ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.853

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КВАЗИРЕШЕНИЙ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

В работе рассматривается важный с точки зрения приложений класс задач выпуклого программирования с возможно несовместной системой ограничений. Такие постановки характеризуются как несобственные задачи выпуклой оптимизации. В силу частоты появления подобных задач актуальной становится проблема разработки их теории и численных методов коррекции (аппроксимации). Под коррекцией понимается построение близких в определенном смысле разрешимых моделей, решение которых определяется как обобщенное решение исходной несобственной задачи. В данной работе корректирующие задачи строятся на основе минимизации некоторой функции штрафа от ограничений. Для откорректированной задачи в условиях возможного неточного задания информации о функциях исходной модели применяется один из стандартных способов регуляризации некорректных задач оптимизации — метод квазирешений. Устанавливаются условия и оценки сходимости предлагаемых процедур.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, методы штрафных функций, метод квазирешений.

V. D. Skarin. On the application of the quasisolution method to the correction of improper convex programs.

We consider a class of improper convex programs with a possibly inconsistent system of constraints, which is important from the viewpoint of applications. Such problems are characterized as improper problems of convex optimization. Since improper problems are rather frequent, it is important to develop the theory and numerical methods of their correction (approximation). The correction is understood as the construction of solvable models that are close to the original problems in a certain sense. Solutions of these models are taken as generalized solutions of the original improper problems. In the present paper the correcting problems are constructed based on the minimization of a certain penalty function depending on the constraints. Since the information about the functions of the original model may be inexact, we apply for the corrected problem the quasisolution method, which is a standard regularization method for ill-posed optimization problems. Convergence conditions are formulated for the proposed methods and convergence rates are established.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, penalty function methods, quasisolution method.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-189-200

Введение

При математическом моделировании конкретных постановок из области экономики, управления и проектирования часто возникают оптимизационные задачи с несовместной системой ограничений. Модели с противоречивыми ограничениями составляют (см. [1]) важнейший класс несобственных задач (НЗ) линейного и выпуклого программирования (ВП). По причине частоты возникновения НЗ особое значение приобретают вопросы теории и численного анализа подобных задач. В первую очередь требуется произвести оптимальную коррекцию НЗ, т. е. построить близкие в определенном смысле разрешимые задачи, решение которых принимается за обобщенное решение НЗ.

Одной из распространенных причин появления несовместности в ограничениях является неточное задание исходных данных. Если информация о функциях в задаче носит приближенный характер, то такие постановки типичны для теории некорректных экстремальных задач

[1]Исследования поддержаны РФФИ, грант № 19-07-01243.

(см. [2–5]). Поэтому представляется естественной попытка использовать при коррекции НЗ идею регуляризации некорректных моделей. В качестве примера работ, где для анализа задач с противоречивыми ограничениями применялись известные методы регуляризации, можно указать [6–9].

В настоящей работе для НЗ ВП строится общая задача оптимальной коррекции путем вариации правых частей ограничений относительно минимума некоторой функции штрафа. В основу построения метода аппроксимации положена идея метода квазирешений (см. [3]) — стандартного способа регуляризации некорректных задач оптимизации. Определяются условия и оценки сходимости предлагаемых методов.

1. Несобственная задача ВП, метод квазирешений

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Будем считать, что $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, где

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \mid \inf_x L(x, \lambda) > -\infty\}.$$

Такие задачи с противоречивыми ограничениями характеризуются в [1] как НЗ ВП 1-го рода. Они наиболее часто встречаются в практике математического моделирования экономических ситуаций и отмечаются следующим свойством: если вместо X в (1) взять множество $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, такое, что $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_\xi\} > -\infty$.

Введем меру несовместности системы ограничений задачи (1) как

$$\bar{\varphi} = \inf_x \varphi(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x) = \omega(f^+(x))$, $\omega(z)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^m_+$ и такая, что

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega(z) > 0 \qquad (\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \ne 0). \tag{3}$$

Пусть значение $\bar{\varphi}$ в (2) достигается в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x})$. Очевидно, что множество X в (1) непусто тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi} = 0$. Поэтому естественным является определение оптимальной коррекции для НЗ ВП (1) в виде задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in \bar{X}\}, \tag{4}$$

где $\bar{X} = \{x \mid \varphi(x) \le \bar{\varphi}\}$.

Если $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}) = 0$, то задачи (1) и (4) совпадают, в противном случае решение задачи (4) будем считать обобщенным (аппроксимационным) решением НЗ ВП (1). Таким образом, для существования обобщенного решения задачи (1) требуется, чтобы 1) $\bar{X} \ne \varnothing$; 2) нашлась точка $\bar{x} = \arg\min\{f_0(x) \mid x \in \bar{X}\}$.

Примерами функции $\varphi(x) = \omega(z(x))$, удовлетворяющей условиям (3), могут служить $\omega_1(z) = \|z\|_1 = \sum_{i=1}^m z_i$, $\omega_2(z) = \|z\|_2^2 = \sum_{i=1}^m z_i^2$, $\omega_3(z) = \|z\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} z_i$. Если $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}) = \omega(f^+(\bar{x}))$, то можно определить коррекцию НЗ ВП (1) в виде

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}}\}, \tag{5}$$

где $\bar{\xi} = f^+(\bar{x})$. Нетрудно показать, что при выборе $\varphi(x) = \|f^+(x)\|^2$ задачи (4) и (5) совпадают. Если же в качестве $\varphi(x)$ взять $\|f^+(x)\|_1$ или $\|f^+(x)\|_\infty$, то справедливо включение $X_{\bar{\xi}} \subset \bar{X}$.

Пусть в задаче (1) вместо функций $f_i(x)$ известны их приближения $f_i^\varepsilon(x)$ такие, что

$$|f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \le \varepsilon \tag{6}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $i = 0, 1, \dots, m$. В этом случае задача коррекции (4) примет вид

$$\min\{f_0^\varepsilon(x) \mid x \in \bar{X}_\varepsilon\}, \tag{7}$$

где $\bar{X}_\varepsilon = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi^\varepsilon(x)$, $\varphi^\varepsilon(x) = \omega(f^{\varepsilon^+}(x))$, функция $\omega(z)$ определена на множестве $\mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяет условиям (3).

Для того чтобы с помощью анализа возмущенной задачи (7) получить решение задачи коррекции (4), необходимо применить некоторый метод регуляризации для некорректных задач оптимизации. Привлечем для этой цели идеологию известного метода квазирешений (см. [3]).

Выберем вначале стабилизатор задачи (1) как выпуклую функцию $\Omega(x)$, определенную на $\mathbb{R}^n$, для которой

1) $\Omega(x) \ge 0$ $(\forall\, x)$;

2) множество $Q_C = \{x \mid \Omega(x) \le C\}$ ограничено при всех C таких, что $Q_C \ne \varnothing$.

Ограничения возмущенной задачи (1) будем агрегировать с помощью некоторой штрафной функции $P_\varepsilon(x)$. Обычно в качестве такой функции рассматривается $P_\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^p, p \ge 1$.

Метод квазирешений (см. [3]) состоит в отыскании приближенного решения $x_{Rd}^{\varepsilon\delta}$ задачи

$$\min_x\{\Phi^\varepsilon(x, R) = f_0^\varepsilon(x) + RP_\varepsilon(x) \mid x \in S_d\},$$

где $\Phi^\varepsilon(x_{Rd}^{\varepsilon\delta}, R) \le \bar{\Phi}_d^\varepsilon(R) + \delta$, $\bar{\Phi}_d^\varepsilon(R) = \inf\limits_{x \in S_d} \Phi^\varepsilon(x, R)$, $S_d = \{x \mid \Omega(x) \le d\}$, $R > 0$, $d > 0$, $\delta \ge 0$. Требуется найти согласование параметров ε, R, δ и d такое, чтобы точки $x_{Rd}^{\varepsilon\delta}$ приближали решение задачи (4), т. е. решали бы НЗ ВП (1) в обобщенном смысле.

2. Разрешимая задача оптимальной коррекции

Рассмотрим вначале случай, когда функции $f_i(x)$ в задаче (1) известны точно, т. е. когда в (6) $\varepsilon = 0$. Сведем задачу (7) к проблеме минимизации штрафной функции

$$\min_x\{F_d(x, r) = f_0(x) + R\varphi(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+\}, \tag{8}$$

где $r = [R, \rho] > 0$, $d > 0$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (3).

Предположим, что задача (4) имеет решение. Данное утверждение будет иметь место, например, когда $\varphi(x) = P(x) = \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^p}(x)$, $p \ge 1$, и множество $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$.

В самом деле, пусть $X_{\xi_0} \ne \varnothing$. Тогда непустыми и ограниченными будут и множества X_ξ при $\xi > \xi_0$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $X^0 = \{x \mid \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$, $x' \in X^0$. Тогда $\varphi(x_0) \ge \varphi(x') = \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^p}(x') \ge f_i^{+^p}(x')$, $i = 1, \dots, m$. Отсюда $f_i(x') \le f_i^+(x') \le \sqrt[p]{\varphi(x_0)}$, т. е. $x' \in X_{\tilde{\xi}}$, где $\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m] \in \mathbb{R}_+^m$, $\tilde{\xi}_i = \max\{\xi_i^0, \sqrt[p]{\varphi(x_0)}\}$, ξ_i^0 — i-я компонента вектора ξ_0, $i = 1, \dots, m$. Так как $X^0 \subset X_{\tilde{\xi}}$, то множество X^0 ограничено. Тогда $\bar{\varphi} = \inf\limits_x \varphi(x) = \min\limits_{x \in X^0} \varphi(x)$, что влечет разрешимость задачи (4).

Исследуем связь между задачами (4) и (8).

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \ge \tilde{f} > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$, *задача* (4) *разрешима в точке* $\bar{x}$. *Тогда для любых* $r > 0$ *и* $d > 0$ *существует решение* x_{rd} *задачи* (8). *Любая предельная точка последовательности* $\{x_{rd}\}$ *при* $R \to \infty$, $\rho > 0$, $d \ge \Omega(\bar{x})$ *решает задачу* (4).

Доказательство. Рассмотрим множество

$$M_{rd} = \{x \mid F_d(x,r) \leq F_d(x^0,r)\},$$

где x^0 — произвольная фиксированная точка $\mathbb{R}^n$. Для $x' \in M_{rd}$ имеем

$$f_0(x') + R\varphi(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^+ \leq f_0(x^0) + R\varphi(x^0) + \rho\,(\Omega(x^0) - d)^+. \tag{9}$$

Отсюда

$$\rho\,(\Omega(x') - d) \leq f_0(x^0) - f_0(x') + R\varphi(x^0) + \rho\,(\Omega(x^0) - d)^+.$$

Поэтому, если $d \geq \Omega(x^0)$, то $\Omega(x') \leq d + \dfrac{f_0(x^0) - \tilde f}{\rho} + \dfrac{R}{\rho}\varphi(x^0)$, если $d < \Omega(x^0)$, то $\Omega(x') \leq \Omega(x^0) + \dfrac{f_0(x^0) - \tilde f}{\rho} + \dfrac{R}{\rho}\varphi(x^0)$. Следовательно, $M_{rd} \subset Q_{rd} = \{x \mid \Omega(x) \leq C(x^0,r,d)\}$, где $C(x^0,r,d) = \dfrac{f_0(x^0) - \tilde f}{\rho} + \dfrac{R}{\rho}\varphi(x^0) + \max\{d,\,\Omega(x^0)\}$. Из ограниченности множества Q_{rd} следует ограниченность M_{rd}, а поскольку $\inf\limits_x F_d(x,r) = \min\limits_x\{F_d(x,r) \mid x \in M_{rd}\}$, то для каждых $r > 0$ и $d > 0$ существует точка $x_{rd} = \arg\min\limits_x F_d(x,r)$.

Положим в неравенстве (9) $x^0 = \bar x$, $x' = x_{rd}$. Если $d \geq \Omega(\bar x)$, получим

$$\Omega(x_{rd}) \leq d + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{\rho}, \quad \varphi(x_{rd}) \leq \bar\varphi + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{R}, \quad f_0(x_{rd}) \leq f_0(\bar x) + R(\bar\varphi - \varphi(x_{rd})) \leq f_0(\bar x).$$

Отсюда следуют ограниченность последовательности $\{x_{rd}\}$ для любого $r > 0$, существование предельной точки $\tilde x$ при $R \to \infty$ и $\rho > 0$ и выполнение неравенств $\varphi(\tilde x) \leq \bar\varphi$, $f_0(\tilde x) \leq f_0(\bar x)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \geq \tilde f > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$, *задача* (4) *разрешима в точке* $\bar x$, $x_{rd} = \arg\min\limits_x F_d(x,r)$, $d \leq \Omega(\bar x)$, $R \to \infty$, $\rho = \rho_0$, *где* $0 < \rho_0\Omega(\bar x) \leq \varepsilon_0$, ε_0 *— заданная точность. Тогда для любой предельной точки* $\tilde x$ *последовательности* $\{x_{rd}\}$ *справедливо:* $\tilde x \in \bar X$, $|f_0(\tilde x) - f_0(\bar x)| \leq \varepsilon_0$.

Доказательство. Положим в неравенстве (9) $x^0 = \bar x$, $x' = x_{rd}$ (существование x_{rd} гарантировано теоремой 1). Имеем

$$f_0(x_{rd}) + R\varphi(x_{rd}) + \rho\,(\Omega(x_{rd}) - d) \leq f_0(\bar x) + R\bar\varphi + \rho\,(\Omega(\bar x) - d),$$

из чего следует

$$\Omega(x_{rd}) \leq \Omega(\bar x) + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{\rho}; \tag{10}$$

$$\varphi(x_{rd}) \leq \bar\varphi + \frac{f_0(\bar x) - \tilde f}{R} + \frac{\rho}{R}\Omega(\bar x); \tag{11}$$

$$f_0(x_{rd}) \leq f_0(\bar x) + \rho\,\Omega(\bar x). \tag{12}$$

Из неравенства (10) при $\rho = \rho_0$ вытекают ограниченность последовательности $\{x_{rd}\}$ и существование предельной точки $\tilde x$. Из (11) при $R \to \infty$ получаем $\tilde x \in \bar X$, а из (12) следует оценка $|f_0(\tilde x) - f_0(\bar x)| \leq \varepsilon_0$.

Теорема доказана.

Замечание. Можно несколько усилить условия теоремы 2, потребовав ограниченности допустимого множества $\bar X$ задачи (4). Пусть $R \to \infty$, $\rho \to 0$. Тогда можно указать значения $\bar R$ и $\bar\rho$ такие, что $\dfrac{f_0(\bar x) - \tilde f}{R} + \dfrac{\rho}{R}\Omega(\bar x) \leq D = \mathrm{const}$ при $R \geq \bar R$, $0 < \rho \leq \bar\rho$. Функция $\varphi(x)$ выпуклая, поэтому из ограниченности $\bar X$ будет следовать ограниченность множества $X_D = \{x \mid \varphi(x) \leq \bar\varphi + D\}$. Из неравенства (11) вытекает, что $x_{rd} \in X_D$ для $R \geq \bar R$, $\rho \leq \bar\rho$. Пусть $\tilde x$ — предельная точка для $\{x_{rd}\}$ при $R \to \infty$, $\rho \to 0$. Тогда в силу (11) и (12) справедливо $\tilde x \in \bar X$ и $f_0(\tilde x) = f_0(\bar x)$.

3. Случай неразрешимости задачи оптимальной коррекции

В утверждениях, сформулированных выше, существенное значение имела разрешимость оптимальной коррекции (4). Для этого требовалось выполнение двух условий: 1) чтобы непусто было множество $\bar{X}$, 2) чтобы имела решение $\bar{x}$ задача (4): $f_0(\bar{x}) \le f_0(x)$ $(\forall x \in \bar{X})$. Попробуем отказаться от этих условий.

Рассмотрим случай, когда $\bar{\varphi} = \inf\limits_x \varphi(x)$ не достигается. Применим для отыскания $\bar{\varphi}$ некоторый монотонно убывающий итерационный метод для минимизации функций многих переменных: $\varphi(x_k) \searrow \bar{\varphi}$ $(k \to \infty)$. Зафиксируем номер $\bar{k}$ так, чтобы $\varphi(x_{\bar{k}}) - \bar{\varphi} \le \bar{\delta}$, где $\bar{\delta} > 0$ — заданная точность. В качестве оптимальной коррекции для НЗ ВП (1) положим задачу

$$\min\{f_0(x) \mid \varphi(x) \le \varphi(x_{\bar{k}}),\ \Omega(x) \le d\}, \tag{13}$$

где $\Omega(x)$ — как и прежде, некоторый стабилизатор, $d \ge \Omega(x_{\bar{k}})$.

Задача (13) всегда имеет некоторое решение $\bar{x}_k$. Очевидно, что в случае разрешимости задачи оптимальной коррекции (4) и достаточно больших $\bar{k}$ и d точка $\bar{x}_k$ будет хорошим приближением для решения (4).

Выпишем для задачи (13) функцию Лагранжа

$$L_k(x;\lambda,\mu) = f_0(x) + \lambda\,(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \mu\,(\Omega(x) - d),$$

где $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 0$. Предположим, что функция $L_k(x;\lambda,\mu)$ имеет в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1_+$ седловую точку $[\bar{x}_k;\bar{\lambda}_k,\bar{\mu}_k]$. Заметим, что это предположение гарантированно выполняется, если считать $d > \bar{d} = \max\{\Omega(x_{\bar{k}}),\Omega(x_{\bar{k}+1})\}$. В этом случае точка $x_{\bar{k}+1}$ будет удовлетворять условию Слейтера для задачи (13), что обеспечивает существование седловой точки.

Из определения седловой точки $[\bar{x}_k;\bar{\lambda}_k,\bar{\mu}_k]$ следует неравенство

$$f_0(\bar{x}_k) \le f_0(x) + \bar{\lambda}_k\,(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \bar{\mu}_k\,(\Omega(x) - d), \tag{14}$$

справедливое для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $d > \bar{d}$.

Исследуем связь между задачами (8) и (13).

Теорема 3. *Пусть в задаче* (8) $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d > \bar{d}$. *Тогда задача* (8) *разрешима в некоторой точке* x_{rd} *и справедливы оценки*:

$$\varphi(x_{rd}) \le \bar{\varphi} + \bar{\delta}; \tag{15}$$

$$\Omega(x_{rd}) \le d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\,\bar{\delta}; \tag{16}$$

$$f_0(x_{rd}) \le f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta}. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем ограниченность множества $M^k_{rd} = \{x \mid F_d(x,r) \le F_d(\bar{x}_k,r)\}$ для любых достаточно больших R, ρ и d. Пусть $x' \in M^k_{rd}$. Тогда

$$f_0(x') + R\varphi(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^+ \le f_0(\bar{x}_k) + R\varphi(\bar{x}_k) + \rho\,(\Omega(\bar{x}_k) - d)^+. \tag{18}$$

Учитывая, что $\Omega(\bar{x}_k) \le d$, из (18) и (14) получим

$$\rho\,(\Omega(x') - d)^+ \le f_0(\bar{x}_k) - f_0(x') + R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x'))$$

$$\le \bar{\lambda}_k\,(\varphi(x') - \varphi(x_{\bar{k}})) + \bar{\mu}_k\,(\Omega(x') - d) + R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x')).$$

Так как $\varphi(\bar{x}_k) \le \varphi(x_{\bar{k}}) \le \bar{\varphi} + \delta$, из последнего неравенства имеем

$$(\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x') - d)^+ \le (R - \bar{\lambda}_k)(\varphi(x_{\bar{k}}) - \varphi(x')) \le (R - \bar{\lambda}_k)\,\bar{\delta}, \tag{19}$$

$$\Omega(x') \le d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\,\bar{\delta}. \tag{20}$$

В силу (20) справедливо включение

$$M_{rd}^k \subset Q^k\,(r, d, \bar{\delta}) = \Big\{x \mid \Omega(x) \le d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\,\bar{\delta}\Big\}$$

для любых $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d > \bar{d}$. Из ограниченности множества $Q^k\,(r, d, \bar{\delta})$ следует существование точки $x_{rd} = \arg\min\limits_x F_d(x, r)$.

Поскольку $x_{rd} \in M_{rd}^k$, то полагая в рассуждениях выше $x' = x_{rd}$, сразу получаем из (19), (20) оценки (15) и (16). Оценка (17) следует из (18) и (15):

$$f_0(x_{rd}) \le f_0(\bar{x}_k) + R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_{rd})) \le f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая предельная точка $\tilde{x}$ последовательности $\{x_{rd}\}$ при $R > \bar{\lambda}_k$, $d > \bar{d}$ и $\rho \to \infty$ допустима в задаче* (13) *и приближает $f_0(\bar{x}_k)$ — оптимальное значение* (13) *— с точностью $|f_0(\tilde{x}) - f_0(\bar{x}_k)| \le R\bar{\delta}$.*

4. Метод коррекции в условиях приближенного задания функций

Далее предположим, что функция $\varphi(x)$ в задаче (4) есть функция квадратичного штрафа: $\varphi(x) = \|f^+(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^2}(x)$. В разд. 1 уже отмечалось, что в этом случае задачу (4) можно представить в виде (5): $\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}}\}$, где $\bar{\xi} = f^+(\bar{x})$, $\bar{x} = \arg\min\limits_x \varphi(x)$, $\|\bar{\xi}\| = \min\{\|\xi\| \mid X_\xi \ne \varnothing\}$.

Если инфимум в (2) недостижим, то определим последовательность $\{x_k\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \bar{\varphi}$. Зафиксируем, как и ранее, номер $\bar{k}$ так, чтобы $\varphi(x_{\bar{k}}) - \bar{\varphi} \le \bar{\delta}$, $\bar{\delta} > 0$. Положим $\xi_k = f^+(x_{\bar{k}})$ и рассмотрим аналог задачи (13)

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_k \cap S_d\}, \tag{21}$$

где $X_k = \{x \mid f(x) \le \xi_k\}$, $S_d = \{x \mid \Omega(x) \le d\}$.

Пусть вместо $f_i(x)$ в задаче (1) известны функции $f_i^\varepsilon(x)$, удовлетворяющие неравенствам (6), $i = 0, 1, \ldots, m$. Тогда задача (8) примет вид

$$\min_x F_d^\varepsilon(x, r), \tag{22}$$

где $F_d^\varepsilon(x, r) = f_0^\varepsilon(x) + R\varphi^\varepsilon(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+$, $\varphi^\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2$, $r = [R, \rho] > 0$, $d > 0$.

Лемма 1. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \ge \tilde{f} > -\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$. *Тогда задача* (22) *разрешима для любых $r > 0$, $d > 0$ и $\varepsilon \ge 0$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $M_{rd} = \{x \mid F_d(x, r) \le F_d(x^0, r)\}$, где $F_d(x, r)$ — из (8), x^0 — фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$. При доказательстве теоремы 1 было показано, что множество M_{rd} ограничено для любых $r > 0$, $d > 0$.

Из неравенств (6) следует $|f_i^{\varepsilon^+}(x) - f_i^+(x)| \le |f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \le \varepsilon$. Тогда

$$|\varphi^\varepsilon(x) - \varphi(x)| = \Big|\sum_{i=1}^m [(f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 - (f_i^+(x))^2]\Big| = \Big|\sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x) - f_i^+(x)) \times (f_i^{\varepsilon^+}(x) + f_i^+(x))\Big|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{m} (f_i^{\varepsilon^+}(x) + f_i^+(x)) \leq \sum_{i=1}^{m} (2\varepsilon f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2). \tag{23}$$

Заметим, что в (23) слагаемые в последней сумме могут иметь вид $(2\varepsilon f_i^+(x) + \varepsilon^2)$. Краткости ради в дальнейшем будем применять обозначения $s = [r, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$, $F_s(x) = F_d^\varepsilon(x, r)$. Рассмотрим равенство

$$F_d(x, r) = F_s(x) - f_0^\varepsilon(x) + f_0(x) + R(\varphi(x) - \varphi^\varepsilon(x)).$$

Из (23) вытекает $\sum\limits_{i=1}^{m} (2\varepsilon f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 + 2m\varepsilon^2 = \varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2$. Поэтому

$$F_d(x, r) \leq F_s(x) + \varepsilon + R\varphi^\varepsilon(x) + 2Rm\varepsilon^2$$

$$= 2F_s(x) + \varepsilon - f_0^\varepsilon(x) + 2Rm\varepsilon^2 - \rho\,(\Omega(x) - d)^+ \leq 2F_s(x) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2 - \tilde{f}.$$

Обозначим $M_s = \{x \mid F_s(x) \leq F_s(x^0)\}$. Пусть $x' \in M_s$. Тогда $F_d(x', r) \leq 2(F_s(x^0) + Rm\varepsilon^2) - \tilde{f}$, т. е. $M_s \subset M_{rd}(C_1) = \{x \mid F_d(x, r) \leq C_1(x^0, r, d, \varepsilon)\}$, где $C_1(x^0, r, d, \varepsilon) = 2(F_s(x^0) + Rm\varepsilon^2) - \tilde{f}$. В силу ограниченности M_{rd} будет ограничено и множество $M_{rd}(C_1)$, а вместе с ним и M_s. Но $\inf\limits_x F_s(x) = \min\limits_{x \in M_s} F_s(x)$, поэтому существует точка $x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$ для любых $s = [r, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Лемма доказана.

Оценим связь между задачами (21) и (22).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 1, $\bar{x}_k$ — *решение задачи* (21) *и* $d \geq \Omega(\bar{x}_k)$. *Справедливы соотношения*:

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \leq B(\bar{x}_k, \varepsilon, R); \tag{24}$$

$$\Omega(x_s) \leq d + B_1(\bar{x}_k, \varepsilon, R); \tag{25}$$

$$f_0^\varepsilon(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R\bar{\delta} + \varepsilon\, B_2(\bar{x}_k, \varepsilon, R), \tag{26}$$

где

$$B(\bar{x}_k, \varepsilon, R) = \frac{f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon}{R} + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{R^2},$$

$$B_1(\bar{x}_k, \varepsilon, R) = \frac{1}{\rho}\,(R\|\xi_k\|^2 + 2R\varepsilon\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon^2 + f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon),$$

$$B_2(\bar{x}_k, \varepsilon, R) = \varepsilon(4R\|\xi_k\|_1 + 2RmB^{1/2}(\bar{x}_k, \varepsilon, R) + m\varepsilon + 1).$$

Доказательство. Из определения точки x_s вытекает

$$f_0^\varepsilon(x_s) + R\varphi^\varepsilon(x_s) + \rho\,(\Omega(x_s) - d)^+ \leq f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) + R\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k), \tag{27}$$

где $\varphi^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|^2$. Учитывая (23), имеем

$$\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi(\bar{x}_k) = \|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}_k)\|^2 - \|f^+(\bar{x}_k)\|^2 \leq 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2. \tag{28}$$

Поэтому из (27) следует

$$R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2) \leq f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon + 2R\varepsilon\|\xi_k\|_1 + mR\varepsilon^2. \tag{29}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \bar{\varphi}$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty}\,(\nabla\varphi(x_k), x - x_k) \geq 0$, и, следовательно,

$$(\nabla\varphi(x_k), x - x_k) \geq -\frac{1}{R^2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ R > 1,\ \forall k). \tag{30}$$

В силу выпуклости функций $f_i(x)$ справедливо

$$(\nabla\varphi(x_k), x - x_k) = 2\sum_{i=1}^{m} f_i^+(x_k)(\nabla f_i(x_k), x - x_k)$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{m} \xi_i^k[f_i(x) - f_i(x_k)] = 2(\xi_k, f(x)) - 2\|\xi_k\|^2,$$

где ξ_i^k — i-я компонента вектора ξ_k $(i = 1, \ldots, m)$. Отсюда с учетом (30) получаем

$$(\xi_k, f(x_k)) - \|\xi_k\|^2 \geq -\frac{1}{2R^2} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{31}$$

Далее оценим

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 = \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 + \|\xi_k\|^2 - 2(\xi_k, f^{\varepsilon^+}(x_s))$$
$$\leq \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 + \|\xi_k\|^2 - 2(\xi_k, f^+(x_s)) + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1,$$

что вместе с (31) дает

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \leq \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 - \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{R^2}. \tag{32}$$

Применим в (32) оценку (29). Тогда

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \leq \frac{f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon}{R} + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{R^2},$$

т. е. имеет место соотношение (24).

Запишем неравенство (27) следующим образом:

$$\rho\,(\Omega(x_s) - d)^+ \leq R(\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) + f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) - f_0^\varepsilon(x_s).$$

Отсюда и из (28) следует

$$\rho\,(\Omega(x_s) - d)^+ \leq R(\|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2) + f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$\Omega(x_s) \leq d + \frac{R}{\rho}(\|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2) + \frac{f_0(\bar{x}_k) - \tilde{f} + 2\varepsilon}{\rho},$$

т. е. выполняется оценка (25).

Далее из (27) и (28) имеем

$$f_0^\varepsilon(x_s) - f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) \leq R(\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) \leq R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) + 2R\varepsilon\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon^2. \tag{33}$$

Так как $(f_i^{\varepsilon^+}(x_s) + \varepsilon)^2 \geq f_i^{+^2}(x_s)$, то $\|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 + 2\varepsilon\|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|_1 + m\varepsilon^2 \geq \|f^+(x_s)\|^2 = \varphi(x_s) \geq \bar{\varphi}$. Поэтому из (33) с учетом (24) получаем

$$f_0^\varepsilon(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R(\varphi(\bar{x}_k) - \bar{\varphi}) + 2\varepsilon R\|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|_1 + Rm\varepsilon^2 + 2\varepsilon R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon^2 + \varepsilon$$

$$\leq R\bar{\delta} + 2\varepsilon R\sum_{i=1}^{m}(\xi_i^k + \sqrt{B(\bar{x}_k, \varepsilon, R)}) + 2\varepsilon R\|\xi_k\|_1 + 2Rm\varepsilon^2 + \varepsilon$$

$$= R\bar{\delta} + \varepsilon(4R\|\xi_k\|_1 + 2Rm\sqrt{B(\bar{x}_k, \varepsilon, R)} + 2Rm\varepsilon + 1).$$

Этим доказана оценка (26).

Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть функция Лагранжа* $L_k(x;\lambda,\mu) = f_0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \mu(\Omega(x) - d)$ *для задачи* (21) *имеет седловую точку* $[\bar{x}_k; \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+$. *Тогда задача* (22) *разрешима для любых* $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d > 0$ *и* $\varepsilon \geq 0$.

Доказательство. Согласно (23)

$$|\varphi^\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^m (2\varepsilon f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2) \leq \sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 + 2m\varepsilon^2 = \varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Поэтому

$$F_d(x,r) = f_0(x) + R\varphi(x) + \rho(\Omega(x) - d)^+ \leq f_0(x) + R(2\varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2) + \rho(\Omega(x) - d)^+$$

$$= 2F_s(x) + f_0(x) - 2f_0^\varepsilon(x) + 2Rm\varepsilon^2 - \rho(\Omega(x) - d)^+ \leq 2F_s(x) - f_0(x) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2.$$

Оценим слагаемое $-f_0(x)$ с помощью неравенства (14). Получим

$$F_d(x,r) = 2F_s(x) - f_0(\bar{x}_k) + \bar{\lambda}_k(\varphi(x) - \varphi(x_{\bar{k}})) + \bar{\mu}_k(\Omega(x) - d) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2$$

$$\leq 2F_s(x) - f_0(\bar{x}_k) + \bar{\lambda}_k\varphi(x) + \bar{\mu}_k(\Omega(x) - d) + 2\varepsilon + 2Rm\varepsilon^2.$$

Положим $\tilde{r} = [R - \bar{\lambda}_k, \rho - \bar{\mu}_k]$, $\tilde{r} > 0$. Тогда из последнего неравенства следует

$$F_d(x,\tilde{r}) = f_0(x) + (R - \bar{\lambda}_k)\varphi(x) + (\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x) - d)^+ \leq 2F_s(x) - f_0(\bar{x}_k) + 2\varepsilon(1 + Rm\varepsilon).$$

Обозначим $M_s(x^0) = \{x \mid F_s(x) \leq F_s(x^0)\}$, где x^0 — произвольная фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$. Возьмем $x' \in M_s(x^0)$. Тогда

$$F_d(x',\tilde{r}) \leq 2F_s(x^0) - f_0(\bar{x}_k) + 2\varepsilon(1 + Rm\varepsilon).$$

В теореме 3 была доказана ограниченность множества $M_{rd} = \{x \mid F_d(x,r) \leq F_d(x^0,r)\}$ для $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$. Поэтому будет ограниченным и множество $M_{\tilde{r}d} = \{x \mid F_d(x,\tilde{r}) \leq C_2\}$ для $\tilde{r} > 0$, $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$, где $C_2 = C_2(x^0, r, d, \varepsilon) = 2F_s(x^0) - f_0(\bar{x}_k) + 2\varepsilon(1 + Rm\varepsilon)$. Так как $M_s(x^0) \subset M_{\tilde{r}d}$, то множество $M_s(x^0)$ ограничено, и, следовательно, существует точка $x_s = \arg\min\limits_x F_s(x) = \arg\min\{F_s(x) \mid x \in M_s(x^0)\}$.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия леммы 2,* $\bar{x}_k$ *и* x_s *— решения задач* (21) *и* (22) *соответственно,* $d \geq \Omega(x_{\bar{k}})$, $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$. *Справедливы соотношения*

$$\|f^+(x_s)\| \leq D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k), \tag{34}$$

где

$$D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) = \Big(\|f^+(\bar{x}_k)\|^2 + \frac{2\varepsilon}{R - \bar{\lambda}_k}(1 + R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2 R^2 m}{(R - \bar{\lambda}_k)^2}\Big)^{1/2} + \frac{\varepsilon R\sqrt{m}}{R - \bar{\lambda}_k};$$

$$\Omega(x_s) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\bar{\delta} + \frac{2\varepsilon}{\rho - \bar{\mu}_k}(1 + R\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + R\sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + Rm\varepsilon); \tag{35}$$

$$f_0(x_s) \leq f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta} + 2\varepsilon R(\|\xi_k\|_1 + \sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + m\varepsilon) + 2\varepsilon. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки x_s и условия $d \geq \Omega(\bar{x}_{\bar{k}})$ имеем

$$f_0^\varepsilon(x_s) + R\varphi^\varepsilon(x_s) + \rho(\Omega(x_s) - d)^+ \leq f_0^\varepsilon(\bar{x}_k) + R\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k).$$

Тогда

$$R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \varphi^\varepsilon(\bar{x}_k)) + \rho(\Omega(x_s) - d)^+ \leq f_0(\bar{x}_k) - f_0(x_s) + 2\varepsilon. \tag{37}$$

Из оценок (23) следует

$$\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) < \varphi(\bar{x}_k) + 2\varepsilon\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + m\varepsilon^2, \qquad \varphi^\varepsilon(x_s) > \varphi(x_s) - 2\varepsilon\|f^+(x_s)\|_1 - m\varepsilon^2,$$

т. е.

$$\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s) < \varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_s) + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + 2\varepsilon\|f^+(x_s)\|_1 + 2m\varepsilon^2. \tag{38}$$

Поэтому с учетом неравенства (14) из (37) получаем

$$R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \varphi^\varepsilon(\bar{x}_k)) + (\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x_s) - d)^+ \leq \bar{\lambda}_k(\varphi(x_s) - \varphi(\bar{x}_k)) + 2\varepsilon, \tag{39}$$

и далее из (38) —

$$(R - \bar{\lambda}_k)(\varphi(x_s) - \varphi(\bar{x}_k)) \leq 2\varepsilon + R(2\varepsilon\|f^+(x_s)\|_1 + 2\varepsilon\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + 2m\varepsilon^2),$$

т. е.

$$(R - \bar{\lambda}_k)(\|f^+(x_s)\|^2 - \|f^+(\bar{x}_k)\|^2) \leq 2\varepsilon(1 + R\sqrt{m}\|f^+(x_s)\| + R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon).$$

Отсюда

$$\Big(\sqrt{R - \bar{\lambda}_k}\,\|f^+(x_s)\| - \frac{\varepsilon R\sqrt{m}}{\sqrt{R - \bar{\lambda}_k}}\Big)^2 \leq (R - \bar{\lambda}_k)\|f^+(\bar{x}_k)\|^2 + 2\varepsilon(1 + R\|\xi_k\|_1 + Rm\varepsilon),$$

что после извлечения квадратного корня и деления на $\sqrt{R - \bar{\lambda}_k}$ приводит к оценке (34).

Далее оценим величину $(\Omega(x_s) - d)^+$. Из (39) и (38) имеем

$$(\rho - \bar{\mu}_k)(\Omega(x_s) - d)^+ \leq \bar{\lambda}_k(\varphi(x_s) - \varphi(\bar{x}_k)) - R(\varphi^\varepsilon(x_s) - \varphi^\varepsilon(\bar{x}_k)) + 2\varepsilon$$
$$\leq (R - \bar{\lambda}_k)(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_s)) + 2\varepsilon + 2\varepsilon R(\|f^+(x_s)\|_1 + \|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + m\varepsilon).$$

Так как $\varphi(\bar{x}_k) \leq \varphi(x_{\bar{k}}) \leq \bar{\varphi} + \delta$, то отсюда при $\rho > \bar{\mu}_k$ получаем

$$\Omega(x_s) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\delta + \frac{2\varepsilon}{\rho - \bar{\mu}_k}(1 + R\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + R\sqrt{m}\|f^+(x_s)\| + Rm\varepsilon)$$
$$\leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\delta + \frac{2\varepsilon}{\rho - \bar{\mu}_k}(1 + R\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + R\sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + Rm\varepsilon),$$

т. е. справедлива оценка (35).

Из неравенства (37) вытекает $f_0(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R(\varphi^\varepsilon(\bar{x}_k) - \varphi^\varepsilon(x_s)) + 2\varepsilon$. Отсюда с учетом (38) и (34) получаем оценку (36)

$$f_0(x_s) - f_0(\bar{x}_k) \leq R(\varphi(\bar{x}_k) - \varphi(x_s)) + 2\varepsilon R(\|f^+(\bar{x}_k)\|_1 + \|f^+(x_s)\|_1 + m\varepsilon) + 2\varepsilon$$
$$\leq R\bar{\delta} + 2\varepsilon R(\|\xi_k)\|_1 + \sqrt{m}\|f^+(x_s)\| + m\varepsilon) + 2\varepsilon$$
$$\leq R\bar{\delta} + 2\varepsilon R(\|\xi_k)\|_1 + \sqrt{m}D(\varepsilon, R, \bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) + m\varepsilon) + 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть в задаче* (22) $R > \bar{\lambda}_k$, $\rho > \bar{\mu}_k$, $d \geq \Omega(\bar{x}_k)$, $\varepsilon \to 0$. *Тогда любая предельная точка* $\tilde{x}$ *последовательности* $\{x_s\}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$f^+(\tilde{x}) \leq \xi_k, \qquad \Omega(\tilde{x}) \leq d + \frac{R - \bar{\lambda}_k}{\rho - \bar{\mu}_k}\bar{\delta}, \qquad f_0(\tilde{x}) \leq f_0(\bar{x}_k) + R\bar{\delta}.$$

Заключение

В работе продолжены исследования автора относительно возможности применения классических методов регуляризации некорректных экстремальных задач с целью построения методов оптимальной коррекции несобственных задач линейного и выпуклого программирования. Ранее предлагались подходы к коррекции НЗ ВП на основе стандартного метода невязки (см. [8]) и метода стабилизирующих функций Тихонова (см. [9]). В настоящей работе рассматриваются методы коррекции НЗ ВП, использующие идеологию метода квазирешений. Исходная задача ВП с возможно несовместной системой ограничений заменяется аппроксимирующей задачей, которая получается в результате минимизации некоторой функции штрафа как сложной функции от невязок ограничений. Такой подход обобщает естественные случаи коррекции вектора правых частей ограничений относительно минимума той или иной векторной нормы. Построенная задача подвергается регуляризации по методу квазирешений, что позволяет снять многие вопросы, связанные с существованием решений возникающих задач, в частности, в условиях приближенного характера информации о функциях исходной проблемы. Помимо общей конструкции функции внешнего штрафа особое внимание уделяется классическому варианту — квадратичной штрафной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
3. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
4. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
5. **Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.** Iterative regularization methods in nonlinear ill-posed problems. Berlin; N Y: W. de Gruyter, 2008. 194 p.
6. **Golub G. N., Hansen P. C., O'Leary D. P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 21, no. 1. P. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
7. **Renaut R. A., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 2. P. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
8. **Skarin V. D.** On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming // Discrete Optimization and Operations Research: 9 th Intern. Conf. (DOOR 2016): Proc. Vladivostok, 2016. P. 441–451. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
9. **Skarin V. D.** Correction of improper convex programming problems using regularization // Optimization and Applications. 8 th Intern. Conf. OPTIMA-2017. (Petrovac, Montenegro, Sept. 2017): Book abstr. Moscow, 2017. P. 132.

Поступила 15.07.2019
После доработки 3.10.2019
Принята к публикации 7.10.2019

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper Problems of Linear and Convex Programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.

2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
3. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]: vol. 1 2. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, 1056 p. ISBN: 978-5-94057-706-5 .
4. Bakushinsky A., Goncharsky A. *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Dordrecht: Springer, 1994. ISBN: 978-94-010-4447-9 . Original Russian text published in Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1989, 128 p.
5. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. *Iterative regularization methods in nonlinear ill-posed problems*. Berlin; N Y: de Gruyter, 2008, 194 p. ISBN: 978-3-11-020827-6 .
6. Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
7. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
8. Skarin V.D. On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming. In: Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. (eds.), *Discrete Optimization and Operations Research* (DOOR 2016), *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 9869, 2016, pp. 441–451. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
9. Skarin V.D. Correction of improper convex programming problems using regularization methods. In: *Book of abstr. 8 th Intern. Conf. "Optimization and Applications"*: OPTIMA-2017 (Petrovac, Montenegro, Oct. 2017), Moscow, 2017, p. 134.

Received July 15, 2019
Revised October 3, 2019
Accepted October 7, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-07-01243).

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. D. Skarin. On the application of the quasisolution method to the correction of improper convex programs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 189–200 .