|,(|U|-1)(r-1)/r,1;1,(|U|-1)/r,|U|\}$. The latter fact was proved in the author's earlier paper, where we proposed a technique for studying the graphs $\Gamma(G,K,Kh_tK)$; the technique is based on analyzing the mutual distribution of the neighborhoods of vertices. In the present work, we prove the distance regularity of these graphs as a corollary of the properties of the scheme $\mathcal{X}$.

Keywords: Schurian association scheme, distance-regular graph, antipodal graph.

MSC: 05E30, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-249-254

Введение

Приведем некоторые основные определения и обозначения, используемые в настоящей статье. Как обычно, декартов квадрат множества Ω обозначается через Ω^2. *Когерентной конфигурацией* называется пара $(\Omega,\mathcal{R})$, состоящая из конечного множества Ω и множества $\mathcal{R}=\{R_0,R_1\ldots,R_s\}$ бинарных отношений на Ω, удовлетворяющего следующим четырем условиям:

(1) $\mathcal{R}$ — разбиение множества Ω^2;

(2) в $\mathcal{R}$ существует подмножество $\mathcal{R}_0$, являющееся разбиением диагонали $\{(x,x)\mid x\in\Omega\}$;

(3) ${R_t}^T=\{(y,x)\mid(x,y)\in R_t\}\in\mathcal{R}$ для всех $0\le t\le s$;

(4) для всех $0\le i,j,t\le s$ существуют константы c_{ij}^t (называемые *числами пересечений* когерентной конфигурации) такие, что для любой пары $(x,y)\in R_t$ число точек $z\in\Omega$ таких, что $(x,z)\in R_i$ и $(z,y)\in R_j$, равно c_{ij}^t.

Пусть $\mathcal{X}=(\Omega,\mathcal{R})$ — когерентная конфигурация. Ее *базисными отношениями* называются элементы множества $\mathcal{R}$. Множество всех подстановок на Ω, оставляющих инвариантным каждое из базисных отношений когерентной конфигурации $\mathcal{X}$, образует ее *группу автоморфизмов* и обозначается через $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$. *Графом базисного отношения* $R_t\in\mathcal{R}$ называется пара (Ω,R_t), обозначаемая также через $\Gamma(R_t)$, при этом Ω — *множество вершин*, а R_t — *множество ребер* графа $\Gamma(R_t)$. Если $R_t={R_t}^T\in\mathcal{R}$, то можно считать, что $\Gamma(R_t)$ — неориентированный граф (возможно, содержащий петли). Если $\{(x,x)\mid x\in\Omega\}\in\mathcal{R}$, то когерентная конфигурация $\mathcal{X}$ называется *однородной*. Следуя [1], однородные когерентные конфигурации будем называть *схемами отношений* или просто *схемами*. Если Y — группа подстановок на Ω и $\mathrm{Orb}_2(Y)$ — множество орбиталов группы Y на Ω (т. е. Y-орбит на Ω^2), то $\mathcal{X}=(\Omega,\mathrm{Orb}_2(Y))$ является когерентной конфигурацией и, очевидно, $Y\le\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$. Всякая когерентная конфигурация такой формы называется *шуровой*. В частности, если Y — транзитивная группа подстановок на Ω, то $(\Omega,\mathrm{Orb}_2(Y))$ является шуровой схемой отношений (или однородной шуровой когерентной конфигурацией).

Пусть далее Γ — неориентированный связный граф без петель и кратных ребер. Обозначим через d диаметр графа Γ. Если для любого $0\le i\le d$ существуют константы b_i,a_i и c_i, такие, что для любой пары вершин x и y графа Γ, находящихся на расстоянии i, среди соседей вершины y найдется ровно b_i вершин, находящихся на расстоянии $i+1$ от вершины x, ровно a_i вершин, находящихся на расстоянии i от вершины x, и ровно c_i вершин, находящихся на расстоянии $i-1$ от вершины x, то граф Γ называется *дистанционно регулярным*, а последовательность параметров $\{b_0,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$ называется его *массивом пересечений.* Если бинарное отношение “совпадать или находиться на расстоянии d” на множестве вершин графа Γ является отношением эквивалентности, то граф Γ называется *антиподальным.*

Наши обозначения и терминология из теории групп, в основном, стандартны и могут быть найдены в [3]. Пусть G — одна из групп Судзуки $Sz(q)$ или групп Ри ${}^2G_2(q)$, где $q>3$, B — ее подгруппа Бореля и K — подгруппа группы B индекса, равного $(q-1)_{2'}$. Для элемента g_1 из $G-B$ через $\Gamma(G,K,Kg_1K)$ будем обозначать *граф смежных классов* группы G относительно подгруппы K и элемента g_1, т. е. граф на множестве правых смежных классов группы G по K, в котором вершины Kx и Ky смежны тогда и только тогда, когда элемент xy^{-1} лежит в двойном смежном классе Kg_1K.

Ранее в статье [2] автором был предложен метод исследования некоторых графов смежных классов группы G относительно ее подгруппы K, основанный на анализе взаимного распределения окрестностей их вершин, и доказано, что они являются антиподальными дистанционно регулярными графами диаметра 3.

Здесь мы строим шурову схему отношений группы G на множестве ее правых смежных классов по подгруппе K, графы ряда базисных отношений которой эквивалентны упомянутым выше графам смежных классов, и находим ее числа пересечений. Также мы приводим доказательство дистанционной регулярности этих графов в терминах схем отношений.

Теорема. *Пусть $G = Sz(q)$ и $q = 2^{2e+1} \geq 8$ или $G = {}^2G_2(q)$ и $q = 3^{2e+1} \geq 27$. Пусть B — подгруппа Бореля группы G, U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B, K — подгруппа из B индекса $r = (q-1)_{2'}$, g — инволюция из $G - B$ и f — элемент порядка r из $B \cap B^g$. Пусть Ω — множество правых смежных классов группы G по K, $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$, где $i \in \{0, \dots, r-1\}$. Для каждого $t \in \{0, \dots, 2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая $(Kx, Ky) \in R_t$ в том и только том случае, если $xy^{-1} \in Kh_tK$. Тогда $\mathcal{X} = (\Omega, \{R_0, R_1, \dots, R_{2r-1}\})$ — шурова схема отношений, множество базисных отношений которой совпадает с набором орбиталов G на Ω, и числа пересечений c_{ij}^t, где $0 \leq i, j, t \leq 2r-1$, схемы $\mathcal{X}$ таковы*:

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |U|, & \text{если } t \leq r-1, i, j \geq r \text{ и } j - i \equiv t \pmod r, \\ (|U|-1)/r, & \text{если } i, j, t \geq r, \\ 1, & \text{если } t \leq r-1, i, j \leq r-1 \text{ и } i + j \equiv t \pmod r, \\ 1, & \text{если } i \leq r-1, t, j \geq r \text{ и } j - i \equiv t \pmod r, \\ 1, & \text{если } t, i \geq r, j \leq r-1 \text{ и } i + j \equiv t \pmod r, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ схемы $\mathcal{X}$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений

$$\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\},$$

где $|U| = q^2$ при $G = Sz(q)$ и $|U| = q^3$ при $G = {}^2G_2(q)$, при этом $\Gamma(R_r) \simeq \Gamma(R_t)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$.

1. Доказательство теоремы

Пусть $G = Sz(q)$ и $q = 2^{2e+1} \geq 8$ или $G = {}^2G_2(q)$ и $q = 3^{2e+1} \geq 27$. Пусть B — подгруппа Бореля группы G и U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B. Как известно (см., например, [3; 4]), U — силовская p-подгруппа группы G, где p — характеристика группы G, $B = N_G(U)$, G действует 2-транзитивно на $Syl_p(G)$ и U имеет дополнение H в B, которое является циклической подгруппой порядка $q-1$. При этом можно считать, что $H = B \cap B^g$ для некоторой инволюции g из $G - B$. Тогда $H\langle g \rangle \simeq D_{2(q-1)}$. Положим $r = (q-1)_{2'}$, т. е. r — максимальный нечетный делитель числа $q-1$. Зафиксируем элемент f порядка r из H и подгруппу K из B индекса r. Тогда $H = \langle h \rangle \times \langle f \rangle$, где $h = 1$ при $G = Sz(q)$ (т. е. f порождает H) и h — (единственная) инволюция из H при $G = {}^2G_2(q)$.

Имеем $G = B \cup BgB$ и каждый элемент g_1 из $G - B$ единственным образом представим в виде $uwgv$, где $u, v \in U$ и $w \in H$. Такая форма записи элемента g_1 называется *канонической*. Положим $U^\# = U - \{1\}$. Пусть $\tau, \sigma : U^\# \to U$ и $\eta : U^\# \to H$ — это три функции, определенные с помощью канонической формы элементов в G по правилу $gsg = \tau(s)\eta(s)g\sigma(s)$ для всех $s \in U^\#$. Обозначим через Ω множество правых смежных классов группы G по K. Для удобства мы будем отождествлять группу G с подгруппой из $Sym(\Omega)$, индуцируемой действием группы G правым умножением на Ω.

Для того чтобы определить числа пересечений рассматриваемых далее схем, нам потребуется исследовать поведение функции η. Рассмотрим разбиение $\mathcal{P}$ множества U^2 на классы $C_0, C_1, \dots C_r$, определенные следующим образом:

$$C_0 = \{(x,x)|x \in U\} \text{ и } C_i = \{(x,y) \in U^2 | x \neq y \text{ и } \eta(xy^{-1}) \in f^i\langle h\rangle\} \text{ для всех } 1 \leq i \leq r.$$

Очевидно, что $\eta(xy^{-1}) = \eta(xs(ys)^{-1})$ для всех элементов x, y и s из U таких, что $x \neq y$, и поэтому для каждого $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ класс C_i замкнут относительно действия группы U правыми сдвигами на самой себе. Таким образом, U действует регулярно на C_0 и полурегулярно на C_i при $i > 0$. Так как $\eta(s^{-1}) = \eta(s)$ для всех $s \in U^{\#}$, то для всех $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ класс C_i совпадает с $C_i{}^T = \{(y,x) \in U^2 | (x,y) \in C_i\}$. Кроме того, действие сопряжениями группы H на U индуцирует транзитивную группу подстановок на $\mathcal{P} - \{C_0\}$, поскольку $\langle h, f^2\rangle = H$ и $\eta(s^f) = f^2\eta(s)$ для всех $s \in U^{\#}$ ввиду равенства

$$gs^f g = fgsgf^{-1} = \tau(s)^{f^{-1}} f^2 \eta(s) g \sigma(s)^{f^{-1}}.$$

Отсюда классы $C_1, \dots C_r$ имеют одинаковый размер, равный $|U^2 - C_0|/r = |U|(|U|-1)/r$, в частности, для каждого $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ существует ровно $(|U|-1)/r$ элементов $s \in U^{\#}$ таких, что $\eta(s) \in f^j\langle h\rangle$.

Положим $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$ для всех $i \in \{0, \dots, r-1\}$. Для каждого $t \in \{0, \dots, 2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая $(Kx, Ky) \in R_t \Leftrightarrow xy^{-1} \in Kh_tK$. Учитывая разложение $G = \bigcup_{t=0}^{2r-1} Kh_tK$, получим, что $\mathcal{R} = \{R_0, \dots, R_{2r-1}\}$ является разбиением множества Ω^2.

По определению $R_t = \{(Kf^ty, Ky)|y \in G\}$ при $0 \leq t \leq r-1$ и $R_t = \{(Kgf^ty, Ky)|y \in G\}$ при $r \leq t \leq 2r-1$. Таким образом, $\mathcal{R}$ совпадает со множеством орбиталов G на Ω. Значит, $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ — шурова схема отношений.

Теперь найдем числа пересечений c_{ij}^t схемы $\mathcal{X}$.

Пусть $t \leq r-1$. Тогда неравенство $Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK \neq \varnothing$ может иметь место только в случаях, когда либо $i, j \leq r-1$, либо $i, j \geq r$.

Если $i, j \leq r-1$, то $Kf^{-i+t} = Kf^j \Leftrightarrow i + j \equiv t \pmod r$, и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK$, очевидно, равно 1.

Если $i, j \geq r$, то для $i' = i - r$ и $j' = j - r$ имеем $Kf^{i'+t} = Kf^{j'} \Leftrightarrow i + t \equiv j \pmod r$, и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK = Kgf^iKf^t \cap Kgf^jK$, равно $|U| = |Kgf^jK : Kx|$.

Таким образом, для всех $t \leq r-1$ имеем

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |U|, & \text{если } j - i \equiv t \pmod r \text{ и } i,j \geq r, \\ 1, & \text{если } i + j \equiv t \pmod r \text{ и } i,j \leq r-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь пусть $t \geq r$. Тогда неравенство $Kh_i^{-1}Kf^t \cap Kh_jK \neq \varnothing$ может иметь место только в случаях, когда либо $i \leq r-1$ и $j \geq r$, либо $i \leq r-1$ и $j \geq r$, либо $i, j \geq t$.

Если $i \leq r-1$ и $j \geq r$, то

$$Kgf^{t+i} \subseteq Kgf^jK \Leftrightarrow t + i \equiv j \pmod r,$$

и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kgf^t \cap Kh_jK = Kf^{i-t}g \cap Kgf^jK$, равно 1.

Если $i \geq r$ и $j \leq r-1$, то

$$\varnothing \neq Kgf^iKgf^t \cap Kf^j \Leftrightarrow Kgf^igf^t = Kf^j \Leftrightarrow i + j \equiv t \pmod r,$$

и поэтому число смежных классов Kx таких, что $Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kgf^t \cap Kh_jK = Kgf^iKgf^t \cap Kf^j$, снова равно 1.

Наконец, если $i, j \geq r$, то

$$\varnothing \neq Kgf^iKgf^t \cap Kgf^jK \Leftrightarrow gf^ih^lsgf^t = \tau(s)^{f^ih^l}f^{-i}h^l\eta(s)f^{-t}g\sigma(s)^{f^t} = uh^mf^{-j}gv$$

для некоторых $l, m \in \{0, 1\}$ и элементов s, u, v из U. Последнее равенство влечет $\eta(s) = f^{i-j+t}h^{m-l}$, и по доказанному выше число смежных классов Kx таких, что

$$Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kgf^t \cap Kh_jK = Kgf^iKgf^t \cap Kgf^jK,$$

равно $(|U| - 1)/r$.

Таким образом, для всех $t \geq r$ имеем

$$c_{ij}^t = \begin{cases} (|U|-1)/r, & \text{если } i, j \geq r, \\ 1, & \text{если } j - i \equiv t \pmod r \text{ и } i \leq r-1, j \geq r, \\ 1, & \text{если } i + j \equiv t \pmod r \text{ и } i \geq r, j \leq r-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\Gamma(R_t) = (\Omega, R_t)$ — граф базисного отношения R_t и $t \geq r$. В этом случае ${R_t}^T = R_t$, и, отождествив графы $\Gamma(R_t)$ и $\Gamma(G, K, Kgf^tK)$, можно полагать, что $\Gamma(R_t)$ — неориентированный граф с транзитивной на дугах группой автоморфизмов G. В [2, теорема 1] было доказано, что для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ схемы $\mathcal{X}$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений $\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\}$. Кроме того, как следует из [2], графы $\Gamma(R_t)$ попарно изоморфны для всех $t \geq r$, при этом $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$. Ясно, что $G \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ (по определению $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}) = \{\varphi \in Sym(\Omega) | R^\varphi = R$ для всех $R \in \mathcal{R}\}$).

Заметим также, что дистанционная регулярность графа $\Gamma(R_t)$ следует из найденных выше значений чисел пересечений схемы $\mathcal{X}$. Действительно, отношение $\mathcal{A} = R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_{r-1}$ на Ω является отношением эквивалентности, классы которого отвечают максимальным блокам импримитивности группы G на Ω, на которых G действует 2-транзитивно. Теперь, рассмотрев числа пересечений схемы $\mathcal{X}$, получим, что граф $\Gamma(R_t)$ является r-накрытием полного графа на $|U| + 1$ вершинах (поскольку вершины графа $\Gamma(R_t)$ из одного и того же произвольного класса отношения $\mathcal{A}$ индуцируют r-коклику в $\Gamma(R_t)$, а объединение любых двух различных классов отношения $\mathcal{A}$ индуцирует совершенное паросочетание в $\Gamma(R_t)$) и любые две вершины из различных классов отношения $\mathcal{A}$ имеют ровно $(|U| - 1)/r$ общих соседей в $\Gamma(R_t)$.

Теорема доказана.

Результат доказанной теоремы позволяет определить произведение векторов алгебры смежности схемы $\mathcal{X}$, а также структурные параметры изоморфной ей алгебры Гекке. Пусть $A(R_t)$ — матрица смежности отношения R_t и $\mathbb{C}\mathcal{X} = \langle A(R_t) \rangle_{R_t \in \mathcal{R}}$ — алгебра смежности схемы $\mathcal{X}$. Произведение ее базисных векторов зависит от чисел пересечений схемы $\mathcal{X}$:

$$A(R_i)A(R_j) = \sum_{t=0}^{2r-1} c_{ij}^t A(R_t).$$

Отметим, что отображение $R_t \mapsto Kh_tK$ определяет изоморфизм алгебры $\mathbb{C}\mathcal{X}$ на алгебру Гекке $\mathbb{C}(K \backslash G/K)$ группы G относительно K (см., например, [1]), причем структурный параметр $m_{h_t}(h_i, h_j) = |\{Kx \in \Omega |\ Kx \subseteq Kh_i^{-1}Kh_t \cap Kh_jK\}|$ последней — это в точности число c_{ij}^t для всех $0 \leq i, j, t \leq 2r - 1$.

Представляется возможным модифицировать и применить приведенное доказательство теоремы для исследования схем группы G в случае, если r — произвольный неединичный делитель числа $(q-1)_{2'}$, а также для исследования подобных шуровых схем для групп $L_2(q)$ и $U_3(q)$. Это планируется осуществить в одной из последующих публикаций автора. Подчеркнем, что числа пересечений таких схем (или структурные параметры сопутствующих им алгебр Гекке) определяют дистанционную регулярность и массивы пересечений графов их некоторых базисных отношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Muzychuk M., Ponomarenko I.** Association schemes, Schur rings and the isomorphism problem for circulant graphs [e-resource]. Part 1 // Notes of lectures given at the international workshop “Algorithmic problems in group theory and related areas” (Novosibirsk, 2014). P. 1–24. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/isc/2014/lectures/MP1_2014.pdf.
2. **Tsiovkina L.Yu.** Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb. 2015. Vol. 41, no 4. P. 1079–1087. doi: 10.1007/s10801-014-0566-x.
3. **Aschbacher M.** Finite Group Theory, Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 305 p.
4. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London, etc: Wiley, 1972. 332 p.

Поступила 5.09.2019
После доработки 23.10.2019
Принята к публикации 28.10.2019

Циовкина Людмила Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

REFERENCES

1. Muzychuk M., Ponomarenko I. *Association schemes, Schur rings and the isomorphism problem for circulant graphs*, Part 1, Notes of lectures given at the international workshop “Algorithmic problems in group theory and related areas”, Novosibirsk, 2014, pp. 1–24. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/isc/2014/lectures/MP1_2014.pdf.
2. Tsiovkina L.Yu. Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$. *J. Algebr. Comb.*, 2015, vol. 41, no. 4, pp. 1079–1087. doi: 10.1007/s10801-014-0566-x.
3. Aschbacher M. *Finite group theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 305 p. ISBN: 0-521-78675-4.
4. Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* London: Wiley, 1972, 332 p. ISBN: 0471137359.

Received September 5, 2019
Revised October 23, 2019
Accepted October 28, 2019

Lyudmila Yuryevna Tsiovkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: l.tsiovkina@gmail.com.

Cite this article as: L. Yu. Tsiovkina. Some Schurian association schemes related to Suzuki and Ree groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 249–254.