ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. И. Новиков

Статья посвящена задаче экстремальной интерполяции функций с минимальным значением равномерной нормы линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}f(t) = f''(t) + (1/t)f'(t)$ на классе интерполируемых значений этих функций в точках равномерной сетки $\{kh : k = 1, 2, \dots, N\}$ с шагом h $(h > 0)$ при достаточно большом, но конечном числе узлов сетки N. Класс интерполируемых данных определяется разностным аналогом дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Этот разностный оператор выбирается из условия зануления сужений функций из ядра дифференциального оператора на равномерную сетку. Основным результатом статьи является двусторонняя оценка константы типа Ю. Н. Субботина экстремальной интерполяции с правильным порядком относительно шага h. Задачу нахождения этой константы можно также интерпретировать как обобщенную интерполяционную задачу Фавара, рассматриваемую на классе интерполируемых данных. С помощью этого одномерного результата в настоящей работе найдена оценка сверху в аналогичной задаче для равномерной нормы оператора Лапласа функции двух переменных при трансфинитной интерполяции в конечном числе концентрических окружностей с общим центром в начале координат.

Ключевые слова: интерполяция, дифференциальный оператор, разностный оператор, оператор Лапласа.

S. I. Novikov. Extremal function interpolation for a second-order linear differential operator.

The paper is devoted to the problem of extremal interpolation of functions with the minimum value of the uniform norm of the linear differential operator $\mathcal{L}f(t) = f''(t) + (1/t)f'(t)$ on a class of interpolated values of these functions at the points of a uniform grid $\{kh : k = 1, 2, \dots, N\}$ with step h $(h > 0)$ for a rather large but finite number N of knots of the grid. The class of interpolation data is defined by a difference analog of the differential operator $\mathcal{L}$. The difference operator is determined by the condition of vanishing of the restrictions of functions from the kernel of the differential operator to the uniform grid. The main result of the paper is a two-sided estimate for an extremal interpolation constant of Subbotin's type with a correct order with respect to the step h. The problem of finding this constant can also be interpreted as a generalized interpolation problem of Favard's type considered on the described class of interpolation data. We use this one-dimensional result to derive an upper bound in a similar problem for the uniform norm of the Laplace operator of a function of two variables in the case of transfinite interpolation at a finite number of concentric circles centered at the origin.

Keywords: interpolation, differential operator, difference operator, Laplace operator.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-164-176

1. Введение

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы N $(1 \le N < +\infty)$ равноотстоящих друг от друга концентрических окружностей с общим центром в начале координат и радиусами $R_k = kh$ $(k = 1, 2, \dots, N)$,

$$S_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le N^2h^2\}$$

— круг радиуса $R_N = Nh$ с центром в начале координат.

Через $C^1(S_N)$ обозначим пространство функций, имеющих непрерывные частные производные первого порядка в круге S_N. Под $L_\infty(S_N)$ будем, как обычно, понимать класс измеримых существенно ограниченных функций двух переменных $f(x, y)$, определенных в этом круге, с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,y)\in S_N} |f(x, y)|$, и пусть $\boldsymbol{\Delta} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Пусть функция двух переменных $u(x, y)$ принимает одно и то же значение z_k во всех точках k-й окружности, т. е. $u(x, y)\Big|_{x^2+y^2=R_k^2} = z_k$.

Определим класс интерполирующих функций

$$F_N = \Big\{u \in C^1(S_N)\colon \mathbf{\Delta} u \in L_\infty(S_N),\ u(x, y)\Big|_{x^2+y^2=R_k^2} = z_k,\ k = 1, 2. \dots, N\Big\}.$$

Заметим, что интерполяцию непрерывных данных, заданных на кривых (или гиперповерхностях в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$), часто называют *трансфинитной интерполяцией* (см., например, [1–3] и ссылки в этих работах). *Трансфинитная интерполяция* используется в геометрическом моделировании и численном анализе, например, для построения поверхностей по данным на линиях уровня, при генерировании сеток и для визуализации объектов по результатам сканирования. Сами интерполянты при трансфинитной интерполяции иногда называются blending функциями.

Пусть $Y_N = \{z\colon z = \{z_k\}_{k=1}^N,\ \|z\|_{l_\infty^N} \leq 1\}$, где $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_k|\colon k = 1, 2, \dots, N\}$ — класс интерполируемых данных.

Задача состоит в исследовании величины

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{\Delta}) = \sup_{z \in Y_N} \inf_{u \in F_N} \|\mathbf{\Delta} u\|_\infty. \tag{1.1}$$

Решить задачу (1.1) — значит найти норму оператора Лапласа, примененного к "наилучшей" интерполирующей функции для "наихудшей" интерполируемой последовательности из заданного класса.

Для фиксированной последовательности $z = \{z_k\}$ задача минимизации нормы производной на классе интерполирующих функций известна как интерполяционная задача Фавара (см., например, [4]). Поэтому задачу нахождения величины (1.1) можно интерпретировать как обобщенную (в том числе, в смысле вида интерполяции) интерполяционную задачу Фавара, рассматриваемую для всего определенного выше класса интерполируемых данных.

Данные, заданные на окружностях в $\mathbb{R}^2$, естественно интерполировать радиальными функциями, т. е. такими что $u(x, y) = u(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а оператор Лапласа записывать в полярных координатах (r, φ) (см., например, [5, п. 222]). Поскольку значения радиальных функций не зависят от полярного угла φ, то $u''_{\varphi\varphi} \equiv 0$, и оператор Лапласа превращается в обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathbf{\Delta} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) = u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r.$$

Таким образом, на радиальных функциях задача (1.1) сводится к экстремальной задаче интерполяции для функций одной переменной. Для ее исследования рассмотрим задачу экстремальной функциональной интерполяции для этого линейного дифференциального оператора, которая по мнению автора имеет также и самостоятельное значение.

Пусть $D = d/dt$ — оператор дифференцирования;

$$\mathcal{L}(D)f(t) \stackrel{\text{def}}{=} D^2 f(t) + \frac{1}{t}\ Df(t) = \Big(D + \frac{1}{t}\Big)Df(t) \quad (t > 0)$$

— линейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами; $\operatorname{Ker}\mathcal{L}(D) = \operatorname{span}\{1, \ln t\}$ — ядро оператора $\mathcal{L}(D)$.

Пусть

$h > 0$, $\delta_{h,N} = \{kh : k = 1, 2, \dots, N\}$ — сетка, состоящая из N точек;

$z = \{z_k\}_{k=1}^N$ — конечная последовательность вещественных чисел, которые мы интерполируем в узлах сетки $\delta_{h,N}$;

$\Delta_{\mathcal{L}}$ — разностный оператор второго порядка со старшим коэффициентом, равным единице, зануляющий сужения функций из $\operatorname{Ker}\mathcal{L}(D)$ на сетку $\delta_{h,N}$. Он имеет вид

$$\Delta_{\mathcal{L}}(z_k) = z_{k+2} - \left(\frac{\ln(\dfrac{k+2}{k})}{\ln(\dfrac{k+1}{k})}\right) z_{k+1} + \left(\frac{\ln(\dfrac{k+2}{k+1})}{\ln(\dfrac{k+1}{k})}\right) z_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-2).$$

Для натурального $N \geq 3$ зададим класс интерполируемых данных

$$Y_N(\Delta_{\mathcal{L}}) = \{z \colon z = \{z_k\}_{k=1}^N,\ \|\Delta_{\mathcal{L}}(z)\|_{l_\infty^N} \leq 1\},$$

где $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_k| \colon k = 1, 2, \dots, N\}$, и определим класс интерполирующих функций

$$F_N^h(\mathcal{L}, z) = \Big\{f \colon f' \in AC[h, hN],\ \mathcal{L}(D)f \in L_\infty[h, hN], f(kh) = z_k,\ k = 1, 2, \dots, N\Big\},$$

где через $AC[a,b]$ обозначено множество функций, абсолютно непрерывных на $[a,b]$; $L_\infty[a,b]$ — класс измеримых существенно ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с обычной нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Определим величину

$$\mathcal{A}_N(\mathcal{L}) = \sup_{z \in Y_N(\Delta_{\mathcal{L}})} \inf_{f \in F_N^h(\mathcal{L}, z)} \|\mathcal{L}(D)f\|_{L_\infty[h,hN]}, \tag{1.2}$$

которую мы будем называть *константой экстремальной интерполяции*. Задачу нахождения величины (1.2) будем называть *задачей экстремальной функциональной интерполяции* для дифференциального оператора $\mathcal{L}(D)$.

Задача экстремальной функциональной интерполяции в равномерной метрике для оператора n-й производной впервые точно была решена Ю. Н. Субботиным в 1965 году [6], позже А. Шарма и Дж. Цимбаларио [7] получили ее решение для формально самосопряженного линейного дифференциального оператора с постоянными вещественными коэффициентами, а В. Т. Шевалдин [8] — для произвольного линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Подробный обзор результатов, относящихся к задачам экстремальной интерполяции в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $(1 \leq p \leq \infty)$ и их приложениям, можно найти в недавней работе (Ю. Н. Субботин, С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225), которая содержит также подробную библиографию по этим задачам. В работах [6–8] интерполирование осуществлялось в точках равномерной сетки на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. Подобные задачи экстремальной функциональной интерполяции на полуоси и конечном отрезке, а также для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами ранее не рассматривались.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Существует число $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $N > N_0$ и $h > 0$ справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{h^2} \leq \mathcal{A}_N(\mathcal{L}) \leq \frac{C}{h^2}\ ,$$

где $C \simeq 2.540856\dots$.

Из теоремы для задачи (1.1) вытекает оценка сверху:

Следствие. *Существует число $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $N > N_0$ и $h > 0$ справедлива оценка*

$$\mathcal{A}_N(\boldsymbol{\Delta}) \leq \frac{4C}{h^2}.$$

где $C \simeq 2.540856\dots$.

В разд. 2 мы находим интегральное представление разностного оператора $\Delta_{\mathcal{L}}$ через дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D)$, в разд. 3 устанавливаем необходимые для получения основного результата свойства вспомогательных функций, в разд. 4 доказываем основные результаты.

2. Интегральное представление разностного оператора через дифференциальный оператор

Для того чтобы вывести представление, связывающее линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D)$ с его разностным аналогом $\Delta_{\mathcal{L}}$, нам потребуется формула Коши — Грина

$$f(t) = a_1 + a_2 \ln t + \int\limits_{t_0}^{t} \tau\Big(\ln\frac{t}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

в которой a_1, a_2 — любые вещественные числа, $t > t_0 > 0$. Представление (2.1) — результат применения метода вариации постоянных Лагранжа для решения дифференциального уравнения $\mathcal{L}(D)f(t) = u(t)$. Заметим, что интегральный оператор в представлении (2.1) не является оператором свертки в отличие от аналогичной формулы для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Лемма 1. *Пусть* $f \in F_N^h(\mathcal{L}, z)$ *для фиксированной последовательности* $z = \{z_j\}_{j=1}^N$ *и* $z_j = f(jh)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. *Тогда имеет место следующее равенство*:

$$\Delta_{\mathcal{L}}(z_k) = \left(\int\limits_{kh}^{(k+1)h} t\Big(\ln\frac{t}{kh}\Big)\mathcal{L}(D)f(t)dt\right)\left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right) + \int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} t\ \ln\Big(\frac{(k+2)h}{t}\Big)\mathcal{L}(D)f(t)dt,$$

где $k = 1, 2, \ldots, N-2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись формулой (2.1), представим $f(t)$ в виде суммы двух функций $f(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где $\varphi(t) = a_1 + a_2 \ln t$ и

$$\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \tau\Big(\ln\frac{kh}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau.$$

Тогда $\Delta_{\mathcal{L}}(z_k) = \Delta_{\mathcal{L}}(\varphi(kh)) + \Delta_{\mathcal{L}}(\psi(kh))$, и в силу выбора разностного оператора имеем

$$\Delta_{\mathcal{L}}(\varphi(kh)) = a_1\Delta_{\mathcal{L}}(1) + a_2\Delta_{\mathcal{L}}(\ln kh) = 0.$$

Далее, $\Delta_{\mathcal{L}}(\psi(kh)) = Q_1 + Q_2$ и

$$Q_1 = \int\limits_{t_0}^{kh} \tau\Big(\ln\frac{(k+2)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau - \left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\Big(\ln\frac{(k+1)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau$$

$$+ \left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\Big(\ln\frac{kh}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau = v_1\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\ \mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau - v_2\int\limits_{t_0}^{kh} \tau\ln\tau\ \mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau = 0,$$

поскольку в силу построения разностного оператора

$$v_1 = \ln(k+2)h - \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\ \ln(k+1)h + \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\ \ln kh = 0,$$

$$v_2 = 1 - \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)} + \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big)} = 0;$$

$$Q_2 = \int\limits_{kh}^{(k+2)h} \tau\Big(\ln\frac{(k+2)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau - \left(\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)\int\limits_{kh}^{(k+1)h} \tau\Big(\ln\frac{(k+1)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau$$

$$= \int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} \tau\Big(\ln\frac{(k+2)h}{\tau}\Big)\mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau + \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \tau\ V_k(\tau)\ \mathcal{L}(D)f(\tau)d\tau;$$

здесь

$$V_k(\tau) = \ln\frac{(k+2)h}{\tau} - \frac{\ln\dfrac{k+2}{k}}{\ln\dfrac{k+1}{k}}\ \ln\frac{(k+1)h}{\tau}$$

$$= \Big(\ln\frac{k+1}{k}\Big)^{-1}\Big(\ln\frac{\tau}{h}\ \ln\frac{k+2}{k+1} - \ln k\ \ln\frac{k+2}{k+1}\Big) = \frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\ \ln\frac{\tau}{kh}\ .$$

Лемма 1 доказана.

3. Вспомогательные функции и их свойства

Для доказательства основных результатов нам потребуются свойства некоторых конкретных функций.

Лемма 2. *Функция*

$$G(x) = 2x - (2x+1)\ \frac{\ln\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)}$$

монотонно возрастает на полуоси $[1, +\infty)$.

Доказательство. Вычислив производную функции $G(x)$, имеем

$$G'(x) = \frac{H(x)}{x(x+1)(x+2)\ln^2\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}, \tag{3.1}$$

где

$$H(x) = (2x^3+6x^2+4x)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} + (2x+1)\left(x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - (x+2)\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)\right).$$

Знаменатель в (3.1) положителен, поэтому достаточно убедиться в том, что на полуоси $[1, +\infty)$ функция $H(x)$ также положительна.

Поскольку $\ln\dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)} > 0$ и на положительной полуоси имеет место неравенство $2x^3+6x^2+4x > 2x^3+5x^2+2x = x(x+2)(2x+1)$, то

$$H(x) > x(x+2)(2x+1)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)}$$

$$+ (2x+1)\left(x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - (x+2)\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)\right) = (2x+1)Q(x),$$

где

$$Q(x) = (x^2+2x)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} + x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - (x+2)\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big).$$

Для оценки функции $Q(x)$ воспользуемся следующими тремя известными неравенствами:

$$\ln a - \ln b > \frac{2(a-b)}{a+b}, \quad 0 < b < a, \tag{3.2}$$

$$\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) > \frac{2}{2x+1}, \tag{3.3}$$

$$\ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\ , \quad 0 < t < 1,$$

первые два из которых доказаны в монографии [9, p. 273], а третье представляет собой известное свойство частичных сумм ряда Тейлора для функции $\ln(1+t)$.

В неравенстве (3.2) полагаем $a = (x+1)/x$, $b = (x+2)/(x+1)$ и после выполнения несложных преобразований получаем

$$\ln\frac{(x+1)^2}{x(x+2)} > \frac{2}{2x^2+4x+1}, \tag{3.4}$$

а в третьем неравенстве полагаем $t = 1/(x+1)$ и тогда

$$\ln\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big) < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3}. \tag{3.5}$$

Теперь применяем неравенства (3.3)–(3.5) к логарифмическим функциям, входящим в выражение функции $Q(x)$. В результате имеем

$$Q(x) > \frac{4(x^2+2x)}{(2x+1)(2x^2+4x+1)} + \frac{2x}{2x^2+4x+1} - 2\Big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3}\Big)$$

$$= \frac{6x^4+16x^3+4x^2-9x-5}{3(2x+1)(x+1)^3(2x^2+4x+1)}.$$

Знаменатель этой дробно-рациональной функции положителен при неотрицательных x. Исследуем ее числитель

$$P_4(x) = 6x^4+16x^3+4x^2-9x-5.$$

Согласно теореме Декарта (см., например, [10, с. 255]) количество положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно числу перемен знака в наборе его коэффициентов или меньше этого числа на четное число. Многочлен $P_4(x)$ имеет одну перемену знака в наборе его коэффициентов и $P_4(0) < 0$, $P_4(1) > 0$, поэтому единственный положительный корень этого многочлена лежит на интервале $(0,1)$, а на $[1,+\infty)$ многочлен $P_4(x)$ положителен. Следовательно, $Q(x) > 0$ на $[1,+\infty)$, поэтому $H(x) > 0$ и функция $G(x)$ монотонно возрастает на $[1,+\infty)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функция*

$$\Phi(x) = \frac{\ln\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{x+1}{x}\Big)}$$

монотонно возрастает при $x > 0$.

Доказательство. Вычислив производную функции $\Phi(x)$, получим

$$\Phi'(x) = \frac{q(x)}{x(x+1)(x+2)\ln^2\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}\ ,$$

где $q(x) = (x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x$.

Достаточно убедиться в том, что $q(x) > 0$ при положительных x. Заметим, что функция $q(x)$ является конечной разностью второго порядка функции $t\ln t$ по узлам $\{x, x+1, x+2\}$, а потому (см., например, [11, с. 46]) имеет место равенство

$$q(x) = C(t\ln t)''|_{t=\xi} = \frac{C}{\xi}$$

для некоторой положительной константы C в некоторой точке $\xi \in (x, x+2)$. Поэтому $q(x) > 0$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Функция*

$$v(x) = \frac{1}{2}\Big[(x+1)^2\ln\Big(\frac{x+1}{x}\Big) - 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2\ln\Big(\frac{2x+1}{2x}\Big) - \frac{1}{4}\Big]$$

монотонно убывает при $x > 0$.

Доказательство. Вычислив первую и вторую производные функции $v(x)$, получим

$$v'(x) = (x+1)\ln\Big(\frac{x+1}{x}\Big) - 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(\frac{2x+1}{2x}\Big) - \frac{1}{4x},$$
$$v''(x) = \frac{1}{4x^2} - \ln\Big(1+\frac{1}{4x(x+1)}\Big).$$

Воспользовавшись известным неравенством $\ln(1+\tau) \le \tau$ $(\tau \ge 0)$ при $\tau = (4x^2+4x)^{-1}$, имеем

$$v''(x) \ge \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x^2+4x} = \frac{1}{4x^2(x+1)} > 0$$

при положительных x. Отсюда следует, что функция $v'(x)$ возрастает на $[1, +\infty)$. Кроме того, нетрудно проверить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} v'(x) = 0$. Таким образом, $v'(x)$ является возрастающей функцией и стремится к нулю при $x \to +\infty$, следовательно, $v'(x) < 0$, т. е. функция $v(x)$ убывает при $x > 0$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Функция*

$$g(x) = \int\limits_0^{1/2}(x+t+1)\ln\Big(\frac{x+2}{x+1+t}\Big)dt - \int\limits_{1/2}^{1}(x+t+1)\ \ln\Big(\frac{x+2}{x+1+t}\Big)dt$$

возрастает при $x > 0$.

Доказательство. Преобразуем интегралы с помощью теоремы о среднем. В результате получаем

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big[(x+\xi+1)\ln\Big(\frac{x+2}{x+1+\xi}\Big) - (x+\eta+1)\ln\Big(\frac{x+2}{x+1+\eta}\Big)\Big],$$

где $0 \le \xi \le 1/2,\ 1/2 \le \eta \le 1$.

Теперь дифференцируем функцию $g(x)$ и после выполнения элементарных преобразований имеем

$$g'(x) = \frac{1}{2}\Big[\ln(x+\eta+1) - \ln(x+\xi+1) - \frac{\eta-\xi}{x+2}\Big].$$

Разность логарифмов в правой части этого выражения оценим с помощью неравенства (3.2), полагая в нем $a = x+\eta+1$, $b = x+\xi+1$. В результате получаем

$$g'(x) > \frac{(\eta-\xi)(2-\xi-\eta)}{2(x+2)(2x+2+\xi+\eta)}.$$

Знаменатель дробно-рациональной функции в правой части этого неравенства положителен, а поскольку $0 \le \xi \le 1/2$, $1/2 \le \eta \le 1$, то положителен и числитель. Следовательно, $g'(x) > 0$, т. е. функция $g(x)$ возрастает на положительной полуоси.

Лемма 5 доказана.

4. Доказательства основных результатов

Переходим непосредственно к доказательству основной теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о оценки снизу. Поскольку $\ln\dfrac{t}{kh} \ge 0$ на промежутке $[kh, (k+1)h]$ и $\ln\dfrac{(k+2)h}{t} \ge 0$ на промежутке $[(k+1)h, (k+2)h]$, то, переходя к модулям в лемме 1, имеем

$$|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)| \le \|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \left[\left(\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right) \int\limits_{kh}^{(k+1)h} t\Big(\ln\frac{t}{kh}\Big)dt + \int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} t\Big(\ln\frac{(k+2)h}{t}\Big)dt\right]. \qquad (4.1)$$

Непосредственными вычислениями получим

$$\int\limits_{kh}^{(k+1)h} t\Big(\ln\frac{t}{kh}\Big)dt = \frac{h^2}{2}\Big[(k+1)^2\Big(\ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{2}\Big) + \frac{k^2}{2}\Big],$$

$$\int\limits_{(k+1)h}^{(k+2)h} t\Big(\ln\frac{(k+2)h}{t}\Big)dt = \frac{h^2}{2}\Big[-(k+1)^2\Big(\ln\frac{k+2}{k+1} + \frac{1}{2}\Big) + \frac{(k+2)^2}{2}\Big].$$

Теперь подставим данные выражения в правую часть (4.1) и после выполнения элементарных преобразований выражение в квадратных скобках в (4.1) запишем в виде

$$\frac{h^2}{4}\left(2k+3 - (2k+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right).$$

Тем самым из (4.1) получаем, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N-2$ справедливо неравенство

$$|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)| \le \frac{h^2}{4}\,\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \left(2k+3 - (2k+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right)$$

$$\le \frac{h^2}{4}\,\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \sup_{x\in[1,+\infty)} \left(2x+3 - (2x+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}\right),$$

в котором правая часть не зависит ни от k, ни от N. Отсюда

$$\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \geq \frac{4}{h^2}\,|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)|\,\left[3+\sup_{x\in[1,+\infty)}\left(2x-(2x+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}\right)\right]^{-1}. \tag{4.2}$$

Вычислим точную верхнюю грань в правой части (4.2). Согласно лемме 2 функция

$$G(x) = 2x-(2x+1)\,\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}$$

монотонно возрастает на $[1,+\infty)$, а поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$, то $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} G(x) = 1$, и неравенство (4.2) при любом $N\in\mathbb{N}$ принимает вид $\|\mathcal{L}(D)f\|_\infty \geq \dfrac{1}{h^2}\,|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)|, \quad k=1,2,\ldots,N-2$. Теперь в полученном неравенстве переходим к нижней грани по всем функциям $f\in F_N^h(\mathcal{L},z)$, а затем — к верхней грани по классу интерполируемых последовательностей $Y_N(\Delta_{\mathcal{L}})$ и в результате получаем $\mathcal{A}_N(\mathcal{L}) \geq \dfrac{1}{h^2}$.

Оценка снизу в теореме доказана. □

Доказательство оценки сверху в теореме базируется на применении известных результатов об оценках решений систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, имеющими диагональное преобладание.

Как известно, квадратная матрица $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ имеет *диагональное преобладание* (или *доминирующую главную диагональ*), если имеют место неравенства

$$|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}| = r_i > 0, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Равномерная норма матрицы A определятся, как обычно, равенством

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n}\,\sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Перечислим нужные нам в дальнейшем свойства таких матриц (см., например, [12, с. 333–335] и имеющиеся там ссылки):

1. Матрица A с доминирующей главной диагональю является невырожденной, т. е. ее определитель отличен от нуля и существует обратная матрица A^{-1}.

2. Для нормы вектора $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ решений системы линейных алгебраических уравнений $Ax=d$, где $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)^T$, справедлива оценка

$$\|x\|_{l_\infty^n} \leq \max_{i=1,2,\ldots,n}\frac{|d_i|}{r_i}\,. \tag{4.3}$$

Доказательство оценки сверху в теореме. Пусть $N>3$. Функцию f будем строить в виде $\mathcal{L}$-сплайна третьего порядка, определяемого линейным дифференциальным оператором $D\mathcal{L}(D)$. Для этого полагаем

$$\mathcal{L}(D)f(t) = \begin{cases} 0, & h\leq t\leq 3h/2,\\ M_{k+1}, & (k+1/2)h < t < (k+3/2)h\ (k=1,2,\ldots,N-2),\\ 0, & (N-1/2)h \leq t \leq Nh,\end{cases}$$

где $\{M_j\}_{j=2}^{N-1}$ — неизвестные вещественные числа.

Воспользовавшись леммой 1, получаем, что числа $\{M_j\}_{j=2}^{N-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{aligned}
&B_1M_2 + C_1M_3 = \frac{1}{h^2}\ \Delta_{\mathcal{L}}(z_1),\\
&A_kM_k + B_kM_{k+1} + C_kM_{k+2} = \frac{1}{h^2}\ \Delta_{\mathcal{L}}(z_k) \quad (k = 2, 3, \ldots, N-3),\\
&A_{N-2}M_{N-2} + B_{N-2}M_{N-1} = \frac{1}{h^2}\ \Delta_{\mathcal{L}}(z_{N-2}),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где

$$
A_k = \left(\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right) \int\limits_0^{1/2} (k+t)\ \ln\left(\frac{k+t}{k}\right)dt, \tag{4.5}
$$

$$
B_k = \left(\frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}\right) \int\limits_{1/2}^{1} (k+t)\ln\left(\frac{k+t}{k}\right)dt + \int\limits_0^{1/2} (k+t+1)\ln\left(\frac{k+2}{k+1+t}\right)dt, \tag{4.6}
$$

$$
C_k = \int\limits_{1/2}^{1} (k+t+1)\ \ln\left(\frac{k+2}{k+1+t}\right)dt. \tag{4.7}
$$

Рассматриваем соотношения (4.4) как систему линейных алгебраических уравнений. Матрица W_{N-2} этой системы имеет вид

$$
W_{N-2} = \begin{pmatrix}
B_1 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & A_3 & B_3 & C_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{N-3} & B_{N-3} & C_{N-3}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{N-2} & B_{N-2}
\end{pmatrix}.
$$

Обозначим $r_1 = B_1 - C_1,\ r_k = B_k - A_k - C_k\ (k = 2, 3, \ldots, N-3),\ r_{N-2} = B_{N-2} - A_{N-2}$.

Оценим снизу $\min\limits_{k=1,2,\ldots,N-2} r_k$. Непосредственными вычислениями проверяется, что $r_1 > r_2$, поэтому при оценке минимума r_1 можно не учитывать.

Теперь вместо трех наборов чисел A_k, B_k, C_k рассмотрим три функции $A(x), B(x), C(x)$, которые получаются из (4.5)–(4.7) заменой дискретного параметра k на непрерывную вещественную переменную x. Ясно, что $A(k) = A_k,\ B(k) = B_k,\ C(k) = C_k\ (k = 1, 2, \ldots, N-2)$. Аналогичным образом по набору чисел r_k определим функцию непрерывной переменной $r(x)$, для которой $r(k) = r_k\ (k = 2, 3, \ldots, N-3)$, т. е.

$$
r(x) = B(x) - A(x) - C(x).
$$

С помощью выражений (4.5)–(4.7), записанных для функций непрерывной переменной x, представим $r(x)$ в виде $r(x) = g(x) + \varphi(x)$, где $g(x)$ — функция из леммы 5;

$$
\varphi(x) = \left(\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}\right) \left[\int\limits_{1/2}^{1} (x+t)\ln\left(\frac{x+t}{x}\right)dt - \int\limits_0^{1/2} (x+t)\ln\left(\frac{x+t}{x}\right)dt\right].
$$

Вычислим интегралы в правой части этого выражения и после выполнения несложных преобразований получим $\varphi(x) = \Phi(x)v(x)$, где $\Phi(x)$ — функция из леммы 3; $v(x)$ — функция из леммы 4.

Покажем, что при достаточно большом N величину r_{N-2} также можно не учитывать при нахождении $\min\limits_{k=1,2,\ldots,N-2} r_k$, т. е. она не меньше величины $\min\limits_{k=1,2,\ldots,N-3} r_k$ при достаточно большом N. Действительно, из лемм 3–5 и легко проверяемых предельных соотношений

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{1}{4}$$

вытекает, что при всех $x\geq 2$ выполняется неравенство

$$r(x)\leq v(2)+\frac{1}{4}=0.55495<\frac{5}{8}\ ,$$

поэтому $r_k<5/8$ $(k=2,3,\ldots,N-3)$. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\lim_{x\to+\infty}B(x)=\frac{3}{4},\quad \lim_{x\to+\infty}A(x)=\frac{1}{8},$$

следовательно, r_{N-2} стремится к $5/8$ при $N\to+\infty$. Выберем $N_0\in\mathbb{N}$ достаточно большим, чтобы при $N>N_0$ обеспечить справедливость неравенства $r_{N-2}>0.55495$, и тем самым добьемся того, чтобы r_{N-2} оказалась больше всех r_k при $k=2,3,\ldots,N-3$.

Теперь оценим $\min\{r_k\colon k=2,3,\ldots,N-3\}$ при $N>N_0$. Применяя леммы 3–5, получаем

$$r(x)=\Phi(x)v(x)+g(x)\geq\inf_{x\in[2,Nh]}\Phi(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}v(x)+\inf_{x\in[2,Nh]}g(x)=\frac{\Phi(2)}{4}+g(2)$$
$$=\frac{2\ln 2-\ln 3}{4(\ln 3-\ln 2)}+\frac{49}{4}(3\ln 2-\ln 7)-\frac{9}{2}(2\ln 2-\ln 3)-\frac{1}{8}\geq 0.393568\ldots,$$

в частности $r_k\geq 0.393568\ldots$ при всех $k=2,3,\ldots,N-3$, т. е.

$$\min\{r_k\colon k=2,3,\ldots,N-3\}\geq 0.393568\ldots\ .$$

Это неравенство означает, что матрица W_{N-2} имеет доминирующую главную диагональ. Теперь применяем неравенства (4.3) и $\|\Delta_{\mathcal{L}}(z)\|_{l_\infty^N}\leq 1$; в результате получаем следующую оценку для решения системы (4.4):

$$\|M\|_\infty\leq\frac{1}{h^2}\big(\min\{r_k\colon k=1,2,\ldots,N-2\}\big)^{-1}\simeq\frac{1}{h^2}\,\frac{1}{0.393568\ldots}=\frac{C}{h^2},$$

где $C=2.540856\ldots$, $M=(0,M_2,M_3,\ldots,M_{N-1},0)$.

Оценка сверху установлена. □

Доказательство теоремы завершено. □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Класс интерполируемых данных Y_N вкладывается в класс последовательностей

$$Y_{N,K}(\Delta_{\mathcal{L}})=\{z\colon z=\{z_k\}_{k=1}^N,\ \|\Delta_{\mathcal{L}}(z)\|_{l_\infty^N}\leq K\}$$

при $K=4$, который отличается от $Y_N(\Delta_{\mathcal{L}})$ только лишь значением константы, ограничивающей норму.

Действительно, поскольку

$$\ln\Big(\frac{k+2}{k}\Big)=\ln\Big(\frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k}\Big)=\ln\Big(\frac{k+2}{k+1}\Big)+\ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big),$$

то в силу леммы 3

$$|\Delta_{\mathcal{L}}(z_k)|\leq|z_{k+2}|+\left(1+\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}\right)|z_{k+1}|+\frac{\ln\Big(\dfrac{k+2}{k+1}\Big)}{\ln\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)}|z_k|$$

$$\leq \|z\|_{l_\infty} \left(2 + 2\, \frac{\ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)}{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)} \right) \leq 4\|z\|_{l_\infty} \leq 4.$$

Отсюда для величины (1.1) из теоремы получаем оценку сверху

$$\mathcal{A}_N(\mathbf{\Delta}) \leq \frac{4C}{h^2} \simeq \frac{10.163424\ldots}{h^2}.$$

Следствие доказано.

Информацию о некоторых других задачах минимизации равномерной нормы оператора Лапласа на интерполянтах можно найти, например, в [13; 14], а также в упомянутой в первом разделе настоящей работы обзорной статье Ю. Н. Субботина, С. И. Новикова и В. Т. Шевалдина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gordon W.J., Hall C.A.** Transfinite element methods: blending–function interpolation over arbitrary curved element domains // Numer. Math. 1973. Vol. 21, no. 2. P. 109–129.
2. **Bejancu A.** Thin plate splines for transfinite interpolation at concentric circles // Math. Model. Anal. 2013. Vol. 18, no. 3. P. 446–460. doi: 10.3846/13926292.2013.807317 .
3. **Bejancu A.** Transfinite thin plate spline interpolation // Constr. Approx. 2011. Vol. 34, no. 2. P. 237–256. doi: 10.1007/s00365-010-9118-3 .
4. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no 9. P. 281–306.
5. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
6. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
7. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
8. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
9. **Mitrinovic′ D.S., Vasic′ P.M.** Analytic inequalities. Berlin etc.: Springer Verlag, 1970. 400 p.
10. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 432 с.
11. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
12. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
13. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
14. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збірник праць Інституту матем. НАН України. 2008. Т. 5, no. 1. P. 248–262.

Поступила 24.06.2019
После доработки 9.09.2019
Принята к публикации 14.10.2019

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gordon W.J., Hall C.A. Transfinite element methods: blending–function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numer. Math.*, 1973, vol. 21, no. 2, pp. 109–129.
2. Bejancu A. Thin plate splines for transfinite interpolation at concentric circles. *Math. Model. Anal.*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 446–460. doi: 10.3846/13926292.2013.807317 .
3. Bejancu A. Transfinite thin plate spline interpolation. *Constr. Approx.*, 2011, vol. 34, no. 2, pp. 237–256. doi: 10.1007/s00365-010-9118-3 .
4. Favard J. Sur l'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.
5. Fikhtenholtz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1970, 608 p. (in Russian). ISBN: 978-5-8114-0673-9 .
6. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
7. Sharma A., Tzimbalario J. Certain linear differential operators and generalized differences. *Math. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97. doi: 10.1007/BF02320546 .
8. Shevaldin V.T. *Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators.* *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.
9. Mitrinović D.S., Vasić P.M. *Analytic inequalities.* Berlin etc.: Springer Verlag, 1970, 400 p. doi: 10.1007/978-3-642-99970-3 .
10. Kurosh A.G. *Higher algebra.* Moscow: Mir Publ., 1988, 428 p. ISBN: 9785030001319 . Original Russian text published in Kurosh A.G. *Kurs vysshei algebry.* Moscow: Nauka Publ., 1971, 432 p.
11. Bakhvalov N.S. *Numerical methods.* Moscow: Mir Publ., 1977, 663 p. Original Russian text published in Bakhvalov N.S. *Chislennye metody.* Moscow: Nauka Publ., 1975, 632 p.
12. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of spline-functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
13. Fisher S., Jerome J. *Minimum norm extremals in function spaces.* Lecture Notes in Math, vol. 479. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1975, 209 p. doi: 10.1007/BFb0097059 .
14. Novikov S.I. Interpolation with minimal norm of the Laplace operator in a ball. *Zbirnik prats Inst. Math. NAN Ukraine*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 248–262 (in Russian).

Received Juny 24, 2019
Revised September 9, 2019
Accepted October 14, 2019

Novikov Sergey Igorevich, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. I. Novikov. Extremal function interpolation for a second-order linear differential operator, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 164–176 .