

УДК 519.145

ПОЛУПОЛЕВЫЕ ПЛОСКОСТИ РАНГА 2, ДОПУСКАЮЩИЕ ГРУППУ S_3 ¹

О. В. Кравцова, Т. В. Моисеевкова

Одна из классических задач проективной геометрии — построение объекта по известным ограничениям на его автоморфизмы. Рассматриваются конечные проективные плоскости, координатизируемые полуполем, т. е. алгебраической системой, удовлетворяющей аксиомам тела, за исключением ассоциативности умножения. Такая плоскость является плоскостью трансляций и обладает также транзитивной группой элаций с аффинной осью. Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром, содержащим $GF(p^n)$ (p — простое число), группа линейных автогопизмов которой содержит подгруппу H , изоморфную симметрической группе S_3 . Для построения и исследования таких плоскостей применяется подход с использованием линейного пространства и регулярного множества — специального семейства линейных преобразований. Построено матричное представление подгруппы H и регулярного множества полуполевой плоскости для $p = 2$ и $p > 2$. Изучена возможность присутствия центральных коллинеаций в подгруппе H . Показано, что полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром $GF(3^n)$ не допускает S_3 в группе линейных автогопизмов. Найдены примеры полуполевых плоскостей порядков 16 и 625, допускающих S_3 . Полученные результаты могут быть обобщены на случай полуполевых плоскостей ранга более двух и могут быть использованы, в частности, при исследовании известной гипотезы о разрешимости полной группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, группа автогопизмов, симметрическая группа, бэровская инволюция, гомология, регулярное множество.

O. V. Kravtsova, T. V. Moiseenkova. Semifield planes of rank 2 admitting the group S_3 .

One of the classical problems in projective geometry is to construct an object from known constraints on its automorphisms. We consider finite projective planes coordinatized by a semifield, i. e., by an algebraic system satisfying all axioms of a skew-field except for the associativity of multiplication. Such a plane is a translation plane admitting a transitive elation group with an affine axis. Let π be a semifield plane of order p^{2n} with a kernel containing $GF(p^n)$ for prime p , and let the linear autotopism group of π contain a subgroup H isomorphic to the symmetric group S_3 . For the construction and analysis of such planes, we use a linear space and a spread set, which is a special family of linear mappings. We find a matrix representation for the subgroup H and for the spread set of a semifield plane if $p = 2$ and if $p > 2$. We also study the existence of central collineations in H . It is proved that a semifield plane of order 3^{2n} with kernel $GF(3^n)$ admits no subgroups isomorphic to S_3 in the linear autotopism group. Examples of semifield planes of order 16 and 625 admitting S_3 are found. The obtained results can be generalized for semifield planes of rank greater than 2 and can be applied, in particular, for studying the known hypothesis that the full collineation group of any finite non-Desarguesian semifield plane is solvable.

Keywords: semifield plane, autotopism group, symmetric group, Baer involution, homology, spread set.

MSC: 51A35, 51A40, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-118-128

Введение

Координатизация точек и прямых в конечной проективной плоскости устанавливает связь между геометрическими свойствами плоскости и алгебраическими свойствами ее координатирующего множества. Так, классическая или дезаргова, проективная плоскость координатируется полем, а плоскость трансляций — квазиполем.

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатирующее множество является полуполем (semifield). Такая плоскость одновременно является плоскостью трансляций и дуальна плоскости трансляций. Особенности строения координатирующего множества

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

вызывают ряд вопросов, связанных со строением полной группы коллинеаций (автоморфизмов) полуполевыми плоскостями. Наиболее известна гипотеза [1, вопрос 11.76] о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполевыми недезарговой плоскости конечного порядка. К настоящему времени эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевыми плоскостями (см., например, [2]). В связи с этим информация о коллинеациях конечной полуполевыми плоскости является важной.

Известен способ задания полуполевыми плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет алгебраические свойства координатизирующего полуполя и геометрические свойства полуполевыми плоскости, в том числе строение группы коллинеаций. Таким образом, представляет интерес как задача исследования группы коллинеаций при известном представлении регулярного множества, так и обратная задача — построение конечных проективных плоскостей по известным ограничениям на группу коллинеаций (см., например, [3]). Большое значение приобрели результаты [4] о полуполевыми плоскости, допускающей бэровскую инволюцию.

Симметрическая группа S_3 является некоммутативной группой минимального порядка, ее наличие в группе коллинеаций проективной плоскости и в группе автоморфизмов координатизирующего множества может указывать на наличие особенных свойств. Так, среди всех 23 неизоморфных полуполей порядка 16 ровно одно имеет группу автоморфизмов, изоморфную S_3 . Таким же свойством обладает исключительное полуполе Хентзела — Рúa порядка 64, не являющееся ни лево-, ни правопримитивным [5]. Кроме того, поскольку S_3 содержится во многих известных группах, условие существования S_3 в группе автотопизмов приводит к получению важных технических результатов для дальнейших исследований. Отметим также особую роль группы S_3 в исследовании полуполевыми плоскостей в связи с классификацией полуполей не только с точностью до изотопизма, но и с точностью до S_3 (так называемые орбиты Кнута, см., например, [6]).

Пусть π — полуполевыми плоскость порядка p^{2n} с ядром порядка p^n (p — простое число), подгруппа линейных автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) которой содержит подгруппу H , изоморфную симметрической группе S_3 . Построено матричное представление подгруппы H в $GL_4(p^n)$ и регулярного множества плоскости π в $GL_2(p^n) \cup \{0\}$. Найдены примеры таких плоскостей порядка 16 и 625.

Основные результаты работы, приведенные в теоремах 1–3, анонсированы в [7].

1. Основные определения и предварительные обсуждения

Введем кратко основные определения, обозначения и результаты, необходимые для работы. Для подробного ознакомления рекомендуем [8; 9].

О п р е д е л е н и е 1. В соответствии с [8, гл. VIII] *полуполем* будем называть множество S , на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

- 1) $\langle S, + \rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом 0;
- 2) $\langle S^*, * \rangle$ — лупа ($S^* = S \setminus \{0\}$);
- 3) выполняются дистрибутивные законы $a * (b + c) = a * b + a * c$, $(b + c) * a = b * a + c * a$ для любых $a, b, c \in S$.

Полуполе S содержит подмножества N_r , N_m , N_l , называемые *правым, средним и левым ядрами* соответственно:

$$\begin{aligned} N_r &= \{n \in S \mid (a * b) * n = a * (b * n) \ \forall a, b \in S\}, \\ N_m &= \{n \in S \mid (a * n) * b = a * (n * b) \ \forall a, b \in S\}, \\ N_l &= \{n \in S \mid n * (a * b) = n * (a * b) \ \forall a, b \in S\}, \end{aligned}$$

пересечение $N_l \cap N_m \cap N_r$ называют *ядром* полуполя. Ядра конечного полуполя являются подполями, и полуполе можно рассматривать как линейное пространство над каждым из них. Следовательно, порядок конечного полуполя равен степени простого числа.

Рассмотрим линейное пространство W размерности d над полем $F \simeq GF(p^n)$ и инъективное отображение $\theta : W \rightarrow GL_d(p^n) \cup \{0\}$, удовлетворяющее условиям:

- 1) образом нулевого вектора является нулевая матрица;
- 2) единичная матрица E имеет прообраз в W ;
- 2) $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ для всех $x, y \in W$.

Определим на W умножение правилом $x * y = x \cdot \theta(y)$, тогда $\langle W, +, * \rangle$ — полуполе порядка p^{nd} . Множество матриц $R = \{\theta(y) \mid y \in W\}$ называют при этом *регулярным множеством* (spread set, см. [8, гл. VII]). Рассмотрим внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W$ и определим проективную плоскость π следующим образом:

- 1) элементы (x, y) , где $x, y \in W$, пространства V назовем аффинными точками плоскости π ;
- 2) аффинными прямыми назовем смежные классы по подгруппам

$$V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in W\}, \quad m \in W,$$

$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in W\};$$

3) множество всех смежных классов по одной подгруппе $V(m)$ или $V(\infty)$ назовем особой точкой (m) или (∞) соответственно;

- 4) множество особых точек назовем особой прямой $[\infty]$;
- 5) инцидентность определим теоретико-множественным включением.

Построенная таким образом проективная плоскость является полуполевым пространством порядка p^{nd} , число d будем называть ее *рангом*.

Полная группа коллинеаций полуполевого пространства содержит подгруппу *автотопизмов* Λ , т. е. коллинеаций, фиксирующих треугольник с вершинами $(0, 0)$, (0) , (∞) и сторонами $[0, 0]$, $[0]$, $[\infty]$. Автотопизмы задаются полулинейными преобразованиями пространства V и определяются блочно-диагональными матрицами,

$$(x, y)^\lambda = (x^\sigma, y^\sigma) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix};$$

здесь σ — автоморфизм основного поля F , действующий на координаты вектора; $A, B \in GL_d(p^n)$. При этом сохранение инцидентности требует выполнения условия

$$A^{-1} [\theta(m)]^\sigma B \in R \quad \forall \theta(m) \in R.$$

Обозначим через Λ_0 подгруппу линейных автотопизмов ($\sigma = 1$), $\Lambda/\Lambda_0 \subset \text{Aut}(F)$,

$$A^{-1}\theta(m)B \in R \quad \forall \theta(m) \in R. \quad (1.1)$$

Мы рассматриваем полуполевого пространства ранга 2 над полем $F \simeq GF(p^n)$, считая, что ядро полуполя либо совпадает с F , либо содержит F (в этом случае плоскость дезаргова, R — поле). Группа линейных автотопизмов состоит из матриц размерности 4×4 с элементами из F , регулярное множество R содержится в $GL_2(p^n) \cup \{0\}$. Пусть $H < \Lambda_0$, $H = \langle \tau, \sigma \rangle \simeq S_3$, где τ и σ — неперестановочные инволюции, коллинеация $\gamma = \tau\sigma$ имеет порядок 3. Обсудим прежде всего геометрический смысл элементов группы H . Как известно, всякая коллинеация порядка два проективной плоскости является либо центральной, либо бэровской коллинеацией [8, теорема 4.3].

О п р е д е л е н и е 2. Коллинеация проективной плоскости π порядка m называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|} = \sqrt{m}$ (бэровскую подплоскость).

О п р е д е л е н и е 3. Коллинеация проективной плоскости π называется *центральной* (или перспективностью), если она фиксирует поточечно некоторую прямую (ось), некоторую точку (центр) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется элацией, в противном случае — гомологией. Если m — порядок проективной плоскости, то m делится на порядок всякой элации, $m - 1$ делится на порядок всякой гомологии.

Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов следующие циклические подгруппы [2]:

- 1) $H_r \simeq N_r^*$ — группа гомологий с осью $[0, 0]$ и центром (∞) ;
- 2) $H_l \simeq N_l^*$ — группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0, 0)$;
- 3) $H_m \simeq N_m^*$ — группа гомологий с осью $[0]$ и центром (0) .

При этом

$$H_r = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid \theta(m)A \in R \ \forall \theta(m) \in R \right\},$$

$$H_m = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \mid A\theta(m) \in R \ \forall \theta(m) \in R \right\},$$

$$H_l = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid \theta(m)A = A\theta(m) \ \forall \theta(m) \in R \right\}.$$

Таким образом, если порядок рассматриваемой полуполевогой плоскости π равен p^{2n} , то при $p = 2$ инволюции τ и σ могут быть только бэровскими, при $p > 2$ — бэровскими коллинеациями либо гомологиями, произведение $\tau\sigma$ может быть гомологией при $p \neq 3$. Случаи $p = 2$, $p = 3$ и $p > 3$ требуют отдельного изучения.

2. Случай $p = 2$

Теорема 1. Пусть π — полуполева плоскость порядка 2^{2n} с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(2^n)$, группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H , изоморфную симметрической группе S_3 . Тогда базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что регулярное множество плоскости в $GL_2(F) \cup \{0\}$ имеет вид

$$R = \left\{ \theta(v, u) = \begin{pmatrix} u + v + m(v) & f(v) + m(u) \\ v & u \end{pmatrix} \mid u, v \in F \right\}, \quad (2.1)$$

где m, f — аддитивные функции на F , причем f взаимнооднозначна и $m(1) = 0$. Кроме того,

- 1) если H содержит гомологию с осью $[0, 0]$ и центром (∞) , то $f(x) = x \ \forall x \in F$;
- 2) если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0) , то $f(x) = m(m(x)) + m(x) + x \ \forall x \in F$;
- 3) если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0, 0)$, то $f(x) = x, m(x) = 0 \ \forall x \in F$, плоскость дезаргова;
- 4) если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям

$$m(m(x)) = m(x), \quad f(m(x)) = m(x), \quad m(f(x)) = m(x) + f(x) + x, \quad f(f(x)) = x \quad \forall x \in F.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $|\pi| = 2^{2n}$, элементы τ и σ являются бэровскими инволюциями. Воспользуемся результатами [4]: если полуполева плоскость порядка 2^{2n} с ядром порядка $\geq 2^n$ допускает бэровскую инволюцию τ в линейном трансляционном дополнении, то

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

регулярное множество имеет вид (2.1). Положим

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } A, B \in GL_2(p^n).$$

Тогда для инволюции σ выполнены условия

- 1) $A^2 = B^2 = E$,
- 2) $AL \neq LA$ или $BL \neq LB$,
- 3) $(LA)^3 = (LB)^3 = E$.

Отсюда матрицы A и B равны либо L (не одновременно), либо матрице вида

$$\begin{pmatrix} a & a^2 + 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in F.$$

Заметим, что верно равенство $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a^2 + 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M$, поэтому базис линейного пространства можно выбрать так (не меняя τ), что

$$\sigma \in \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим подробно все три возможных случая. В первом случае коллинеация $\gamma = \tau\sigma$ определяется матрицей

$$\gamma = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & LM \end{pmatrix}$$

и является гомологией порядка 3 с осью $[0, 0]$ и центром (∞) , при этом матрица LM удовлетворяет условию $\theta(v, u)LM \in R$ для всех v, u . При $v = 0$ имеем

$$\theta(0, u)LM = \begin{pmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + m(u) & u \\ u & 0 \end{pmatrix} = \theta(u, 0),$$

отсюда $f(u) = u$. Рассмотрение $u = 0$ не дает новых ограничений на функции f и m .

Во втором случае

$$\gamma = \begin{pmatrix} LM & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

является гомологией порядка 3 с осью $[0]$ и центром (0) , при этом $LM\theta(v, u) \in R$ для всех v, u . При $v = 0$

$$LM\theta(0, u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & m(u) + u \\ u & m(u) \end{pmatrix} = \theta(0, m(u)),$$

отсюда $f(u) = m(m(u)) + m(u) + u$. При $u = 0$ получим то же условие.

В третьем случае для $A = B = M$ должно выполняться условие (1.1). При $v = 0$ имеем

$$M^{-1}\theta(0, u)M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ m(u) & u \end{pmatrix} = \theta(m(u), u),$$

поэтому $m(m(x)) = m(x)$, $f(m(x)) = m(x)$. При $u = 0$ получаем

$$M^{-1}\theta(v, 0)M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + m(v) & f(v) \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ f(v) & v + m(v) \end{pmatrix} = \theta(f(v), v + m(v)),$$

поэтому $m(f(x)) = m(x) + f(x) + x$, $f(f(x)) = x$. Поскольку отображение $m(x)$ в общем случае не является биективным, полученные условия трудно преобразовать к более удобному виду.

Заметим, что если в третьем случае коллинеация γ является гомологией, то ее ось — особая прямая $[\infty]$, центр — точка $(0, 0)$, при этом матрица LM должна быть перестановочна со всеми матрицами регулярного множества. Из этого условия $LM\theta(v, u) = \theta(v, u)LM$ получим $f(v) = v$, $m(v) = 0$ для всех v , поэтому в силу линейности m и f регулярное множество является полем, т. е. плоскость π дезаргова.

Теорема 1 полностью доказана.

3. Случай $p > 2$

Лемма. Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(p^n)$ ($p > 2$ — простое), группа линейных автоморфизмов которой содержит подгруппу H , изоморфную симметрической группе S_3 . Тогда инволюции $\tau, \sigma \in H$ являются бэровскими, базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что

$$\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

регулярное множество плоскости в $GL_2(F) \cup \{0\}$ имеет вид

$$R = \left\{ \theta(v, u) = \begin{pmatrix} m(u) & f(v) \\ v & u \end{pmatrix} \mid u, v \in F \right\}, \quad (3.2)$$

где m, f — аддитивные взаимнооднозначные функции на F , причем $m(1) = 1$. При этом $\sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $A, B \in \{L, M\}$ при $p > 3$; $A, B \in \{L, A_1, A_2\}$ при $p = 3$; $(A, B) \neq (L, L)$,

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае нечетного порядка плоскости π центральные коллинеации порядка 2 в группе автоморфизмов Λ являются гомологиями и определяются матрицами

$$\begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

которые не сопряжены в Λ . Поэтому инволюции τ, σ , как и для $p = 2$, являются бэровскими коллинеациями. Воспользуемся результатами [10]: в подходящем базисе линейного пространства бэровская инволюция определяется матрицей (3.1), а регулярное множество имеет вид (3.2).

Инволюция σ должна удовлетворять условиям 1–3 из доказательства теоремы 1. При этом для матрицы A (аналогично для B) возможны четыре ситуации ($a \in F, a \neq 0$):

$$1) A = L; 2) p = 3 \text{ и } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}; 3) p = 3 \text{ и } A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 4) p \neq 3 \text{ и } A = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ 3/(4a) & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Для случаев 2)–4) можно выбрать замену базиса линейного пространства, упрощающую вид матрицы A и сохраняющую вид L . Действительно,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 3/(4a) & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(2a) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Если π — полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(3^n)$, то группа линейных над F автоморфизмов не содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3 .

Доказательство. Если $A = L$ или $B = L$, то $\gamma = \tau\sigma$ является гомологией порядка 3, что невозможно, так как $|\pi| - 1$ не делится на 3.

Для остальных выделенных в лемме случаев при $p = 3$ проверим выполнение условия (1.1). Непосредственные расчеты показывают, что

$$A_1^{-1}\theta(v, 0)A_1 = \begin{pmatrix} -f(v) & -f(v) \\ -v + f(v) & f(v) \end{pmatrix} = \theta(-v + f(v), f(v)) \Rightarrow f(f(v)) = 0 \quad \forall v;$$

$$A_2^{-1}\theta(v, 0)A_2 = \begin{pmatrix} -v & v - f(v) \\ -v & v \end{pmatrix} = \theta(-v, v) \Rightarrow f(-v) = v - f(v) \quad \forall v;$$

$$A_1^{-1}\theta(0, u)A_2 = \begin{pmatrix} m(u) & -m(u) \\ -m(u) & m(u) + u \end{pmatrix} = \theta(-m(u), m(u) + u) \Rightarrow m(m(u)) = 0 \quad \forall u;$$

$$A_2^{-1}\theta(0, u)A_1 = \begin{pmatrix} m(u) + u & u \\ u & u \end{pmatrix} = \theta(u, u) \Rightarrow m(u) = m(u) + u \quad \forall u.$$

Учитывая инъективность отображений m и f , заключаем, что все перечисленные случаи невозможны.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что частный случай $|\pi| = 81$ представлен первым автором в докладе на Международной конференции G2A2 (Екатеринбург, 2015): если полуполевая плоскость порядка 81 допускает бэровскую инволюцию в группе автотопизмов, то порядок группы автотопизмов равен 2^k , где $8 \leq k \leq 11$.

Теорема 3. Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} , с ядром, содержащим поле $F \simeq GF(p^n)$ ($p > 3$ — простое), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H , изоморфную симметрической группе S_3 . Тогда базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что регулярное множество плоскости в $GL_2(F) \cup \{0\}$ имеет вид (3.2). Кроме того,

- 1) если H содержит гомологию с осью $[0, 0]$ и центром (∞) , то $f(x) = -m(x)/3 \quad \forall x \in F$;
- 2) если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0) , то $f(m(x)) = m(f(x)) = -x/3 \quad \forall x \in F$;
- 3) если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0, 0)$, то $p - 3$ не является квадратом, $f(x) = -x/3$, $m(x) = x \quad \forall x \in F$, плоскость дезаргова;
- 4) если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям ($\forall x \in F$)

$$m(m(x)) = x, \quad f(f(x)) = \frac{1}{9}x,$$

$$m(f(x)) = -\frac{1}{3}m(x) - f(x) - \frac{1}{3}x, \quad f(m(x)) = \frac{1}{3}m(x) + f(x) - \frac{1}{3}x.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2 рассмотрим случаи для $p > 3$, выделенные в лемме.

При $(A, B) = (L, M)$ коллинеация $\gamma = \tau\sigma$ является гомологией с осью $[0, 0]$ и центром (∞) , поэтому матрица $LM = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ должна удовлетворять условию $\theta(v, u)LM \in R$ для всех $v, u \in F$. В силу замкнутости R по сложению вместо LM достаточно рассмотреть матрицу $N = 2LM + E$. Тогда при $v = 0$ получим $\theta(0, u)N = \begin{pmatrix} 0 & -m(u) \\ 3u & 0 \end{pmatrix} = \theta(3u, 0)$, откуда $f(x) = -m(x)/3$ для всех x . Случай $u = 0$ дает то же условие.

При $(A, B) = (M, L)$, аналогично, γ является гомологией с осью $[0]$ и центром (0) , матрица N удовлетворяет условию $N\theta(v, u) \in R$ для всех v, u . Рассматривая отдельно случаи $v = 0$ и $u = 0$, получим условие $f(m(x)) = m(f(x)) = -x/3$ для всех x .

При $A = B = M$ проверяем выполнение условия (1.1). При $v = 0$ получим

$$M^{-1}\theta(0, u)M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m(u) + 3u & m(u) - u \\ 3m(u) - 3u & 3m(u) + u \end{pmatrix} \in R,$$

из замкнутости регулярного множества по сложению следуют равенства

$$m(3m(u) + u) = m(u) + 3u, \quad f(3m(u) - 3u) = m(u) - u.$$

Аналогично, при $v = 0$ условие (1.1) приводит к равенствам

$$m(-v - 3f(v)) = v + 3f(v), \quad f(-v + 9f(v)) = v - f(v).$$

Преобразуя, получаем условия теоремы 3.

Дополнительно рассмотрим ситуацию, когда коллинеация γ является гомологией с осью $[\infty]$ и центром $(0, 0)$. Тогда матрица LM централизует R , поэтому матрица $N = 2LM + E$ также удовлетворяет условию $N\theta(v, u) = \theta(v, u)N$ для всех v, u , $f(v) = -v/3$, $m(u) = u$,

$$|\theta(v, u)| = \begin{vmatrix} u & -\frac{1}{3}v \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{u^2}{3} \left(3 + \left(\frac{v}{u} \right)^2 \right).$$

Если $p-3$ не является квадратом, то $|\theta(v, u)| \neq 0$ для всякой ненулевой матрицы, и плоскость π дезаргова.

Теорема 3 доказана.

Рассматривая произведение гомологий

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & LM \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} LM & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

приходим к очевидному следствию теоремы 3.

Следствие. Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} ($p = 2$ или $p > 3$ — простое число) с ядром $\supseteq GF(p^n)$, ее группа линейных автоморфизмов содержит подгруппы

$$H_1 = \langle \tau, \gamma_1 \rangle \simeq S_3, \quad H_2 \langle \tau, \gamma_2 \rangle \simeq S_3,$$

где τ — бэровская инволюция; γ_1 — гомология порядка 3 с осью $[0, 0]$ и центром (∞) ; γ_2 — гомология порядка 3 с осью $[0]$ и центром (0) . Тогда подгруппа $H_3 = \langle \tau, \gamma_1\gamma_2 \rangle$ также изоморфна S_3 и не содержит гомологий.

4. Примеры

Заметим, что указание матричного представления регулярного множества с достаточно общими ограничениями не является достаточным условием существования плоскости трансляций с таким регулярным множеством. Так, например, существование полуполевыми плоскостями ранга 2 с регулярным множеством (2.1), допускающих бэровскую инволюцию (см. [4]), было подтверждено только в 1990 г. Хуангом и Джонсоном, построившими примеры восьми полуполевыми плоскостями порядка 64 (см. [12]). Перечисление любых условий на группу автоморфизмов приводит к естественному вопросу: существуют ли проективные плоскости при таких условиях? Покажем, что множество недезарговских полуполевыми плоскостей, описанное теоремами 1 и 3, не пусто, т. е. найдем примеры таких плоскостей минимального возможного порядка. Напомним, что всякая аддитивная функция $g(x)$ на $GF(p^n)$ согласно [11] имеет вид

$$g(x) = c_0x + c_1x^p + c_2x^{p^2} + \dots + c_{n-1}x^{p^{n-1}}, \quad c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in GF(p^n).$$

Пример 1. Пусть $p = 2$, $p^{2n} = 16$, $F = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$, $\alpha^2 = \alpha + 1$. Известно, что существуют ровно две неизоморфные недезарговы полуполевыми плоскости порядка 16 (см., например, [5]). Покажем, что одна из них дает необходимый пример. Рассмотрим условия в теореме 1, полагая

$$m(x) = m_0(x + x^2), \quad f(x) = f_0x + f_1x^2 \quad (x \in F), \quad \text{где } m_0, f_0, f_1 \in F.$$

Достаточным условием существования полуполевого плоскости, удовлетворяющей теореме 1, является требование

$$\begin{vmatrix} u + v + m_0(v + v^2) & f_0v + f_1v^2 + m_0(u + u^2) \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall u, v \in F, (u, v) \neq (0, 0). \quad (4.1)$$

Перебор коэффициентов m_0, f_0, f_1 , удовлетворяющих условиям теоремы 1 и (4.1), приводит к результатам, перечисленным в табл. 1.

Таким образом, найдены четыре полуполевыми плоскости порядка 16 с регулярными множествами R_1, R_2, R_3, R_4 , группа линейных автоморфизмов которых содержит подгруппу, изоморфную S_3 . Отметим, что эти плоскости изоморфны. Действительно, автоморфизм $x \rightarrow x^2$ поля F переводит R_3 в R_4 , и непосредственная проверка показывает, что выполнены равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_2, \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} R_1 = R_3.$$

Пример 2. Построим примеры плоскостей порядка 625, используя результаты теоремы 3. Рассмотрим поле $GF(25) = GF(5^2)$ как фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}_5[x]$ по идеалу, порожденному неприводимым в $\mathbb{Z}_5[x]$ многочленом $x^2 - 2$,

$$GF(25) \simeq \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2) = \{0, 1, 2, 3, 4, \alpha, \alpha + 1, \dots, 4\alpha + 4\}, \quad \text{где } \alpha^2 = 2.$$

Т а б л и ц а 1

Регулярное множество	m_0	f_0	f_1	Случай теоремы 1
R_1	1	1	0	1
R_2	1	0	1	2
R_3	α	1	0	1, 2, 4
R_4	$\alpha + 1$	1	0	1, 2, 4

Т а б л и ц а 2

№	m_0	m_1	f_0	f_1	Случай теоремы 3
1	2	4	1	2	1
2	4	2	2	1	1
3	$\alpha + 4$	$4\alpha + 2$	$3\alpha + 2$	$2\alpha + 1$	1
4	$2\alpha + 1$	3α	$\alpha + 3$	4α	1
5	$2\alpha + 2$	$3\alpha + 4$	$\alpha + 1$	$4\alpha + 2$	1
6	2	4	2	1	2
7	4	2	1	2	2
8	$\alpha + 4$	$4\alpha + 2$	$\alpha + 1$	$4\alpha + 2$	2
9	$2\alpha + 1$	3α	$4\alpha + 3$	α	2
10	$2\alpha + 2$	$3\alpha + 4$	$3\alpha + 2$	$2\alpha + 1$	2
11	α	$4\alpha + 1$	2α	4	4
12	2α	$3\alpha + 1$	4α	3α	4
13	α	$4\alpha + 1$	3α	$2\alpha + 3$	1, 2, 4
14	$\alpha + 4$	$4\alpha + 2$	$3\alpha + 2$	$2\alpha + 1$	1, 2, 4

Рассмотрим условия в теореме 3, полагая

$$m(x) = m_0x + m_1x^5, \quad f(x) = f_0x + f_1x^5 \quad (x \in F), \quad \text{где } m_0, m_1, f_0, f_1 \in F.$$

Достаточным условием существования полуполевого пространства, удовлетворяющей теореме 3, является требование

$$\begin{vmatrix} m_0u + m_1u^5 & f_0v + f_1v^5 \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall u, v \in F, \quad (u, v) \neq (0, 0). \quad (4.2)$$

Компьютерный перебор коэффициентов m_0, m_1, f_0, f_1 , удовлетворяющих условиям теоремы 3 и (4.2), приводит к результатам, перечисленным в табл. 2. В таблице исключены изоморфные копии, полученные автоморфизмом $x \rightarrow x^5$ поля F .

Дальнейшее выделение в приведенном списке попарно изоморфных полуполевого пространства не проводилось, поскольку значительно более трудоемко в сравнении со случаем $|\pi| = 16$. Существование полуполевого пространства порядка 625 с подгруппой линейных автоморфизмов, изоморфной S_3 , подтверждено.

В заключение следует заметить, что использованный метод может быть обобщен на случай полуполевого пространства ранга более 2. Доказанные результаты и найденные примеры могут быть использованы при дальнейшем исследовании полуполевого пространства с ограничениями на группу коллинеаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д., Хухро Е.И.** Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь: изд. 16-е, доп., включающее архив решенных задач / Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2006. 193 с.
2. **Подуфалов Н.Д., Дураков Б.К., Кравцова О.В., Дураков Е.Б.** О полуполевого пространствах порядка 16^2 // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 616–623.
3. **Jha V., Johnson N.L.** The translation planes of order 81 admitting $SL(2, 5)$ // Note di Matematica. 2005. Vol. 24, no. 2. P. 59–73. doi: 10.1285/i15900932v24n2p59.
4. **Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G.** A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29. P. 7–43. doi: 10.1007/BF00147468.
5. **Levchuk V.M., Kravtsova O.V.** Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no 4. P. 688–698. doi: 10.1134/S1995080217040138.
6. **Rúa I.F., Combarro E.F., Ranilla J.** Classification of semifields of order 64 // J. Algebra, 2009, vol. 322, no. 11, pp. 4011–4029. doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.02.020.
7. **Кравцова О.В., Моисеенкова Т.В.** Полуполевого проективные пространства, допускающие подгруппу коллинеаций, изоморфную S_3 . // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы Междунар. конф. посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 260–262.
8. **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. N Y: Springer-Verlag, 1973. 292 p.
9. **Johnson N.L., Jha V., and Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. Boca Raton; London; N Y: Chapman and Hall, 2007. 861 p.
10. **Кравцова О.В.** Полуполевого пространства, допускающие бэровскую инволюцию // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. №2. С. 26–38.
11. **Vaughan, T.P.** Polynomials and linear transformations over finite fields // J. Reine Angew. Math. 1974. Vol. 267. P. 179–206. doi: 10.1515/crll.1974.267.179.
12. **Huang H., Johnson N.L.** 8 semifield planes of order 8^2 // Discrete Math. 1990. Vol. 80, no. 1. P. 69–79. doi: 10.1016/0012-365X(90)90296-T.

Поступила 25.07.2019

После доработки 7.10.2019

Принята к публикации 14.10.2019

Кравцова Ольга Вадимовна
 канд. физ.-мат. наук, доцент
 доцент кафедры высшей математики № 2
 Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
 e-mail: ol71@bk.ru

Моисеевкова Татьяна Владимировна
 канд. физ.-мат. наук
 доцент кафедры высшей математики № 2
 Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
 e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

REFERENCES

1. Mazurov V.D. and Khukhro E.I. (eds.). *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory, 16th ed.*, Novosibirsk: Sobolev Inst. Math. Publ., 2006, 195 p.
2. Podufalov N.D., Durakov B.K., Kravtsova O.V., Durakov E.B. On semifield planes of order 16^2 . *Siberian Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 3, pp. 535–541. doi: 10.1007/BF02104857.
3. Jha V., Johnson N.L. The translation planes of order 81 admitting $SL(2, 5)$. *Note di Matematica*, 2005, vol. 24, no. 2, pp. 59–73. doi: 10.1285/i15900932v24n2p59.
4. Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 . *Geom. Dedicata*, 1989, vol. 29, pp. 7–43. doi: 10.1007/BF00147468.
5. Levchuk V.M., Kravtsova O.V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes. *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, no. 4, pp. 688–698. doi: 10.1134/S1995080217040138.
6. Rúa I.F., Combarro E.F., Ranilla J. Classification of semifields of order 64. *J. of Algebra*, 2009, vol. 322, no. 11, pp. 4011–4029. doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.02.020.
7. Kravtsova O.V., Moiseenkova T.V. Semifield projective plane that admit collineation subgroup isomorphic to S_3 . In: XVI International Conference “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications”, dedicated to the 80th anniversary of the birth of professor Michel Desa, Tula: Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy Publ., 2019, pp. 260–262.
8. Hughes D.R., Piper F.C. *Projective planes*. New York: Springer-Verlag, 1973, 292 p. ISBN: 9780387900445.
9. Johnson N.L., Jha V., and Biliotti M. *Handbook of finite translation planes*. Boca Raton; London; N Y: Chapman and Hall, 2007, 861 p. ISBN: 1-58488-605-6/hbk.
10. Kravtsova O.V. Semifield planes of even order that admit the baer involution. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 26–37 (in Russian).
11. Vaughan T.P. Polynomials and linear transformations over finite fields. *J. Reine Angew. Math.*, 1974, vol. 267, pp. 179–206. doi: 10.1515/crll.1974.267.179.
12. Huang H., Johnson N.L. 8 semifield planes of order 8^2 . *Discrete Math.*, 1990, vol. 80, no. 1, pp. 69–79. doi: 10.1016/0012-365X(90)90296-T.

Received July 25, 2019

Revised October 7, 2019

Accepted October 14, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A).

Olga Vadimovna Kravtsova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: ol71@bk.ru.

Tatyana Vladimirovna Moiseenkova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: tanya-mois11@yandex.ru.

Cite this article as: O. V. Kravtsova, T. V. Moiseenkova. Semifield planes of rank 2 admitting the group S_3 , *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 118–128.