ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ ПОДГРУППАМИ ЗАДАННЫХ ПОРЯДКОВ

В. С. Монахов, В. Н. Тютянов

Изучается конечная группа G, обладающая следующим свойством: для каждой ее максимальной подгруппы H существует подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$ и $H_1 \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп или всех сверхразрешимых групп. Доказано, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп и группа G ненильпотентна, то $|\pi(G)| = 2$ и в G есть нормальная силовская подгруппа. Для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп и разрешимой группы G с рассматриваемым свойством доказывается, что G сверхразрешима или $2 \leq |\pi(G)| \leq 3$; при $|\pi(G)| = 3$ группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа; при $|\pi(G)| = 2$ или G имеет нормальную силовскую подгруппу, или для наибольшего $p \in \pi(G)$ некоторая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы группы G нормальна в G. Если G — неразрешимая группа и для каждой максимальной подгруппы в G существует сверхразрешимая подгруппа такого же порядка, то каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен $PSL_2(p)$ для некоторого простого числа p и все такие значения p перечислены.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, нильпотентная подгруппа, сверхразрешимая подгруппа.

V. S. Monakhov, V. N. Tyutyanov. Finite groups with supersoluble subgroups of given orders.

We study a finite group G with the following property: for any of its maximal subgroups H, there exists a subgroup H_1 such that $|H_1| = |H|$ and $H_1 \in \mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F}$ is the formation of all nilpotent groups or all supersoluble groups. We prove that, if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ is the formation of all nilpotent groups and G is nonnilpotent, then $|\pi(G)| = 2$ and G has a normal Sylow subgroup. For the formation $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ of all supersoluble groups and a soluble group G with the above property, we prove that G is supersoluble, or $2 \leq |\pi(G)| \leq 3$; if $|\pi(G)| = 3$, then G has a Sylow tower of supersoluble type; if $|\pi(G)| = 2$, then either G has a normal Sylow subgroup or, for the largest $p \in \pi(G)$, some maximal subgroup of a Sylow p-subgroup is normal in G. If G is nonsoluble and, for each maximal subgroup of G, there exists a supersoluble subgroup of the same order, then every nonabelian composition factor of G is isomorphic to $PSL_2(p)$ for some prime p; we list all such values of p.

Keywords: finite group, soluble group, maximal subgroup, nilpotent subgroup, supersoluble subgroup.

MSC: 20D10, 20D20, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-155-163

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Множество всех простых делителей порядка группы G обозначается через $\pi(G)$.

Хорошо известно строение группы, у которой все максимальные подгруппы нильпотентны [1]. Такие ненильпотентные группы называются группами Шмидта. Известно также строение несверхразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы сверхразрешимы [2]. Простые группы, у которых все максимальные подгруппы разрешимы, перечислены Томпсоном [3]. Разрешимые группы, не принадлежащие насыщенной формации $\mathfrak{F}$, у которых все максимальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$, также достаточно хорошо исследованы [4, § 24]. Авторами [5] исследованы группы, в которых каждая максимальная подгруппа нильпотентна или проста, и группы, в которых каждая максимальная подгруппа сверхразрешима или проста.

В настоящей статье изучается конечная группа G, обладающая следующим свойством: для каждой ее максимальной подгруппы H существует подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$ и $H_1 \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп или всех сверхразрешимых групп. Доказано, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп и группа G ненильпотентна, то $|\pi(G)| = 2$ и в G есть нормальная силовская подгруппа. Для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп и разрешимой группы G с рассматриваемым свойством доказывается, что либо G сверхразрешима или $2 \leq |\pi(G)| \leq 3$; при $|\pi(G)| = 3$ группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа; при $|\pi(G)| = 2$ или G имеет нормальную силовскую подгруппу, или для наибольшего $p \in \pi(G)$ некоторая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы группы G нормальна в G. Если G — неразрешимая группа и для каждой максимальной подгруппы в G существует сверхразрешимая подгруппа такого же порядка, то каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен $PSL_2(p)$ для некоторого простого числа p и все такие значения p перечислены.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Используемая терминология соответствует [6]. Через S_n и A_n обозначаются симметрическая и знакопеременная группы степени n соответственно, а Z_m — циклическая группа порядка m. Если m и n — натуральные числа, то (m,n) обозначает их наибольший общий делитель. Запись $M < G$ ($M \lessdot G$) означает, что M — собственная (максимальная) подгруппа группы G. Полупрямое произведение подгрупп A и B с нормальной подгруппой A обозначается через $A \rtimes B$. $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G.

Лемма 1. *В разрешимой группе максимальная подгруппа наибольшего порядка нормальна.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть G — разрешимая группа и K — ее максимальная подгруппа наибольшего порядка. Предположим, что $K_G = 1$. Тогда $G = N \rtimes K$, где N — минимальная нормальная подгруппа в G. Если $x \in G \setminus K$, то

$$K \cap K^x < K, \quad N(K \cap K^x) < G, \quad KK^x \neq G,$$

$$|G| = |K||N| \; > \; |KK^x| = \frac{|K||K^x|}{|K \cap K^x|}, \quad |K \cap K^x||N| > |K|.$$

Теперь подгруппа $N(K \cap K^x)$ имеет порядок больший, чем порядок подгруппы K. Получили противоречие. Поэтому наше допущение неверно и $K_G \neq 1$. По индукции подгруппа K/K_G нормальна в G/K_G, значит, K нормальна в G.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — сверхразрешимая группа и натуральное число k делит $|G|$. Тогда в группе G существует подгруппа H порядка k.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по порядку группы G. Так как группа G сверхразрешима, то любая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс. Поэтому для каждого $p \in \pi(G)$ индекс максимальной в G подгруппы, содержащей p'-холлову подгруппу из G, равен p. Если $k = |G|$, то искомой подгруппой будет вся группа G. Если $k \neq |G|$, то в G найдется максимальная подгруппа M такая, что k делит $|M|$. Так как M сверхразрешима, то по индукции в M найдется подгруппа H порядка k.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H_1 имеется сверхразрешимая подгруппа H такая, что $|H| = |H_1|$. Если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N для каждой максимальной подгруппы M_1/N найдется сверхразрешимая подгруппа M/N такая, что $|M/N| = |M_1/N|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M_1/N — произвольная максимальная подгруппа в G/N. По условию в группе G найдется сверхразрешимая подгруппа K, для которой $|K| = |M_1|$. Поскольку $|M_1/N|$ делит $|KN/N|$ и $KN/N \cong K/K \cap N$ сверхразрешима, то в KN/N имеется по лемме 2 подгруппа M/N порядка M_1/N.

Лемма доказана.

Рассмотрим множество $\mathfrak{R}$ неабелевых групп $PSL_2(p)$ (p — простое число), удовлетворяющих одному из условий:

(1) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 120;

(2) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 60;

(3) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 24;

(4) $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ и одно из чисел $p \pm 1$ делится на 12.

Отметим, что $\mathfrak{R} \neq \varnothing$. Например, группа $PSL_2(239)$ удовлетворяет условию (1), группа $PSL_2(61)$ — условию (2), группа $PSL_2(23)$ — условию (3), группа $PSL_2(13)$ — условию (4).

Лемма 4. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы M_1 существует сверхразрешимая подгруппа M такая, что $|M| = |M_1|$. Группа G изоморфна простой неабелевой группе $PSL_2(p^n)$, где p — нечетное простое число и n — натуральное число, тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы M_1 существует сверхразрешимая подгруппа M такая, что $|M| = |M_1|$, и G изоморфна $PSL_2(p^n)$, где p — нечетное простое число, n — натуральное число. Максимальными подгруппами порядка $\frac{1}{2}p^n(p^n - 1)$ в группе G являются только сопряженные с подгруппой Бореля подгруппы. Так как подгруппа Бореля является группой Фробениуса [9, теорема 2.8.2] и она сверхразрешима по условию, то $n = 1$ и $G \cong PSL_2(p)$. Отметим, что $(p + 1, p - 1) = 2$ и в G существуют диэдральные подгруппы порядков $p \pm 1$. По теореме Диксона [6, теорема II.8.27] несверхразрешимыми максимальными подгруппами в G могут быть только подгруппы, изоморфные A_4, S_4, A_5. Возможны следующие случаи.

(1) Обе подгруппы, изоморфные A_5 и S_4, максимальны в G. Тогда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p + 1$, либо $p - 1$ делится на 120. По лемме 2 в G имеются сверхразрешимые подгруппы порядков 60 и 24.

(2) Только подгруппа, изоморфная A_5, максимальна в G. Тогда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p + 1$, либо $p - 1$ делится на 60. По лемме 2 в G имеется сверхразрешимая подгруппа порядка 60.

(3) Только подгруппа, изоморфная S_4, максимальна в G. Тогда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p + 1$, либо $p - 1$ делится на 24. По лемме 2 в G имеется сверхразрешимая подгруппа порядка 24.

(4) Только подгруппа, изоморфная A_4, максимальна в G. Тогда $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$ [6, теорема II.8.27]. Поэтому либо $p + 1$, либо $p - 1$ делится на 12. По лемме 2 в G имеется сверхразрешимая подгруппа порядка 12.

Таким образом, $G \in \mathfrak{R}$. Из доказательства ясно, что если $G \in \mathfrak{R}$, то она удовлетворяет условию леммы.

Лемма доказана.

2. Нильпотентный случай

Напомним, что $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.

Теорема 1. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда либо группа G нильпотентна, либо $|\pi(G)| = 2$ и $G/F(G)$ имеет простой порядок.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в группе G нет нормальных силовских подгрупп. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ нормализатор $N_G(P)$ силовской p-подгруппы P из G будет собственной подгруппой в G. Пусть H — максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(P)$. По условию существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H| = |H_1|$. Пусть P_1 — силовская p-подгруппа из H_1. Так как $|P_1| = |P|$, то P_1 — силовская подгруппа группы G и $N_G(P_1) = H_1$. По теореме Силова $P_1 = P^x$ для некоторого $x \in G$. Так как нормализаторы сопряженных подгрупп сопряжены, то

$$H_1 = N_G(P)^x \leq H^x, \quad H_1 = H^x.$$

Поскольку p — произвольное, то нормализаторы всех силовских подгрупп группы G нильпотентны. Но нормализаторы силовских подгрупп самонормализуемы [6, I.7.6], поэтому являются подгруппами Картера. По теореме Е. П. Вдовина [7] нормализаторы всех силовских подгрупп будут сопряжены. Значит, группа G нильпотентна. Противоречие.

Следовательно, наше предположение неверно, и группа G содержит нормальную силовскую подгруппу. Пусть таковой является подгруппа $P = G_p$, $p \in \pi(G)$. По теореме Цассенхауза [6, I.18.1] в G существует p'-холлова подгруппа H и все p'-холловы подгруппы в G сопряжены. Пусть M — максимальная подгруппа группы G и $H \leq M$. По условию существует нильпотентная подгруппа M_1 такая, что $|M_1| = |M|$. Поскольку порядок M_1 делится на порядок H, то подгруппа H нильпотентна и группа $G = P \rtimes H$ метанильпотентна.

Пусть Q — силовская q-подгруппа из H, $q \in \pi(H)$. Предположим, что $PQ \neq G$, и пусть K — максимальная в G подгруппа, содержащая PQ. По условию существует нильпотентная подгруппа K_1 такая, что $|K_1| = |K|$. Теперь группа PQ нильпотентна. Это верно для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, поэтому группа G нильпотентна. Противоречие. Значит, наше предположение неверно, и $PQ = G = P \rtimes Q$. Пусть Q_1 — максимальная в Q подгруппа. По условию существует нильпотентная подгруппа F такая, что $|F| = |PQ_1|$. Ясно, что $F = F(G)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть в группе G для каждой максимальной подгруппы H существует нильпотентная подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Если $|\pi(G)| \neq 2$, то группа G нильпотентна.*

Каждая группа Шмидта удовлетворяет условию теоремы 1. Следующий пример показывает, что группа из теоремы 1 не наследует некоторые свойства групп Шмидта.

П р и м е р. В группе $S_3 \times Z_2$ ненормальная силовская подгруппа нециклическая, она изоморфна $Z_2 \times Z_2$. В группе $S_3 \times Z_9$ нормальная силовская подгруппа не шмидтовского типа, она изоморфна $Z_3 \times Z_9$. Обе группы $S_3 \times Z_2$ и $S_3 \times Z_9$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

3. Сверхразрешимый случай

Теорема 2. *Пусть в разрешимой группе G для каждой максимальной подгруппы H существует сверхразрешимая подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $|\pi(G)| \geq 4$, то G сверхразрешима*;

(2) *если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;

(3) *если $|\pi(G)| = 2$, то либо G имеет нормальную силовскую подгруппу, либо для наибольшего $p \in \pi(G)$ некоторая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы нормальна в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в разрешимой группе G для каждой максимальной подгруппы H существует сверхразрешимая подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Если H_1 имеет наибольший порядок среди всех собственных подгрупп группы G, то согласно лемме 1 подгруппа H нормальна в G. Ясно, что индекс H в G будет простым числом. Описание таких групп с единичной подгруппой Фраттини получено в работе [8]. Мы получим новые свойства группы G.

Пусть $p \in \pi(G)$, $G_{p'}$ — p'-холлова подгруппа группы G и H_1 — максимальная в G подгруппа, содержащая $G_{p'}$. По условию существует сверхразрешимая подгруппа H такая, что $|H| = |H_1|$. Так как порядок H делится на порядок $G_{p'}$, то $G_{p'}$ сверхразрешима. Поскольку p — произвольное число из $\pi(G)$, то $G_{p'}$ сверхразрешима для каждого $p \in \pi(G)$. Если

$$|\pi(G)| \geq 4,\ \ \pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\},$$

то в группе G имеются четыре сверхразрешимые подгруппы

$$G_{p_1'},\ G_{p_2'},\ G_{p_3'},\ G_{p_4'}$$

попарно взаимно простых индексов $p_1^{a_1}$, $p_2^{a_2}$, $p_3^{a_3}$ и $p_4^{a_4}$ соответственно, где $p_i^{a_i}$ — порядок силовской p_i-подгруппы группы G. По теореме Дёрка [2] группа G сверхразрешима.

Пусть $|\pi(G)| = 3$, $\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3\}$, $p_1 > p_2 > p_3$. Поскольку подгруппы $G_{(p_1)'}$, $G_{(p_2)'}$ и $G_{(p_3)'}$ сверхразрешимы, то $G_{(p_2)'}$ и $G_{(p_3)'}$ p_1-замкнуты [6, VI.9.1]. Поэтому группа G p_1-замкнута и $G = G_{p_1} \rtimes G_{(p_1)'}$. Так как подгруппа $G_{(p_1)'}$ p_2-замкнута [6, VI.9.1], то группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Пусть $|\pi(G)| = 2$, $\pi(G) = \{p, q\}$, $p > q$. Предположим, что в G нет нормальных силовских подгрупп. Тогда нормализаторы $N_G(G_p)$ и $N_G(G_q)$ — собственные подгруппы в G.

Пусть $N_G(G_p) \leq H_1$, где H_1 — максимальная в G подгруппа. По условию в G существует сверхразрешимая подгруппа H такая, что $|H| = |H_1|$. Пусть P — силовская p-подгруппа из H, она нормальна в H и $H \leq N_G(P)$. Так как $|P| = |G_p|$, то P — силовская подгруппа группы G. По теореме Силова $P = (G_p)^x$ для некоторого $x \in G$. Так как нормализаторы сопряженных подгрупп сопряжены, то

$$H \leq N_G((G_p)^x) = (N_G(G_p))^x,\ \ H^{x^{-1}} \leq N_G(G_p) \leq H_1,$$

$$H^{x^{-1}} = N_G(G_p) = H_1,\ \ N_G(P) = H.$$

Поскольку нормализаторы силовских подгрупп самонормализуемы [6, I.7.6] и $p > q$, то $|G : H| = q^b > q$. Следовательно, H является подгруппой Гашюца группы G [4, 15.3].

Выберем максимальную в G подгруппу K_1 такую, что $|G_q|$ делит $|K_1|$ и индекс $|G : K_1| = p^a$ — наименьший. По условию существует сверхразрешимая подгруппа K такая, что $|K| = |K_1|$. Из выбора подгруппы K_1 следует, что K — максимальная в G подгруппа. Пусть R — силовская p-подгруппа из K (она нормальна в G) и Q — силовская q-подгруппа из K. Так как $|Q| = |G_q|$, то Q — силовская подгруппа группы G и $|G : K| = p^a$. Если $a > 1$, то K является подгруппой Гашюца группы G [4, 15.3]. Согласно [4, 15.5] подгруппы H и K сопряжены в G, что невозможно. Поэтому $|G : K| = p$ и $|G_p : R| = p$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть в неразрешимой группе G для каждой максимальной подгруппы H существует сверхразрешимая подгруппа H_1 такая, что $|H_1| = |H|$. Тогда любой неабелевый композиционный фактор группы G принадлежит $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Будем считать, что G — минимальный контрпример к теореме. Предположим, что G — простая неабелева группа. Рассмотрим все случаи.

1. G — простая группа лиева типа.

Предположим, что G определена над полем характеристики $p = 2$. Пусть U — унипотентная подгруппа группы G и P_1 — параболическая максимальная подгруппа в G. Покажем, что $\pi(P_1) = \{2\}$, и, следовательно, $P_1 = U$. По условию теоремы в группе G существует сверхразрешимая подгруппа T_1, для которой $|T_1| = |P_1|$. Если $T_1 \lessdot G$, то по [12, лемма (1.6)] подгруппа T_1 является параболической подгруппой. Из теоремы Бореля — Титса [13, 13-4] следует, что

$C_G(O_2(T_1)) \leq O_2(T_1)$. Так как T_1 — сверхразрешимая группа, то $O(T_1)$ централизует $O_2(T_1)$, и, следовательно, $O(T_1) = 1$. Поэтому $\pi(T_1) = \pi(P_1) = \{2\}$. Таким образом, $T_1 < P_2 \lessdot G$, где P_2 — параболическая максимальная подгруппа группы G. Найдется сверхразрешимая подгруппа T_2 группы G такая, что $|T_2| = |P_2|$. Если $T_2 \lessdot G$, то $\pi(T_2) = \pi(P_2) = \{2\}$. Следовательно, $T_2 < P_3 \lessdot G$, где P_3 — параболическая максимальная подгруппа группы G. Продолжая этот процесс, получим, что найдется число k, для которого сверхразрешимая параболическая подгруппа T_k максимальна в G. При этом $\pi(T_k) = \{2\}$ и $|P_1|$ делит $|T_k|$. Следовательно, $\pi(P_1) = \{2\}$. Таким образом, все параболические максимальные подгруппы группы G сопряжены с унипотентной подгруппой $U \lessdot G$.

Из [14; 15] следует, что G изоморфна $PSL_2(r)$, где r — простое число Ферма или Мерсенна и $r \geq 17$, или $PSL_2(9)$. Так как группа G определена над полем характеристики 2, то она не принадлежит указанному списку.

Таким образом, группа G определена над полем характеристики $p > 2$. Предположим, что группа G имеет лиев ранг $l \geq 2$ и P — параболическая максимальная подгруппа в G. Согласно [10, (2.1), (2.2)] имеет место разложение Леви $P = O_p(P)L_IH$, где H — подгруппа Картана, а L_I — центральное произведение групп Шевалле, каждая из которых находится по соответствующей связной компоненте диаграммы, полученной из диаграммы Дынкина группы G отбрасыванием вершин, входящих в I. По [16, теорема 2.13] разрешимой группой лиева типа над полем нечетной характеристики является только группа $A_1(3)$, которая несверхразрешима. Поэтому сомножители в дополнении Леви, а значит, и P не являются сверхразрешимыми. Выберем параболическую максимальную подгруппу P_1 в G, для которой $|G : P_1| = \min\{|G : P| \mid P$ — параболическая максимальная подгруппа в $G\}$. По условию теоремы в группе G найдется сверхразрешимая подгруппа T, для которой $|T| = |P_1|$. В силу выбора P_1 подгруппа T является параболической максимальной подгруппой в G. Следовательно, в G имеется сверхразрешимая параболическая максимальная подгруппа, что невозможно.

Таким образом, лиев ранг группы G равен 1 и $G \in \{PSL_2(p^n);\ PSU_3(p^n);\ {}^2G_2(3^{2n+1}),\ n \geq 1\}$. Если $G \cong PSL_2(p^n)$, то по лемме 4 $G \in \mathfrak{R}$. Пусть $G \cong PSU_3(p^n)$. Все параболические максимальные подгруппы в G исчерпываются сопряженными к подгруппе Бореля $B = q^{1+2} : ((q^2-1)/(3, q+1))$, которая несверхразрешима. Противоречие с тем, что в группе G существует сверхразрешимая подгруппа T, для которой $|T| = |B|$. Точно так же, если $G \cong {}^2G_2(3^{2n+1}) = {}^2G_2(q)$, то все параболические максимальные подгруппы в G исчерпываются сопряженными к подгруппе Бореля $q^{1+1+1} : (q-1)$, которая несверхразрешима.

2. $G \cong A_n$, $n \geq 5$.

В силу изоморфизмов $A_5 \cong PSL_2(5)$ и $A_6 \cong PSL_2(9)$ можно считать, что $n \geq 7$. Из [11, лемма 3] следует, что все подгруппы индекса n в A_n сопряжены в A_n. Так как $A_{n-1} \lessdot A_n$ и $|A_n : A_{n-1}| = n$, то по условию теоремы найдется сверхразрешимая подгруппа $T < A_n$, для которой $|A_n : T| = n$. Следовательно, $T \cong A_{n-1}$, что невозможно.

3. G — простая спорадическая группа.

В итоговой таблице работы [17] приведены степени минимальных подстановочных представлений всех простых спорадических групп. При этом, если G — спорадическая группа и n — степень ее минимального подстановочного представления, то соответствующие максимальные подгруппы индекса n в G являются неразрешимыми. Поэтому не существует сверхразрешимых подгрупп индекса n в группе G. Это противоречит условию теоремы.

Следовательно, G не является простой неабелевой группой. Пусть $1 \neq S \lhd G$. По лемме 3 фактор-группа $\overline{G} = G/S$ удовлетворяет условию теоремы. В силу минимальности контрпримера $S(G) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы. Рассмотрим максимальную собственную нормальную подгруппу M в группе G, содержащую N. По условию теоремы G обладает сверхразрешимой подгруппой T, для которой $|T| = |M|$. Предположим, что $\overline{G} = G/M$ разрешима. Тогда $|G : M| = p \in \pi(G)$. Следовательно, $|G : T| = p$ и группа G обладает сверхразрешимой p'-холловой подгруппой. По [18, лемма 1] подгруппа N, а поэтому и N_1, обладают сверхразрешимыми p'-холловыми подгруппами. Если $(|N_1|, p) = 1$, то N_1 сверхразрешима, что невозможно. Поэтому $(|N_1|, p) = p$ и N_1 имеет сверхразрешимую холлову подгруппу индекса p^t. Из [19, теорема 1] следует, что $N_1 \cong PSL_2(q)$, где $q + 1 = p^t$. Если $p > 2$, то $q = 2^m$ и $N_1 \cong SL_2(2^m)$, $m \geq 2$. В этом случае p'-холлова подгруппа в N_1 будет изоморфна подгруппе Бореля в N_1, которая несверхразрешима. Последнее невозможно.

Таким образом, $p = 2$. Тогда $|G : M| = |G : T| = 2$. Если $T \leq M$, то $T = M$ и подгруппа M сверхразрешима, что невозможно. Поэтому $T \not\leq M$ и $G = MT$. Отсюда следует, что

$$|G| = (|M||T|)/|M \cap T|, \ |G : T| = |M : M \cap T| = 2.$$

Значит, $M \cap T \lhd M$. Поскольку $M \cap T$ является сверхразрешимой группой, то подгруппа M разрешима. Последнее невозможно.

Следовательно, $\overline{G}$ — простая неабелева группа. Пусть

$$\overline{R} \lessdot \overline{G}, \ |\overline{G} : \overline{R}| = \min\{|\overline{G} : \overline{F}| \mid \overline{F} \lessdot \overline{G}\}.$$

Обозначим через R полный прообраз $\overline{R}$ в G. Тогда $R \lessdot G$ и по условию теоремы существует сверхразрешимая подгруппа T группы G, для которой $|R| = |T|$. Если $M \leq T$, то подгруппа M является сверхразрешимой группой, что невозможно. Поэтому $M \not\leq T$. Рассмотрим подгруппу $T_1 = MT$. Очевидно, что $|T_1| > |R|$. В силу выбора $\overline{R}$ получим, что $\overline{G} = \overline{T_1}$ — сверхразрешимая группа. Последнее невозможно.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3-4. С. 366–372.
2. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Vol. 91, no. 3. P. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426 .
3. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74. P. 383–437.
4. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. Минск: Наука, 1978. 271 с.
5. **Монахов В.С., Тютянов В.Н.** О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 833–836.
6. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N Y, 1967. 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
7. **Vdovin E.P.** Carter subgroups of finite groups // Siberian Adv. Math. 2009. Vol. 19, iss. 1. P. 24–74. doi: 10.3103/S1055134409010039 .
8. **Казарин Л.С., Корзюков Ю.А.** Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 22–27.
9. **Gorenstein D.** Finite groups. N Y: Harper and Row, 1968. 519 p.
10. **Кондратьев А. С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 57–96.
11. **Li S., Shi W.** A note on the solvability of groups // J. Algebra. 2006. Vol. 304, no. 1. P. 278–285. doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.09.028 .
12. **Seitz G.M.** Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. Math. 1973. Vol. 97, no. 1. P. 27–56. doi: 10.2307/1970876 .
13. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type Providence, RI: Am. Math. Soc., 1983. 731 p. (Mem. Amer. Math. Soc; vol. 42). doi: 10.1090/memo/0276 .
14. **Baumann B.** Endliche nichtauflosbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen // J. Algebra. 1975. Vol. 38, no. 1. P. 119–135. doi: 10.1016/0021-8693(76)90249-0 .
15. **Thompson J.G.** A special class of non solvable groups // Math. Z. 1960. Vol. 72, no. 1. P. 458–462. doi: 10.1007/BF01162968 .
16. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.

17. **Мазуров В.Д.** Минимальное подстановочное представление простой группы Томпсона // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 5. С. 562–580.
18. **Hall P.** Theorems like Sylow's // Proc. Lond. Math. Soc. (3) 1956. Vol. s3-6, no. 2. P. 286–304. doi: 10.1112/plms/s3-6.2.286 .
19. **Guralnick R.M.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4 .

Поступила 15.04.2019
После доработки 27.06.2019
Принята к публикации 8.07.2019

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры алгебры и геометрии
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
г. Гомель
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Тютянов Валентин Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры общенаучных и гуманитарных дисциплин
Международный университет "МИТСО", Гомельский филиал
г. Гомель
e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special. *Mat. Sb.*, 1924, vol. 31, no. 3–4, pp. 366–372 (in Russian).
2. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen. *Math. Z.*, 1966, vol. 91, no. 3, pp. 198–205. doi: 10.1007/BF01312426 .
3. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, vol. 74, pp. 383–437. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11953-6 .
4. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Minsk: Nauka Publ., 1978, 271 p.
5. Monakhov V.S., Tyutyanov V.N. On finite groups with some subgroups of prime indices. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 666–668. doi: 10.1007/s11202-007-0068-3 .
6. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967, 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
7. Vdovin E.P. Carter subgroups of finite groups. *Siberian Adv. Math.*, 2009, vol. 19, no. 1, pp. 24–74. doi: 10.3103/S1055134409010039 .
8. Kazarin L.S., Korzyukov Yu.A. Finite solvable groups with supersolvable maximal subgroups. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1980, vol. 24, no. 5, pp. 23–29.
9. Gorenstein D. *Finite groups.* N Y: Harper and Row, 1968. 519 p.
10. Kondrat'ev A.S. Subgroups of finite Chevalley groups. *Russian Math. Surveys*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 65–118. doi: 10.1070/RM1986v041n01ABEH003203 .
11. Li S., Shi W. A note on the solvability of groups. *J. Algebra*, 2006, vol. 304, no. 1, pp. 278–285. doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.09.028 .
12. Seitz G.M. Flag-transitive subgroups of Chevalley groups. *Ann. Math.*, 1973, vol. 97, no. 1, pp. 27–56. doi: 10.2307/1970876 .
13. Gorenstein D., Lyons R. *The local structure of the finite groups of characteristic 2 type.* Mem. Amer. Math. Soc, vol. 42, 731 p. doi: 10.1090/memo/0276 .
14. Baumann B. Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen. *J. Algebra*, 1975, vol. 38, no. 1, pp. 119–135. doi: 10.1016/0021-8693(76)90249-0 .

15. Thompson J.G. A special class of non solvable groups. *Math. Z.*, 1960, vol. 72, no. 1, pp. 458–462. doi: 10.1007/BF01162968 .
16. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics, N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu.* Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
17. Mazurov V.D. The minimal permutation representation of the Thompson simple group. *Algebra and Logic*, 1988, vol. 27, no 5, pp. 350–361. doi: 10.1007/BF01982274 .
18. Hall P. Theorems like Sylow's. *Proc. London Math. Soc.*, 1956, vol. s3-6, no. 2, pp. 286–304. doi: 10.1112/plms/s3-6.2.286 .
19. Guralnick R.M. Subgroups of prime power index in a simple group. *J. Algebra*, 1983, vol. 81, no. 2, pp. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4 .

Received April 15, 2019
Revised June 27, 2019
Accepted July 8, 2019

Viktor Stepanovich Monakhov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com .

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University "MITSO", Gomel, 246029, Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com .

Cite this article as: V. S. Monakhov, V. N. Tyutyanov. Finite groups with supersoluble subgroups of given orders, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 155–163 .