ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ПОЧТИ ПРОСТЫЕ 4-ПРИМАРНЫЕ ГРУППЫ СО СВЯЗНЫМ ГРАФОМ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ[1]

Н. А. Минигулов

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G. Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$. В 2011 г. в работе А. С. Кондратьева и И. В. Храмцова были описаны конечные 4-примарные почти простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. В данной работе описаны конечные 4-примарные почти простые группы со связным графом Грюнберга — Кегеля. Для каждой такой группы указан ее граф Грюнберга — Кегеля. Полученные результаты приведены в таблице. Согласно таблице число групп с указанным свойством равно 32. Результаты получены с использованием компьютерной системы GAP.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, 4-примарная группа, граф Грюнберга — Кегеля.

N. A. Minigulov. Finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph.

Let G be a finite group. Denote by $\pi(G)$ the set of prime divisors of the order of G. The Gruenberg–Kegel graph (prime graph) of G is the graph with the vertex set $\pi(G)$ in which two different vertices p and q are adjacent if and only if G has an element of order pq. If $|\pi(G)| = n$, then the group G is called n-primary. In 2011, A.S. Kondrat'ev and I.V. Khramtsov described finite almost simple 4-primary groups with disconnected Gruenberg–Kegel graph. In the present paper we describe finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph. For each of these groups, its Gruenberg–Kegel graph is found. The results are presented in a table. According to the table, there are 32 such groups. The results are obtained with the use of the computer system GAP.

Keywords: finite group, almost simple group, 4-primary group, Gruenberg–Kegel graph.

MSC: 20D60, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-142-146

Введение

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей ее порядка. Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$.

В работе А. С. Кондратьева и И. В. Храмцова [1] описаны конечные почти простые 4-примарные группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

Цель данной работы — описать конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга — Кегеля.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа. Граф $\Gamma(G)$ связен тогда и только тогда, когда группа G изоморфна одной из следующих групп:* A_{10}, S_9, S_{10}, $\mathrm{Aut}(J_2)$, $L_2(81).2^2$, $\mathrm{Aut}(L_2(q))$ *при* $q \in \{25, 27, 49, 81\}$; $PGL_3(4)$, $PGL_3(4).2_2$, $PGL_3(4).2_3$, $L_3(4).6$, $L_3(4).2^2$, $\mathrm{Aut}(L_3(4))$, $PGL_3(7)$, $\mathrm{Aut}(L_3(7))$, $L_4(3).2_1$, $\mathrm{Aut}(L_4(3))$, $U_3(5).3$, $\mathrm{Aut}(U_3(5))$,

[1]Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 19-71-10067).

$U_3(8).3_2$, $U_3(8).3^2$, $U_3(8).S_3$, $\mathrm{Aut(U_3(8))}$, $S_4(9).2_2$, $\mathrm{Aut(S_4(q))}$ *при* $q \in \{5,7,9\}$; $O_8^+(2).2$, $O_8^+(2).3$, $\mathrm{Aut(O_8^+(2))}$. *Графы Грюнберга — Кегеля этих групп приведены в таблице ниже.*

Из теоремы следует, что число конечных почти простых 4-примарных групп со связным графом Грюнберга — Кегеля равно 32.

Полученные результаты могут быть использованы при исследованиях конечных групп по свойствам их графов Грюнберга — Кегеля.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [2; 3].

Для доказательства теоремы нам потребуются следующая лемма.

Лемма 1 [4, Theorem 1–Theorem 3; 5, Theorem I–Theorem III; 6]. *Пусть G – конечная простая 4-примарная группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) A_n *при* $7 \le n \le 10$, $L_2(q)$ *при* $q \in \{16, 25, 49, 81\}$; $L_3(q)$ *при* $q \in \{4,5,7,8,17\}$; $L_4(3)$, $S_4(q)$ *при* $q \in \{4,5,7,9\}$; $S_6(2)$, $U_3(q)$ *при* $q \in \{4,5,7,8,9\}$; $U_4(3)$, $U_5(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{12}, J_2;

(2) $L_2(r)$, *где* r — *простое число,* $17 \ne r \ge 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — *простое число,* $a, b \in \mathbb{N}$ *и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $r \in \{97, 577\}$;

(3) $L_2(2^m)$, *где* m, $2^m - 1$ *и* $(2^m+1)/3$ — *простые числа, большие* 3;

(4) $L_2(3^m)$, *где* m *и* $(3^m-1)/2$ — *нечетные простые числа, а* $(3^m+1)/4$ *равно либо простому числу, либо* 11^2 *при* $m = 5$.

2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная почти простая 4-примарная группа и L – ее цоколь.

Докажем условие необходимости теоремы. Пусть граф $\Gamma(G)$ связен.

Лемма 2. *Группа L не изоморфна группе из п.* (2) *леммы* 1.

Доказательство. Предположим, что L изоморфна группе из п. (2) леммы 1. Тогда $G \cong \mathrm{Aut(L)}$, и ввиду [1, табл. 1] граф $\Gamma(G)$ несвязен; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Группа L не изоморфна группе из п.* (3) *леммы* 1.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $L \cong L_2(2^m)$, где $m, u = 2^m - 1$ и $t = (2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3. Поскольку граф $\Gamma(L)$ несвязен, имеем $L < G$ и, следовательно, $G \cong \mathrm{Aut(L)} \cong \mathrm{L_2(2^m)} : \mathbb{Z}_\mathrm{m}$. Поскольку $\pi(G) = \{2, 3, u, t\}$, имеем $m \in \{u, t\}$.

Пусть $m = u$. Тогда $m = 2^m - 1$, т. е. $2^m = m + 1$. Индукцией по m покажем, что $2^m > m+1$ при $m \ge 2$. При $m = 2$ получим, что $2^2 = 4 > 2 + 1 = 3$, так что база индукции выполняется. Предположим, что $m \ge 2$ и $2^m > m + 1$. Тогда $2^{m+1} > 2m + 2 = m + (m + 2) > m + 2$, так что и шаг индукции выполняется. Таким образом, $m \ne u$.

Итак, $m = t = (2^m+1)/3$. Тогда $2^m = 3m - 1$. Индукцией по m покажем, что $2^m > 3m - 1$ при $m > 3$. При $m = 4$ получаем, что $2^4 = 16 > 3 \cdot 4 - 1 = 11$, так что база индукции выполняется. Предположим, что $m > 3$ и $2^m > 3m - 1$. Тогда $2^{m+1} > 6m - 2 = 3(m + 1) - 1 + (3m - 4) > 3(m + 1) - 1$, так что и шаг индукции выполняется. Таким образом, $m \ne t$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Если группа L изоморфна группе из п.* (4) *леммы* 1, *то* $G \cong \mathrm{Aut(L_2(27))}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $L \cong L_2(3^m)$, где m и $u = (3^m-1)/2$ – нечетные простые числа, а $(3^m+1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 при $m=5$. Тогда $\pi((3^m+1)/4) = \{t\}$ для некоторого простого числа t. Ввиду [1, табл. 1] графы $\Gamma(L_2(3^m))$ и $\Gamma(PGL_2(3^m))$ несвязны.

Поскольку $|\mathrm{Out(L)}| = 2\mathrm{m}$ (см. [3, табл. 5]) и граф $\Gamma(G)$ связен, группа G изоморфна либо $L : \mathbb{Z}_m$, либо $\mathrm{Aut(L)}$. Поэтому $m \in \pi(G) = \pi(L) = \{2,3,u,t\}$.

Предположим, что $m \in \{u,t\}$. Тогда $m > 3$ и, следовательно, $m \in \pi(L)$. Но тогда полевой автоморфизм φ порядка m группы L централизует в L элемент порядка m. Но $C_L(\varphi) \cong L_2(3) \cong A_4$ (см. [2, 4.9.1]); противоречие. Итак, $m = 3$. Ввиду [1, табл. 1] граф $\Gamma(L_2(3^3).\mathbb{Z}_3)$ несвязен, поэтому $G \cong \mathrm{Aut(L_2(3^3))}$.

Лемма доказана.

Из лемм 2–4 следует, что либо группа L изоморфна группе из п. (1) леммы 1, либо $G \cong \mathrm{Aut(L_2(27))}$. Все 4-примарные почти простые группы с таким цоколем L можно либо найти в [3], либо вычислить, используя строение группы Out(L), указанное, например, в [3, с. 239–242]. С использованием [1, табл. 1] из множества этих групп исключаются все конечные 4-примарные почти простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Оставшиеся после этого исключения группы и их графы Грюнберга — Кегеля приведены в таблице ниже. Графы Грюнберга — Кегеля этих групп строятся с использованием их таблиц характеров, которые приводятся либо в [3], либо в [7].

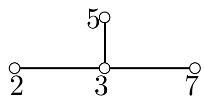
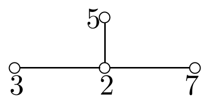
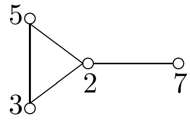
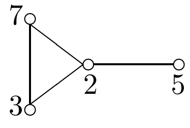
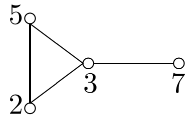
Условие необходимости теоремы доказано.

Пусть группа G изоморфна одной из групп из списка, приведенного в теореме. Графы Грюнберга — Кегеля этих групп приведены в таблице, и все они связны. Условие достаточности теоремы доказано.

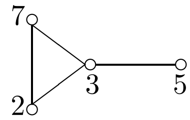
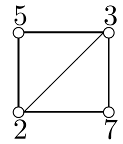
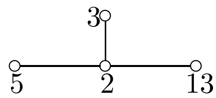
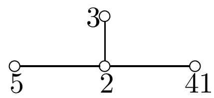
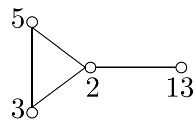
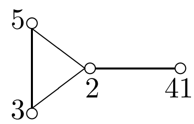
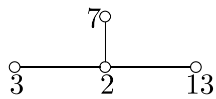
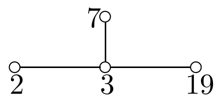
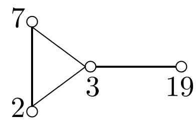
Теорема доказана.

Т а б л и ц а

Конечные почти простые 4-примарные группы со связным графом Грюнберга — Кегеля

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$PGL_3(4), L_3(4).6$	
$U_4(3).2_1, U_4(3).4, U_4(3).2^2, \mathrm{Aut(U_4(3))}$, $\mathrm{Aut(L_2(49)), L_3(4).2^2}$	
$S_9, \mathrm{Aut(J_2)}, \mathrm{O_8^+(2).2}$	
$\mathrm{Aut(S_4(7))}$	
$A_{10}, PGL_3(4).2_3, O_8^+(2).3, U_3(5).3$, $\mathrm{Aut(U_3(5))}$	

Продолжение таблицы

Группа G	Граф $\Gamma(G)$
$PGL_3(4).2_2$	
$S_{10}, \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_3(4)), \mathrm{Aut}(\mathrm{O}_8^+(2))$	
$L_4(3).2_1, \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_4(3)), \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(25))$	
$L_2(81).2^2, \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(81))$	
$\mathrm{Aut}(\mathrm{S}_4(5))$	
$S_4(9).2_2, \mathrm{Aut}(\mathrm{S}_4(9))$	
$\mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(27))$	
$U_3(8).3_2, U_3(8).3^2$	
$PGL_3(7), \mathrm{Aut}(\mathrm{L}_3(7)), \mathrm{U}_3(8).\mathrm{S}_3,$ $\mathrm{Aut}(\mathrm{U}_3(8))$	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
2. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. 420 p. (Math. Surveys Monographs; vol. 40.3).
3. **Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Oxford University Press, 1985. 252 p. ISBN 0-19-853199-0 .
4. **Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. 2001. Vol. 241, no. 10, P. 658–668. doi: 10.1006jabr.2000.8742 .

5. **Huppert B., Lempken W.** Simple groups of order divisible by at most four primes // Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny. Vopr. Algebry. 2000. No. 3 (16). P. 64–75.
6. **Shi W.J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. 1991. Vol. 36 (17). P. 1281–1283. doi: 10.1360/csb1991-36-17-1281 .
7. GAP System for Computational Discrete Algebra [e-resource]. Ver. 4.10.0. 2018. Available at: http://www.gap-system.org .

Поступила 12.08.2019
После доработки 15.09.2019
Принята к публикации 23.09.2019

Минигулов Николай Александрович
аспирант
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: nikola-minigulov@mail.ru

REFERENCES

1. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. 43-61. doi: 10.1134/S0081543812090040 .
2. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Ser. Math. Surveys Monographs, vol. 40.3, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, 420 p. ISBN-10: 0-8218-0391-3 .
3. Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Oxford University Press, 1985, 252 p. ISBN 0-19-853199-0 .
4. Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M. On simple K_4-groups. *J. Algebra*, 2001, vol. 241, no. 10, pp. 658–668. doi:10.1006jabr.2000.8742 .
5. Huppert B., Lempken W.*Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny*, 2000, No. 3 (16), pp. 64–75.
6. Shi W.J. On simple K_4-groups. *Chinese Science Bull*, 1991, vol. 36 (17), pp. 1281–1283. doi: 10.1360/csb1991-36-17-1281 .
7. GAP System for Computational Discrete Algebra [e-resource]. Ver. 4.10.0. 2018. Available at: http://www.gap-system.org .

Received August 12, 2019
Revised September 15, 2019
Accepted September 23, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10067).

Nikolai Aleksandrovich Minigulov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: nikola-minigulov@mail.ru .

Cite this article as: N. A. Minigulov. Finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 142–146 .