ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 515.122+517.982

О РАСШИРЕНИИ ХЬЮИТТА И τ-РАСПОЛОЖЕННОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Осипов

В работе исследуется связь между расширениями типа расширений Хьюитта и пространствами строго τ-F-отображений. Получен критерий вещественной полноты пространства бэровских отображений класса α. Доказано, что пространство $B(X,G)$ бэровских отображений G-z-нормального пространства X в не компактное метризуемое сепарабельное пространство G является линделёфовым тогда и только тогда, когда X счетно.

Ключевые слова: вещественно полные пространства, слабая функциональная теснота, бэровское отображение, τ-расположенность, расширение Хьюитта.

A. V. Osipov. On the Hewitt realcompactification and τ-placedness of function spaces.

We study the relation between extensions of the Hewitt realcompactification type and spaces of strictly τ-F-functions. A criterion is obtained for the realcompleteness of the space of Baire functions of class α. It is proved that the space $B(X,G)$ of Baire functions from a G-z-normal space X to a noncompact metrizable separable space G is Lindelöf if and only if X is countable.

Keywords: realcomplete spaces, weak functional tightness, Baire function, τ-placedness, Hewitt realcompactification.

MSC: 54C35 54C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-177-183

Введение

Один из важных видов топологической полноты был введен Э. Хьюиттом и Л. Нахбином в [1]. Пространство X называется *вещественно полным*, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $\mathbb{R}^\tau$ для некоторого кардинального числа τ. В литературе вещественно полные пространства иногда называют Q-пространствами, или вещественно компактными пространствами (realcompact space), или R-полными пространствами, или пространствами Хьюитта — Нахбина [1–4].

Полным по Дьедонне называют пространство, полное относительно максимальной равномерной структуры, совместимой с его топологией. Полные по Дьедонне пространства характеризуются как гомеоморфные образы замкнутых подпространств произведений метрических пространств [3].

Кардинал τ называют *измеримым по Уламу*, если на множестве мощности τ существует максимальная центрированная система с пустым пересечением, пересечение любого счетного семейства которой не пусто.

В системе ZFC (Цермело — Френкеля) аксиом теории множеств можно считать, что измеримых кардиналов не существует. При этом предположении каждое полное по Дьедонне пространство вещественно полно. Обратное верно всегда.

Заметим, что пространство $C_p(X)$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X, с топологией поточечной сходимости вещественно полно в том и только том случае, если $C_p(X)$ полно по Дьедонне. Это следует из того, что число Суслина пространства $C_p(X)$ счетно [2; 5].

В работах [5–8] были исследованы связи между расширениями типа Хьюитта и пространствами строго τ-непрерывных функций.

Отображение $f : X \to Y$ называется *строго τ-непрерывным*, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \leq \tau$, найдется непрерывное отображение $g : X \to Y$, для которого $g|A = f|A$ (т. е. $f(x) = g(x)$ при всех $x \in A$) [5]. При $Y = \mathbb{R}$ пространство всех строго τ-непрерывных функций на пространстве X с топологией поточечной сходимости обозначают через ${}^{(\tau)}C_p(X)$ [8].

О п р е д е л е н и е 1. *Слабой функциональной теснотой* $t_Y(X)$ пространства X будем называть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждое строго τ-непрерывное отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

При $Y = \mathbb{R}$ получаем слабую функциональную тесноту $t_{\mathbb{R}}(X)$ пространства X [5].

Напомним, что $A \subset X$ есть множество типа G_τ в X, если существует семейство γ открытых в X множеств такое, что $A = \bigcap \gamma$ и $|\gamma| \leq \tau$.

Множество $A \subset X$ называют *τ-расположенным в X*, если для каждой точки $x \in X \setminus A$ найдется множество P типа G_τ в X такое, что $x \in P \subset X \setminus A$.

Числом Хьюитта — Нахбина пространства X называют кардинал $q(X) = \min\{\tau \colon X\ \tau\text{-расположено в } \beta X\} + \aleph_0$. Известно, что $q(X) = \aleph_0$ в том и только том случае, если пространство X вещественно полно [5].

А. В. Архангельский доказал, что для любого тихоновского пространства X выполняется равенство $t_{\mathbb{R}}(X) = q(C_p(X))$ [5, теорема II.4.16].

В работе [8] О. Г. Окунев определяет для каждых топологического пространства X и кардинального числа τ расширение, обобщающее понятие расширения Хьюитта νX.

О п р е д е л е н и е 2. *τ-расширением Хьюитта* пространства X называется пространство $\nu_\tau X = \{x \in \beta X\colon$ каждое множество типа G_τ в βX, которое содержит точку x, имеет непустое пересечение с $X\}$ в топологии подпространства βX.

Очевидно, что $\nu_{\aleph_0} X$ совпадает с расширением Хьюитта νX и $X \subseteq \nu_\tau X \subseteq \nu_\lambda X$ при $\lambda \leq \tau$. Ясно также, что $\nu_\tau X = X$, если $q(X) \leq \tau$.

О. Г. Окунев доказал, что для тихоновского пространства X пространства ${}^{(\tau)}C_p(X)$ и $\nu_\tau C_p(X)$ гомеоморфны [8, теорема 2].

В этой работе мы исследуем свойство τ-расположенности и число Хьюитта — Нахбина для широкого класса пространств отображений, включающего пространства $B_\alpha(X, Y)$ бэровских отображений класса $\alpha \in [0, \omega_1]$. В частности, мы получим критерий вещественной полноты и свойства линделёфовости для пространства $B(X)$ бэровских функций, определенных на тихоновском пространстве X.

Основные определения и обозначения. Все рассматриваемые в этой работе топологические пространства являются бесконечными и тихоновскими. Все пространства отображений подразумеваются наделенными топологией поточечной сходимости.

Для топологических пространств X и Y через Y^X будем обозначать множество $\{f : f : X \to Y\}$ всех отображений пространства X в пространство Y.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть X и Y — топологические пространства и $F(X, Y) \subseteq Y^X$. Отображение $f : X \to Y$ будем называть *строго* τ-F-отображением, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \leq \tau$, найдется отображение $g \in F(X, Y)$, для которого $g|A = f|A$.

Множество всех строго τ-F-отображений в пространстве Y^X будем обозначать через ${}^{(\tau)}F(X, Y)$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть X и Y — топологические пространства и $F(X, Y) \subseteq Y^X$. *Слабой функциональной теснотой* $t_{Y,F}(X)$ пространства X будем называть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждое строго τ-F-отображение f принадлежит $F(X, Y)$.

Основные обозначения можно найти в работах [3; 9; 10].

1. Основные результаты

Лемма 1.1. *Пусть X — топологическое пространство, Y — топологическое пространство с псевдохарактером, равным τ, и $F(X,Y) \subseteq Y^X$. Если $t_{Y,F}(X) \le \tau$, то пространство $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X.*

Доказательство. Пусть $g \in Y^X \setminus F(X,Y)$. Из условия $t_{Y,F}(X) \le \tau$ следует, что существует $A \subset X$ такое, что $|A| \le \tau$ и $g|A \ne f|A$ при всех $f \in F(X,Y)$. Рассмотрим отображение сужения $\pi : Y^X \to Y^A$, т. е. $\pi(h) = h|A$ для всех $h \in Y^X$.

Множество $Z = \pi(F(X,Y))$ τ-расположено в Y^A, так как $|A| \le \tau$ и Y имеет псевдохарактер, равный τ (все одноточечные подмножества Y^A имеют тип G_τ). Так как $\pi(g) = g|A \notin Z$ и $\{\pi(g)\}$ — множество типа G_τ в Y^A, то $P = \pi^{-1}(\pi(g))$ — множество типа G_τ в Y^X и $g \in P \subset Y^X \setminus F(X,Y)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть X и Y — топологические пространства и $F(X,Y) \subseteq Y^X$. Если $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X, то $t_{Y,F}(X) \le \tau$.*

Доказательство. Пусть $g \in {}^{(\tau)}F(X,Y)$ и P — любое множество типа G_τ в Y^X такое, что $g \in P$. Пусть $P = \bigcap\{W_\alpha : \alpha < \tau\}$, где W_α — открытое множество в Y^X для каждого $\alpha < \tau$. Так как $g \in W_\alpha$, то для каждого $\alpha < \tau$ существует базисная окрестность S_α точки g такая, что $g \in S_\alpha \subseteq W_\alpha$. Здесь

$$S_\alpha = \langle g, x_{1,\alpha}, \ldots, x_{n(\alpha),\alpha}, V_{1,\alpha}, \ldots, V_{n(\alpha),\alpha}\rangle :=$$

$$\{f \in Y^X \colon f(x_{i,\alpha}) \in V_{i,\alpha} \ \text{ для каждого } \ i = 1, \ldots, n(\alpha)\},$$

где $x_{i,\alpha} \in X$ и $V_{i,\alpha}$ — открытое множество в пространстве Y такое, что $g(x_{i,\alpha}) \in V_{i,\alpha}$ для $i = 1, \ldots, n(\alpha)$ и $n(\alpha) \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $g \in \bigcap_{\alpha<\tau} S_\alpha \subseteq P$.

Пусть $A = \bigcup_{\alpha<\tau}\{x_{1,\alpha}, \ldots, x_{n(\alpha),\alpha}\}$. Тогда $|A| \le \tau$ и $g \in \{f \in Y^X : f|A = g|A\} \subset P$.

Так как $g \in {}^{(\tau)}F(X,Y)$, существует $h \in F(X,Y)$ такое, что $h|A = g|A$. Тогда $h \in P$. Итак, $P \cap F(X,Y) \ne \varnothing$ для любого множества P типа G_τ в Y^X, содержащего g. Так как $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X, заключаем, что $g \in F(X,Y)$. Следовательно, $t_{Y,F}(X) \le \tau$.

Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и плотного подмножества $F(X,Y) \subseteq Y^X$ выполняется равенство $q(F(X,Y)) = t_{Y,F}(X)$.*

Доказательство. Положим $\tau = t_{Y,F}(X)$. По лемме 1.1 пространство $F(X,Y)$ τ-расположено в Y^X. Произведение любого числа вещественно полных пространств является вещественно полным [3, теорема 3.11.5]. Следовательно, вещественно полное пространство Y^X $\aleph_0$-расположено в $\beta(Y^X)$ [2]. Пространство $F(X,Y)$ τ-расположено в $\beta(Y^X)$ [5, предложение 4.9]. Значит, $q(F(X,Y)) \le t_{Y,F}(X)$.

Положим $\lambda = q(F(X,Y))$. Произведение любого числа пространств счетного характера является московским пространством, т. е. любое канонически замкнутое множество представимо в виде объединения G_δ-множеств [10, следствие 6.3.15]. Следовательно, Y^X — московское пространство и $F(X,Y)$ λ-расположено в Y^X [5, предложение II.4.13]. Применяя лемму 1.2, заключаем, что $t_{Y,F}(X) \le \lambda$.

Таким образом, $t_{Y,F}(X) \le q(F(X,Y))$ и, значит, $q(F(X,Y)) = t_{Y,F}(X)$.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и плотного подмножества $F(X,Y) \subseteq Y^X$ слабая функциональная теснота $t_{Y,F}(X)$ пространства X счетна в том и только том случае, когда пространство $F(X,Y)$ вещественно полно.*

Следующая теорема является обобщением теоремы Окунева, но по сути использует идею доказательства теоремы 2 из работы [8] для функционального пространства $C_p(X)$.

Теорема 1.2. *Для топологического пространства X, топологического пространства Y с весом не больше, чем τ и плотного подмножества $F(X,Y) \subseteq Y^X$ пространства ${}^{(\tau)}F(X,Y)$ и $\nu_\tau F(X,Y)$ гомеоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$^{(\tau)}F(X,Y) = \bigcap\{\pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A} \colon A \subset X,\ |A| \leq \tau\},$$

где $\pi_A : Y^X \to Y^A$ — проекция для каждого $A \subset X$. Заметим, что $w(\pi_A(F(X,Y)) \leq \tau$, $q(\pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A}) \leq \tau$ и $q({}^{(\tau)}F(X,Y)) \leq \tau$. Осталось доказать, что $F(X,Y)$ C-вложено в ${}^{(\tau)}F(X,Y)$. Пусть $g : F(X,Y) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Так как $F(X,Y)$ — плотное подмножество в Y^X и Y — пространство с весом, не превосходящем τ, мы можем применить факторизационную теорему [10, следствие 1.7.4]. Тогда найдутся множество $A \subset X$ с $|A| \leq \tau$ и непрерывная функция $\varphi : \pi_A(F(X,Y)) \to \mathbb{R}$ такие, что $g = \varphi\pi_A$. Очевидно, что отображение $p = \varphi\pi_A : \pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A} \to \mathbb{R}$ непрерывно, и так как ${}^{(\tau)}F(X,Y) \subset \pi_A(F(X,Y)) \times Y^{X\setminus A}$, то требуемое продолжение функции g построено.

Теорема доказана.

2. Приложение для бэровских отображений

Для топологических пространств X и Y определим классы бэровских отображений. Пусть $B_0(X,Y) := C(X,Y)$ — множество непрерывных отображений пространства X в Y. Множество $B_\alpha(X,Y)$ состоит из всех поточечных пределов сходящихся в пространстве Y^X последовательностей отображений классов $< \alpha$. $B(X,Y) := B_{\omega_1}(X,Y) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(X,Y)$ — пространство бэровских отображений. Если $Y = \mathbb{R}$, то $B_\alpha(X) := B_\alpha(X,\mathbb{R})$ и $B(X) := B_{\omega_1}(X,\mathbb{R})$.

Для пространства $B_\alpha(X,Y)$ бэровских отображений класса α определение строго τ-B_α-отображения имеет следующий вид.

О п р е д е л е н и е 5. Отображение $f : X \to Y$ будем называть *строго τ-бэровским класса α*, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \leq \tau$, найдется отображение $g : X \to Y$ бэровского класса α, для которого $g|A = f|A$.

О п р е д е л е н и е 6. *Слабой B_α-теснотой $t_{Y,B_\alpha}(X)$* пространства X будем называть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждое строго τ-бэровское отображение $f : X \to Y$ класса α является бэровским отображением класса α, т. е. $f \in B_\alpha(X,Y)$.

Следствием теоремы 1.1 является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и $\alpha \in [0,\omega_1]$ выполняется равенство $q(B_\alpha(X,Y)) = t_{Y,B_\alpha}(X)$.*

Следствие 2.1. *Для топологического пространства X, вещественно полного пространства Y со счетным характером и $\alpha \in [0,\omega_1]$ слабая B_α-теснота $t_{Y,B_\alpha}(X)$ пространства X счетна в том и только том случае, когда пространство $B_\alpha(X,Y)$ вещественно полно.*

В частности, при $Y = \mathbb{R}$ получаем такое следствие теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Для топологического пространства X и $\alpha \in [0, \omega_1]$ выполняется равенство $q(B_\alpha(X)) = t_{B_\alpha}(X)$.*

Следствием теоремы 1.2 для бэровских отображений является следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Для топологического пространства X, топологического пространства Y с весом не более чем τ и $\alpha \in [0, \omega_1]$ пространства ${}^{(\tau)}B_\alpha(X, Y)$ и $\nu_\tau B_\alpha(X, Y)$ гомеоморфны.*

Следствие 2.3. *Для топологического пространства X, $\alpha \in [0, \omega_1]$ и $\tau \geq \aleph_0$ пространства ${}^{(\tau)}B_\alpha(X)$ и $\nu_\tau B_\alpha(X)$ гомеоморфны.*

О п р е д е л е н и е 7. Пусть X и Y — топологические пространства. Пространство X будем называть *Y-z-нормальным*, если X — T_1-пространство и для любых дизъюнктного семейства $F_1, \ldots, F_k$ нуль-множеств пространства X и точек $y_1, \ldots, y_k$ пространства Y существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(F_i) = y_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$.

Лемма 2.1. *Пусть X является Y-z-нормальным для некоторого топологического пространства Y, F — нуль-множество пространства X и $a, b \in Y$. Тогда отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(F) = \{a\}$ и $f(X \setminus F) = \{b\}$, является бэровским отображением первого класса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как F — нуль-множество пространства X, множество $X \setminus F$ функционально открыто в X и $X \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, где S_j — нуль-множества пространства X и $S_j \subset S_{j+1}$ для $j \in \omega$. Так как X — Y-z-нормальное пространство, для любого $j \in \omega$ существует $f_j \in C_p(X, Y)$ такое, что $f_j(F) = \{a\}$ и $f_j(S_j) = \{b\}$. Осталось заметить, что отображение $f = \lim\limits_{j \to \infty} f_j$ является бэровским отображением первого класса и $f(F) = \{a\}$, $f(X \setminus F) = \{b\}$.

Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Пусть Y — топологическое пространство счетного псевдохарактера и X — Y-z-нормальное пространство. Тогда ${}^{(\aleph_0)}B_2(X, Y) = Y^X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in Y^X$, $A = \{a_i : i \in \omega\} \subset X$ и $y \in Y$. Для каждой точки $a \in A$ зафиксируем множество $Z_a := f^{-1}(f(a))$. Так как Y — тихоновское пространство со счетным псевдохарактером, множество $\{f(a)\}$ — нуль-множество в пространстве Y. Следовательно, Z_a — нуль-множество в пространстве X.

Рассмотрим отображения $f_n : X \to Y$ такие, что $f_n | Z_a = f(a)$ и

$$f_n\Big(X \setminus \bigcup_{a \in \{a_1, \ldots, a_n\}} Z_a\Big) \subseteq \{y\} \text{ для всех } a \in \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ и каждого } n \in \omega.$$

По лемме 2.1 отображение $f_n \in B_1(X, Y)$ для каждого $n \in \omega$. Рассмотрим отображение $g := \lim f_n$ при $n \to \infty$. Отображение g определено во всех точках X, и, значит, $g \in B_2(X, Y)$. В силу произвольности отображения f и множества A получаем, что $Y^X \subseteq {}^{(\aleph_0)}B_2(X, Y)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.4. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда ${}^{(\aleph_0)}B_2(X) = \mathbb{R}^X$.*

Таким образом, вещественная полнота пространства $B_\alpha(X)$ ($\alpha \geq 2$) влечет (теоремы 1.1 и 1.2) вырожденность пространства X, выражающуюся в равенстве $B_\alpha(X) = \mathbb{R}^X$.

Напомним, что топологическое пространство X называется *линделёфовым*, если из любого открытого покрытия пространства X можно выделить счетное подпокрытие. Хорошо известно, что любое линделёфовое пространство вещественно полно [3, теорема 3.11.12] и нормально [3, теорема 3.8.2].

Теорема 2.4. *Пусть X — G-z-нормальное пространство, где G — некомпактное топологическое пространство со счетной базой и $\alpha \in [2, \omega_1]$. Тогда линделёфовость пространства $B_\alpha(X, G)$ эквивалентна счетности пространства X.*

Доказательство. Предположим, что $B_\alpha(X, G)$ — линделёфово пространство. Тогда $B_\alpha(X, G)$ вещественно полно и по теореме 2.3 $B_\alpha(X, G) = G^X$. Отсюда следует, что пространство G^X нормально. Так как G — некомпактное пространство, то G^X — нормальное пространство тогда и только тогда, когда X счетно [11].

Если X счетно, то G^X — пространство со счетной базой (сепарабельное метризуемое), а значит, наследственно линделёфово. Следовательно, пространство $B_\alpha(X, G)$ линделёфово.

Теорема доказана.

В качестве следствия получаем результат, доказанный А. В. Пестряковым в работе [12].

Следствие 2.5. *Пусть X — тихоновское пространство и $\alpha \in [2, \omega_1]$. Тогда линделёфовость пространства $B_\alpha(X)$ эквивалентна счетности пространства X.*

В частности, линделёфовость пространства бэровских функций на тихоновском пространстве X эквивалентна счетности пространства X.

Вопрос 1. Существует ли некомпактное топологическое пространство со счетной базой G и несчетное G-z-нормальное пространство X такие, что $B_1(X, G)$ линделёфово?

Ослаблением вопроса 1 может быть следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли некомпактное топологическое пространство со счетной базой G и несчетное G-z-нормальное пространство X такие, что $B_1(X, G)$ нормально и вещественно полно?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hewitt E.** Rings of real-valued continuous functions, I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64, no. 1. P. 45–99.
2. **Архангельский А.В., Пономарев В.И.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.
3. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
4. **Nachbin L.** Topological vector spaces of continuous functions // Proc. Nat. Acad. Sci. (USA). 1954. Vol. 40, no. 6. P. 471–474.
5. **Архангельский А.В.** Топологические пространства функций. М: Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
6. **Архангельский А.В.** Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, no. 6 (204). С. 29–84.
7. **Arhangel'skii A.V.** Functional tightness, q-spaces and τ-embeddings // Comment. Math. Univ. Carol. 1983. Vol. 24, no. 1. P. 105–120.
8. **Окунев О.Г.** О пространствах функций в топологии поточечной сходимости: расширение Хьюитта и τ-непрерывные функции // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Математика. Механика. 1985. № 4. С. 78–80.
9. **Куратовский К.** Топология: в 2-х томах. Т.1. М.: Мир, 1966. 591 с.
10. **Arhangel'skii A., Tkachenko M.** Topological group and related structure. Paris: Atlantis Press; Hackensack, NJ: World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2008. 781 p. (Atlantis Studies Math.; vol. 1).
11. **Stone A.H.** Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 54. P. 977–982.
12. **Пестряков А.В.** Бэровские функции и пространства бэровских функций: дис ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987. 74 с.

Поступила 3.06.2019
После доработки 12.08.2019
Принята к публикации 12.09.2019

Осипов Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет;
Уральский государственный экономический университет
г. Екатеринбург
e-mail: OAB@list.ru

REFERENCES

1. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 64, no. 1, pp. 45–99. doi: 10.2307/1990558 .
2. Archangel'skii A.V., Ponomariov V.I. *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises.* N Y: Springer, 1984, 416 p. ISBN: 978-90-277-1355-1 . Original Russian text published in Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 424 p.
3. Engelking R. *General Topology.* Sigma series in pure mathematics, vol. 6, Berlin: Heldermann Verlag, 1989, 535 p. ISBN: 3885380064 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
4. Nachbin L. Topological vector spaces of continuous functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 1954, vol. 40, no. 6, pp. 471–474. doi: 10.1073/pnas.40.6.471 .
5. Arkhangel'skii A.V. *Topological function spaces.* Math. its Appl., vol. 78, Dordrecht: Kluwer, 1992, 205 p. ISBN: 0-7923-1531-6 . Original Russian text published in Arkhangel'skii A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsii*, Moscow: MGU Publ., 1989, 222 p.
6. Arkhangel'skii A.V. Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants. *Russian Math. Surveys*, 1978, vol. 33, no. 6, pp. 33–96. doi: 10.1070/RM1978v033n06ABEH003884 .
7. Arhangel'skii A.V. Functional tightness, q-spaces and τ-embeddings. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 1983, vol. 24, no. 1, pp. 105–120.
8. Okunev O.G. On function spaces in the topology of pointwise convergence: Hewitt extension and τ-continuous functions. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. I*, 1985, no. 4, pp. 78–80.
9. Kuratowski K. *Topology. Vol. I.* N Y; London: Acad. Press, 1966, 560 p. ISBN: 978-0-12-429201-7 . Translated to Russian under the title *Topologiya.* T. 1, Moscow: Mir Publ., 1966, 594 p.
10. Arhangel'skii A., Tkachenko M. *Topological group and related structure.* Ser. Atlantis Studies in Math., vol. 1, Paris: Atlantis Press, 2008, 781 p. doi: 10.2991/978-94-91216-35-0 .
11. Stone A.H. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 54, pp. 977–982. doi: 10.1090/S0002-9904-1948-09118-2 .
12. Pestriakov A.V. *Berovskie funktsii i prostranstva berovskikh funktsii* (Baire functions and spaces of Baire functions). Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation. Sverdlovsk: Ural State of University Publ., 1987, 74 p.

Received June 3, 2019
Revised August 12, 2019
Accepted September 5, 2019

Alexander Vladimirovich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Ural State University of Economicis, Yekaterinburg, 620144 Russia, e-mail: OAB@list.ru .

Cite this article as: A. V. Osipov. On the Hewitt realcompactification and τ-placedness of function spaces, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 177-183 .