ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.988.68

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Рассматриваются некорректно поставленные задачи локализации (определения положения) линий разрыва зашумленной функции двух переменных (изображения). Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, и уровень возмущения δ известен. Ранее авторами был изучен случай кусочно-гладких линий разрыва, которые, как правило, отвечают границам искусственных объектов на изображении. В настоящей статье разрабатывается подход к изучению алгоритмов локализации, позволяющий ослабить условия на гладкость линий разрыва и включить в рассмотрение также негладкие линии разрыва, которые могут описывать границы естественных объектов. Для решения рассматриваемой задачи на основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные алгоритмы приближения линий разрыва множеством точек равномерной сетки. Формулируются условия на точную функцию и строится класс корректности, содержащий, в частности, функции с негладкой линией разрыва. Проводится теоретическое изучение построенных алгоритмов на данном классе. Устанавливается, что предложенные алгоритмы позволяют получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритма локализации.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линии разрыва, глобальная локализация, дискретизация, порог разделимости.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On the localization of nonsmooth discontinuity lines of a function of two variables.

We consider ill-posed problems of localizing (finding the position of) the discontinuity lines of a perturbed function of two variables (an image). For each node of a uniform square grid with step τ, the average values of the function over a square $\tau \times \tau$ are assumed to be known. The perturbed function approximates an exact function in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$, and the perturbation level δ is known. Earlier, the authors studied the case of piecewise smooth discontinuity lines, which, as a rule, correspond to the borders of artificial objects in the corresponding image. In the present paper, an approach to the study of localization algorithms is developed, which makes it possible to weaken the conditions on the smoothness of discontinuity lines and consider, in particular, nonsmooth discontinuity lines, which can describe the boundaries of natural objects. To solve the problem under consideration, we construct and analyze global discrete algorithms for the approximation of discontinuity lines by sets of points of a uniform grid on the basis of averaging procedures. Conditions on the exact function are formulated and a correctness class is constructed, which includes functions with nonsmooth discontinuity lines. A theoretical analysis of the constructed algorithms is carried out on this class. It is established that the proposed algorithms make it possible to obtain a localization error of order $O(\delta)$. We also estimate other important parameters, which characterize the operation of the localization algorithm.

Keywords: ill-posed problem, regularization method, discontinuity lines, global localization, discretization, separability threshold.

MSC: 65J20, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-9-23

Введение

Часто на практике необходимо локализовать (определить положение) линий, вне которых измеряемая функция f двух переменных гладкая, а в каждой точке линий терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Такого рода проблемы имеют место, например, при обработке изображений, где линии разрыва являются границами объектов на изображении. Границам искусственных объектов, как правило, отвечают кусочно-гладкие линии с небольшим числом кусков. Границы естественных объектов могут быть нерегулярны, и необходимо научиться проводить оценки на классах, содержащих нерегулярные функции.

Рассматривается случай, когда точная функция f неизвестна, а известны дискретизация приближенно заданной функции f^δ: $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta$, $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$ и уровень возмущения δ. В работе выбран следующий подход к дискретизации: для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле заданы средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Нетрудно показать, что линии разрыва функции f^δ могут не аппроксимировать линии разрыва точной функции f. Следовательно, задача локализации линий разрыва в этом случае некорректно поставлена [1–3] и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы.

Задача локализации в настоящее время вызывает значительный интерес, и существует большое количество прикладных алгоритмов, позволяющих определить положение линии разрыва зашумленной функции двух переменных. Поэтому привести полный набор соответствующих ссылок технически невозможно. Некоторые алгоритмы, их численную реализацию и ссылки на литературу можно найти, например, в [4; 5] (см. также [6, гл.10]). Однако в этих работах полное теоретическое обоснование применяемых на практике алгоритмов отсутствует. Насколько известно авторам, первые строгие теоретические результаты (оценки точности аппроксимации) по этой тематике были получены в [7; 8] (см. также работу [9], где изучались вопросы дискретизации). Но эти оценки носили локальный характер и предполагали локальную гладкость линий разрыва. Глобальный теоретический анализ алгоритмов усреднения для локализации линий разрыва, по-видимому, впервые проведен в работе [10], где линии разрыва являлись замкнутыми ломаными. Этот анализ достаточно просто обобщается на кусочно-гладкие линии разрыва. Однако, например, если линия имеет изломы в каждой точке, то методика [10] не может гарантировать, что множество точек равномерной сетки, которые выдаст метод локализации в качестве множества, аппроксимирующего линии разрыва, будет не пусто. При этом, простейший анализ задач локализации показывает, что ограничиться непрерывностью линии разрыва нельзя и введение дополнительной априорной информации о линии является необходимостью, так как при фиксированном уровне погрешности δ для произвольной линии разрыва Γ нельзя гарантировать работоспособность ни для какого метода. В настоящей работе предлагается подход к изучению методов локализации при более слабой априорной информации, что позволяет наряду с гладкими рассматривать негладкие границы (имеющие изломы во всех точках).

Основная идея заключается во введении последовательности замкнутых ломаных Γ_s, которые аппроксимируют линию Γ с точностью q_s ($q_s \to 0$ при $s \to \infty$). Все требования на точную линию разрыва накладываются посредством ограничений на масштабы q_s и ломаные линии Γ_s (формально это записывается как принадлежность точной функции f классу корректности). Таким образом, все линии классифицируются в зависимости от существования аппроксимирующей последовательности ломаных с заданными свойствами. При улучшении этих свойств улучшается качество приближения линий разрыва методами усреднения.

В настоящей работе рассматривается частный случай: точная функция имеет одну замкнутую линию разрыва и все оценки делаются достаточно грубо. Поэтому необходимо отметить, что полученные результаты могут быть существенно усилены, а априорные требования на линии разрыва еще ослаблены. В конце статьи приведены возможные направления модификации полученных результатов.

После введения класса корректности $\mathfrak{M}$, содержащего, в частности, функции с негладкой линией разрыва, формулируется задача локализации. Для решения рассматриваемой проблемы на основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации линии разрыва точной функции множеством точек равномерной сетки. Теоретическое изучение построенных алгоритмов проводится на классе корректности в соответствии с модифицированной схемой работы [10]. Устанавливается, что предложенные алгоритмы позволяют получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритмов локализации.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 определены последовательность замкнутых ломаных Γ_s, которые аппроксимируют линию разрыва Γ, и последовательность масштабов q_s, сформулированы требования к масштабам и ломаным линиям при всех s. Введены классы корректности $\mathfrak{M}$, зависящие от параметров. В разд. 2 получены вспомогательные оценки. Последний раздел посвящен конструированию глобальных дискретных алгоритмов аппроксимации и доказательству основной теоремы с оценками точности. Там же приведены два примера применения теоремы. В заключении кратко сформулированы итоги и рассмотрены возможные направления модификации результатов настоящей статьи.

1. Характеризация негладких линий разрыва и построение классов корректности

Для простоты изложения будем рассматривать множество функций $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, которые вне квадрата $\mathfrak{D} = \{(x,y)\colon |x| \le d, |y| \le d\}$, $d > 0$, равны нулю и не имеют скачка на границе $\mathfrak{D}$. Также предположим, что множество линий разрыва функции $f(x,y)$ состоит из одной замкнутой линии Γ. Все эти предположения могут быть ослаблены.

Начнем с введения требований на последовательности масштабов q_s и замкнутые ломаные линии Γ_s, $s = 1, 2, \dots$, которые в определенном смысле аппроксимируют линию разрыва Γ. Множество натуральных чисел $1, 2, \dots$ будем обозначать через $\mathbb{N}$.

Определение 1. Пусть заданы положительные вещественные числа $\nu < 1$, $\bar{q}$. Назовем последовательность положительных чисел $\boldsymbol{q}[\nu, \bar{q}] = \{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ *регулярной последовательностью масштабов*, если $\lim\limits_{s\to\infty} q_s = 0$, $q_1 \ge \bar{q}$ и для всех $s \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\nu \le q_{s+1}/q_s < 1$.

Введем необходимые обозначения. Пусть Γ_s — замкнутая ломаная без точек самопересечения, $\Gamma_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma_{sk}$, где Γ_{sk} — отрезки; l_s — натуральное число. Без ограничения общности можно считать, что отрезки Γ_{sk} занумерованы так, что $\Gamma_{sk}, \Gamma_{sk+1}$ являются смежными отрезками (поскольку Γ_s — замкнутая ломаная, то отрезки $\Gamma_{sl_s}, \Gamma_{s1}$ также смежны); через ϑ_{sk} обозначим наименьший угол между смежными отрезками $\Gamma_{sk}, \Gamma_{sk+1}$ (соответственно через ϑ_{sl_s} обозначим наименьший угол между смежными отрезками $\Gamma_{sl_s}, \Gamma_{s1}$). Обозначим через $|\Gamma_{sk}|$ длину отрезка Γ_{sk}, $k = 1, 2, \dots, l_s$. Введем величину

$$\Theta_{sk} = \begin{cases} (\sin\vartheta_{sk})^{-1}, & 0 < \vartheta_{sk} < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \le \vartheta_{sk} < \pi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Можно определить разные эквивалентные понятия окрестности ломаной Γ_s. Мы выберем такое понятие окрестности, которое связано с анализируемыми далее методами усреднения и для которого все дальнейшие вычисления проводятся существенно проще. Будем также далее без специальных оговорок считать, что $\boldsymbol{q}[\nu, \bar{q}] = \{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ — регулярная последовательность масштабов.

Определение 2. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ введем окрестность Q_{sk} каждого из звеньев Γ_{sk} ломаной Γ_s:

— если наименьший угол между осью y и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше или равен $\pi/4$, то положим $Q_{sk} = \{(x,y) \in \mathfrak{D}\colon \forall\, (\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_{sk}\ \ |x-\bar{x}| \le q_s, y = \bar{y}\}$;

— если наименьший угол между осью x и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше $\pi/4$, то положим $Q_{sk} = \{(x,y) \in \mathfrak{D}\colon \forall\, (\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_{sk}\ \ x = \bar{x}, |y-\bar{y}| \le q_s\}$.
Множество $Q_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} Q_{sk}$ назовем *окрестностью* ломаной Γ_s. Если последовательность окрестностей Q_s является вложенной: $Q_s \subseteq Q_{s-1}$, то будем говорить, что последовательность ломаных Γ_s *аппроксимирует* линию $\Gamma = \bigcap_{s=1}^{\infty} Q_s$.

Определение 3. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ введем подмножество $\bar{\Gamma}_{sk} \subset \Gamma_{sk}$, на котором введем функцию скачка Δ_{sk}:

— если наименьший угол между осью y и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше или равен $\pi/4$, то положим $\bar{\Gamma}_{sk} = \{(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_{sk} \colon (\bar{x} \pm q_s, \bar{y}) \notin Q_{sj},\ j \neq k,\ j = 1,2,\ldots,l_s\}$; для $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{\Gamma}_{sk}$ введем функцию $\Delta_{sk}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x}+q_s,\bar{y}) - f(\bar{x}-q_s,\bar{y})$;

— если наименьший угол между осью x и линией, на которой лежит отрезок Γ_{sk}, меньше $\pi/4$, то положим $\bar{\Gamma}_{sk} = \{(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_{sk} \colon (\bar{x}, \bar{y} \pm q_s) \notin Q_{sj},\ j \neq k,\ j = 1,2,\ldots,l_s\}$; для $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{\Gamma}_{sk}$ введем функцию $\Delta_{sk}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}+q_s) - f(\bar{x},\bar{y}-q_s)$.

Далее без специальных оговорок будем считать, что последовательность замкнутых ломаных без самопересечения $\Gamma_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma_{sk}$ аппроксимирует линию Γ и для всех $s \in \mathbb{N}$ замкнутая ломаная Γ_s одна. Рассмотрим априорную информацию о гладкости функции f вне линии разрыва в виде принадлежности определенному ниже множеству $MV_q(\mathbb{R}^2)$. Здесь будем использовать то обстоятельство, что для всех s граница множества Q_s, которую обозначим через ∂Q_s, состоит из ломаных. При этом ясно, что $\partial Q_s = \partial^- Q_s \bigcup \partial^+ Q_s$, где $\partial^- Q_s$ — граница между Q_s и частью квадрата $\mathfrak{D}$ вне Q_s, соответственно $\partial^+ Q_s$ — граница между Q_s и частью $\mathfrak{D}$, попавшей внутрь Q_s.

О п р е д е л е н и е 4. Обозначим через $MV_q(\mathbb{R}^2)$ множество функций двух переменных $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ таких, что кроме наложенных выше требований дополнительно выполняются следующие:

— для всех прямоугольников $\mathfrak{D}' = [A,B] \times [C,D]$ со сторонами, параллельными осям координат, если для некоторого $s \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{D}' \cap Q_s = \varnothing$, то для почти всех $\bar{y} \in [C,D]$ функция одной переменной $f(x,\bar{y})$ абсолютно непрерывна для $x \in (A,B)$; для почти всех $\bar{x} \in [A,B]$ функция одной переменной $f(\bar{x},y)$ абсолютно непрерывна для $y \in (C,D)$;

— для любой точки $(\bar{x},\bar{y}) \in \partial^+ Q_s$, $s \in \mathbb{N}$, существуют пределы $f^+(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x,\bar{y}) = \lim\limits_{y\to\bar{y}} f(\bar{x},y)$, $f_x'^+(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f_x'(x,\bar{y})$, $f_y'^+(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{y\to\bar{y}} f_y'(\bar{x},y)$ при условии, что при предельном переходе точка остается внутри Q_s;

— для любой точки $(\bar{x},\bar{y}) \in \partial^- Q_s$, $s \in \mathbb{N}$, существуют пределы $f^-(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x,\bar{y}) = \lim\limits_{y\to\bar{y}} f(\bar{x},y)$, $f_x'^-(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f_x'(x,\bar{y})$, $f_y'^-(\bar{x},\bar{y}) = \lim\limits_{y\to\bar{y}} f_y'(\bar{x},y)$ при условии, что при предельном переходе точка остается снаружи Q_s;

— функции $f^\pm(\bar{x},\bar{y})$, $f_x'^\pm(\bar{x},\bar{y})$, $f_y'^\pm(\bar{x},\bar{y})$ непрерывны на $\partial^+ Q_s$ и $\partial^- Q_s$ соответственно для всех $s \in \mathbb{N}$.

Заметим, что введенная выше априорная информация гарантирует непрерывность функций $\Delta_{sk}(x,y)$ для всех $(x,y) \in \bar{\Gamma}_{sk}$, $s \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,\ldots,l_s$. В следующем определении введем класс корректности $\mathfrak{M}$, на котором будут изучаться рассматриваемые в работе методы локализации.

О п р е д е л е н и е 5. Класс корректности $\mathfrak{M}$ состоит из функций $f \in MV_q(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих следующим ограничениям:

(i) задано положительное число r: $|f(x,y)| \le r$ для всех $(x,y) \in \mathfrak{D}$; $|f_x'(x,y)| \le r$, $|f_y'(x,y)| \le r$ для $(x,y) \notin Q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$; $|f_x'^\pm(x,y)| \le r$, $|f_y'^\pm(x,y)| \le r$ для $(x,y) \in \partial Q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

(ii) задано положительное число Θ такое, что $\max\limits_{s\in\mathbb{N},\,1\le k\le l_s} \Theta_{sk} \le \Theta$;

(iii) задано положительное число $\Delta^{\min}$ такое, что $\min\limits_{s\in\mathbb{N},\,1\le k\le l_s} \{|\Delta_{sk}(x,y)| \colon (x,y) \in \bar{\Gamma}_{sk}\} \ge \Delta^{\min}$;

(iiii) задано положительное число p такое, что $\max\limits_{s\in\mathbb{N},\,1\le k\le l_s} \dfrac{\Theta_{sk} q_s}{|\Gamma_{sk}|} \le p$.

Класс корректности $\mathfrak{M}$ зависит от параметров $\nu, \bar{q}, r, \Theta, \Delta^{\min}, p$. Поскольку в дальнейшем на параметр p будут накладываться требования, а остальные параметры предполагаются фиксированными, то для компактности обозначений договоримся данный класс обозначать как $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(p)$.

2. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом $\tau = 2d/M$, где M — целое положительное число; $x^n = -d + (n - 1/2)\tau$, $y^m = -d + (m - 1/2)\tau$, где $n = 1, 2, \dots, M$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}(p)$; $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)\colon \|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$; задана равномерная сетка $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ, в узлах которой заданы (измерены) следующие величины:

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m-\tau/2}^{y^m+\tau/2} \int\limits_{x^n-\tau/2}^{x^n+\tau/2} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{2.1}$$

По значениям $f^\delta_{n,m}$ и уровню погрешности δ требуется аппроксимировать линию разрыва Γ функции f подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

Для построения регулярных методов локализации с целью подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^\delta_{n,m}$. Для проведения анализа нам понадобятся как непрерывные усредняющие функции, так и их дискретные аналоги. Определим два класса непрерывных усредняющих функций одной переменной. В качестве одного класса выберем множество ΦF, состоящее из финитных функций $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a) ϕ дважды непрерывно дифференцируема и C_1 — положительная константа такая, что $|\phi''(t)| \le C_1$;

(b) существуют $0 < b < 1$, $0 < a \le 1$ такие, что $a \le \phi(t) \le 1$ для $t \in [-b, b]$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Второе множество усредняющих функций Ψ также состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a') ψ непрерывно дифференцируема и C_2 — положительная константа такая, что $|\psi'(t)| \le C_2$;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(t) dt = 1$;

(c') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$; $\psi(t) \ge 0$ для $t \in [-1, 1]$.

Ясно, что для $\phi \in \Phi F$ имеем $|\phi'(t)| \le C_1$ и $\phi \in W^1_1(\mathbb{R})$ (здесь $W^1_1(\mathbb{R})$ — соболевское пространство функций), а для $\psi \in \Psi$ легко показать, что $\psi(t) \le C_2$. Через $\|\cdot\|_{L_1}$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$. Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Для упрощения записи вместо $(\phi_{\lambda_1}(t))'_t|_{t=u}$ будем писать $\phi'_{\lambda_1}(u)$.

Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных будем вычислять по формуле $\Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} = \phi'_{\lambda_1}(i\tau)\psi_{\lambda_2}(j\tau)\tau^2$, где $-n_1 \le i \le n_1$, $-n_2 \le j \le n_2$. Параметры n_1, n_2, которые являются натуральными числами, будут определены ниже как функции уровня погрешности δ и шага сетки τ. (Очевидно, параметры должны быть быть определены таким образом, чтобы шаг τ был меньше λ_1 и λ_2.) Вспомогательные дискретные функции G^δ_x, G^δ_y вычисляются в точках (x^n, y^m) сетки T по формулам

$$G^\delta_x(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{x, \lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i, m+j}, \tag{2.2}$$

$$G^\delta_y(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{y, \lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{i=-n_2}^{n_2} \sum_{j=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ji}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i, m+j}. \tag{2.3}$$

Определим вспомогательные функции непрерывного аргумента при отсутствии возмущений через

$$F_x(x,y) = F_{x,\lambda_1\lambda_2}(x,y) = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\xi d\eta, \quad (x,y)\in\mathfrak{D}, \tag{2.4}$$

$$F_y(x,y) = F_{y,\lambda_1\lambda_2}(x,y) = \int\limits_{x-\lambda_2}^{x+\lambda_2}\int\limits_{y-\lambda_1}^{y+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(y-\eta)\psi_{\lambda_2}(x-\xi)d\eta d\xi, \quad (x,y)\in\mathfrak{D}. \tag{2.5}$$

Поясним смысл этих функций и используемых обозначений. Функция $F_x(x,y)$ в (2.4) есть усреднение точной функции f по переменной x с помощью $\phi'_{\lambda_1}(x)$ и по переменной y с помощью $\psi_{\lambda_2}(y)$. Дискретизация этой функции, когда вместо точной функции f используется приближенная функция f^δ, обозначается через $G^\delta_x(x^n,y^m)$. Функции $F_y(x,y)$ и $G^\delta_y(x^n,y^m)$ получаются, если переменные x и y поменять местами.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi\in\Phi F$, $\psi\in\Psi$ и натуральные числа n_1,n_2. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при*

$$\lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau$$

для $(x^n,y^m)\in T$ справедливы следующие оценки:

$$\left|G^\delta_x(x^n,y^m) - F_x(x^n,y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big),$$

$$\left|G^\delta_y(x^n,y^m) - F_y(x^n,y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big), \quad A_0 = 4C_1C_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [9] (см. лемму 1) доказана первая оценка при фиксированном y^m. Вторая оценка получается аналогично. □

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем метрику в $\mathbb{R}^2$

$$\rho(U;V) = \inf\big\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\colon (x_1,y_1)\in U,\ (x_2,y_2)\in V\big\}.$$

В следующих леммах в соответствии с основной идеей проведения оценок в настоящей работе будем получать оценки относительно точной функции f с линией разрыва Γ посредством формулировки ограничений на Γ_s при фиксированном s.

Лемма 2. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi\in\Phi F$, $\psi\in\Psi$ и натуральное число s. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $(x,y)\in\mathfrak{D}$ для любых положительных λ_1,λ_2 при выполнении дополнительного условия $\rho((x,y);\Gamma_s)\ge\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+q_s$ имеют место оценки*

$$|F_x(x,y)|\le A_1\lambda_1, \quad |F_y(x,y)|\le A_1\lambda_1, \quad A_1 = \|\phi\|_{L_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Поскольку при выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma_s)\ge\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+q_s$ в области интегрирования формул (2.4), (2.5) функция f непрерывна, то доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 [9]. □

Введем параметрическое задание отрезков $\{\Gamma_{sk}\}_1^{l_s}$: $x_{sk}(t) = a^x_{sk}t + b^x_{sk}$, $y_{sk}(t) = a^y_{sk}t + b^y_{sk}$, $0\le t\le|\Gamma_{sk}|$, a^x_{sk}, b^x_{sk}, a^y_{sk}, $b^y_{sk}\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots,l_s$. Напомним, что функция скачка $\Delta_{sk}(x,y)$ для $(x,y)\in\bar\Gamma_{sk}\subset\Gamma_{sk}$ введена в определении 3. Поскольку $x=x_{sk}(t)$, $y=y_{sk}(t)$, то $\Delta_{sk}(x,y) = \Delta_{sk}(t)$.

Для произвольного $K_s > 0$ положим

$$\varepsilon_{sk} = K_s \Theta_{sk}, \tag{2.6}$$

где Θ_{sk} определено в (1.1). Определим множество:

$$\Gamma^{\varepsilon}_{sk} \quad \text{— часть отрезка } \ \Gamma_{sk}\colon t \in (\varepsilon_{sk-1}, |\Gamma_{sk}| - \varepsilon_{sk}). \tag{2.7}$$

Заметим, что при $K_s = q_s$ имеем $\Gamma^{\varepsilon}_{sk} \subseteq \bar{\Gamma}_{sk}$. Обозначим $\Gamma^{\varepsilon}_{s} = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma^{\varepsilon}_{sk}$. Условие непустоты $\Gamma^{\varepsilon}_{sk}$ будет приведено ниже в теореме.

В следующей лемме получены оценки снизу для функций F_x, F_y (см. формулы (2.4), (2.5)) в малой окрестности Γ^{ε}_{s}. Напомним, что величины a, b, C_1 содержатся в условиях (a), (b) на функцию ϕ; величина $\Delta^{\min}$ — в условии (iii) на функцию f; τ — шаг сетки T; $a^x_{sk}, b^x_{sk}, a^y_{sk}, b^y_{sk}$ — коэффициенты в параметрическом задании отрезка Γ_{sk}. Нам также понадобятся константы $A_1 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_2 = 2C_1$, $A_3 = 4C_1$. Отметим, что $C_1 \geq 1$.

Лемма 3. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и натуральное число s. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при $\tau \leq b\lambda_1$ для любых положительных λ_1, λ_2 и при выполнении дополнительного условия разделимости $\min\limits_{1\leq k,j\leq l_s,\, k\neq j} \rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk}; \Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \geq K_s$, где в (2.6), (2.7) константа $K_s \geq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$, для точек $(x, y) \in \mathfrak{D}\colon \rho((x, y); \Gamma^{\varepsilon}_{sk}) \leq \tau$ имеют место оценки:*

(1) *если $|a^x_{sk}/a^y_{sk}| \leq 1$, то*

$$|F_x(x, y)| \geq a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2 + \tau}{\lambda_1} - A_3\frac{q_s}{\lambda_1};$$

(2) *если $|a^y_{sk}/a^x_{sk}| < 1$, то*

$$|F_y(x, y)| \geq a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2 + \tau}{\lambda_1} - A_3\frac{q_s}{\lambda_1}.$$

Доказательство. Покажем справедливость оценки в п. (1) леммы (оценка в п. (2) доказывается аналогично). Благодаря выбору (2.6), (2.7) имеем $\rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk}; \Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \geq K_s$ в случае, когда отрезки Γ_{sk}, Γ_{sj} являются смежными. Поскольку $K_s \geq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$, то условие разделимости $\min\limits_{k\neq j} \rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk}; \Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \geq K_s$ гарантирует, что в окружности с центром в точке (x, y) такой, что $\rho((x, y); \Gamma^{\varepsilon}_{sk}) \leq \tau$, радиусом $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$ функция f непрерывна вне Q_{sk}. Следовательно, при вычислении функции F_x в пределах интегрирования $\Pi(x, y) = \{(x', y')\colon |x - x'| \leq \lambda_1, |y - y'| \leq \lambda_2\}$ функция f может иметь особенности только на множестве Q_{sk}.

Введем функцию $f_{sk}(x', y')$ для $(x', y') \in \Pi(x, y)$:

$$f_{sk}(x', y') = \begin{cases} f(x', y'), & (x', y') \in \Pi(x, y) \setminus Q_{sk}, \\ f((y' - b^y_{sk})/a^y_{sk} - q_s, y'), & (x', y') \in Q_{sk},\ x' \leq (y' - b^y_{sk})/a^y_{sk}, \\ f((y' - b^y_{sk})/a^y_{sk} + q_s, y'), & (x', y') \in Q_{sk},\ x' > (y' - b^y_{sk})/a^y_{sk}. \end{cases}$$

Поскольку $K_s > q_s$, то функция f_{sk} имеет разрыв на Γ_{sk} с величиной скачка $\Delta_{sk}(t)$ и $|(f_{sk})'_x| \leq 1$. Отметим, что разность $f_{sk} - f$ ограничена и $\sup\limits_{\mathfrak{D}} |f_{sk} - f| \leq 2$. Перейдем от двойного интеграла в правой части (2.4) к повторному и запишем его в виде суммы двух слагаемых:

$$F_x(x, y) = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, \eta)\phi'_{\lambda_1}(x - \xi)d\xi \Bigg) \psi_{\lambda_2}(y - \eta)d\eta = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f_{sk}(\xi, \eta)\phi'_{\lambda_1}(x - \xi)d\xi \Bigg) \psi_{\lambda_2}(y - \eta)d\eta$$

$$+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-q_s}^{x+q_s}(f(\xi,\eta)-f_{sk}(\xi,\eta))\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta.$$

Оценим второе слагаемое, используя условия на функции ϕ и ψ:

$$\Bigg|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-q_s}^{x+q_s}(f(\xi,\eta)-f_{sk}(\xi,\eta))\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg| \le 4\frac{|\phi'|}{\lambda_1}q_s = A_3\frac{q_s}{\lambda_1}.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Поскольку при выполнении условия $\min\limits_{k\neq j}\rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk};\Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \ge K_s$ в пределах интегрирования находится только Γ_{sk}, то имеет место следующее разложение [8, лемма 1]:

$$\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f_{sk}(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi = \Delta_{sk}(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_{sk}(t(\eta))) + \int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(f_{sk})'_{\xi}(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi,$$

где $t(\eta) = (\eta - b^y_{sk})/a^y_{sk}$. Отсюда

$$\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f_{sk}(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta$$

$$=\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta + \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(f_{sk})'_{\xi}(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta. \quad (2.8)$$

Для второго слагаемого в правой части (2.8) справедлива оценка

$$\Bigg|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(f_{sk})'_{\xi}(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg| \le A_1\lambda_1.$$

Пусть $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma^{\varepsilon}_{sk}$ и $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) \le \tau$. Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (2.8) можно представить в виде

$$\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta = \phi_{\lambda_1}(x-\bar{x})\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta$$

$$+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\phi'_{\lambda_1}(\zeta)\cdot(\bar{x}-x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta, \quad (2.9)$$

где ζ лежит между точками $x-\bar{x}$, $x-x_{sk}(t(\eta))$. Для $f \in \mathfrak{M}$ (см. определение 5) функция $\Delta_{sk}(t)$ непрерывна при $t \in (q_s\Theta_{sk-1}, |\Gamma_{sk}| - q_s\Theta_{sk})$. Следовательно, функция $\Delta_{sk}(t(\eta))$ сохраняет знак для всех η. Так как $|x-\bar{x}| \le \tau \le b\lambda_1$, то в силу условия (b) на функцию ϕ и условий (b'), (c') на функцию ψ для первого слагаемого в правой части (2.9) имеем оценку снизу

$$\Bigg|\phi_{\lambda_1}(x-\bar{x})\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_{sk}(t(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg| \ge a\Delta^{\min}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.9). Учитывая условие (i) на функцию f, можно считать, что $|\Delta_{sk}(t(\eta))| \le 2$. Поскольку $\bar{x} = x_{sk}(t(\bar{y}))$, где $t(\bar{y}) = (\bar{y} - b^y_{sk})/a^y_{sk}$, то $|\bar{x} - x_{sk}(t(\eta))| \le |(\bar{y} - \eta)a^x_{sk}/a^y_{sk}| \le (\lambda_2 + \tau)|a^x_{sk}/a^y_{sk}|$. Так как $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$, то для второго слагаемого в правой части (2.9) выводим оценку

$$\Big| \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Delta_{sk}(t(\eta))\phi'_{\lambda_1}(\zeta) \cdot (\bar{x} - x_{sk}(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta \Big| \le \frac{2C_1(\lambda_2+\tau)}{\lambda_1}.$$

Таким образом, лемма 3 доказана. □

Напомним, что величины a, b, C_1 введены в условиях (a), (b) на функцию ϕ, величина C_2 — в условии (a') на функцию ψ, величина $\Delta^{\min}$ — в условии (iii) на функцию f; $A_0 = 4C_1C_2$, $A_1 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_2 = 2C_1$, $A_3 = 4C_1$. Введем константы

$$P = \frac{a\Delta^{\min}}{2}, \quad D_1 = \frac{4A_0}{P}\Big(\frac{18A_2}{P}\Big)^{1/2}, \quad D_2 = \frac{4A_0}{P}\Big(\frac{P}{18A_2}\Big)^{1/2}, \quad D_3 = \frac{PD_1}{4A_3},$$

$$B_0 = \min\Big\{bD_1,\ D_2,\ \frac{P}{8A_0}\Big(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\Big)^{-1}\Big\}, \quad \delta_0 = \frac{P}{16A_1D_1}.$$

Напомним, что $\lceil z \rceil = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$n_1 = n_1(\tau,\delta) = \Big\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \Big\rceil, \quad n_2 = n_2(\tau,\delta) = \Big\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \Big\rceil. \tag{2.10}$$

Выберем параметры регуляризации λ_1, λ_2 следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau. \tag{2.11}$$

Ниже нам понадобятся очевидные оценки, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение 1. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$. Тогда если шаг τ заданной равномерной сетки T удовлетворяет неравенству $\tau \le \tau_0(\delta) = B_0\delta$, то при связи параметров* (2.10), (2.11) *имеем $\tau \le \min\{b\lambda_1, \lambda_2, D_1\delta/36\}$ и для λ_1, λ_2 выполнены следующие оценки сверху и снизу*:

$$D_1\delta \le \lambda_1 \le D_1\delta + \tau \le D_1\delta(1 + 1/36) < 2D_1\delta,$$

$$D_2\delta \le \lambda_2 \le D_2\delta + \tau \le 2D_2\delta \le D_1\delta/18 < \lambda_1.$$

Если дополнительно $q_s \le D_3\delta$, то $q_s \le D_1\delta/16 < \lambda_1$.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $\Delta^{\min} \le 2$, $C_1 \ge 1$. Тогда $D_2 \le D_1/36$ и $D_3 \le D_1/16$. □

В точках сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ определим функцию

$$H^\delta(x^n, y^m) = \max\{|G^\delta_x(x^n,y^m)|, |G^\delta_y(x^n,y^m)|\}. \tag{2.12}$$

Лемма 4. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и натуральное число s. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для δ: $q_s/D_3 \le \delta \le \delta_0$, шага $\tau \le \tau_0(\delta)$, при выборе* (2.6), (2.7) *и связи параметров* (2.10), (2.11), *а также выполнении дополнительного условия разделимости*

$$\min_{1\le k,j\le l_s,\ k\ne j} \rho(\Gamma^\varepsilon_{sk}; \Gamma^\varepsilon_{sj}) \ge K_s,$$

где $K_s \ge \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$, для функции H^δ в точке $(x^n,y^m) \in T$ имеют место оценки:

(1) *если $\rho((x^n,y^m);\Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + q_s$, то $H^\delta(x^n,y^m) < P$;*

(2) *если $\rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon_s) \le \tau$, то $H^\delta(x^n,y^m) > P$.*

Доказательство. Покажем справедливость (1). Для точек сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$, используя оценки лемм 1 и 2, получаем

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \leq \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big) + A_1\lambda_1.$$

При данном выборе параметров, ввиду оценок снизу для λ_1, λ_2 из утверждения 1, справедливо неравенство $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} \leq P/4$; используя дополнительно неравенство $\tau \leq \tau_0(\delta)$, получаем $A_0\tau(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2) \leq P/8$; из неравенства $\delta \leq \delta_0$ следует неравенство $A_1\lambda_1 \leq P/8$. Тогда

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \leq \frac{1}{2}P < P$$

для (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$. Аналогичная оценка имеет место для функции G_y^δ в точках сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$. Следовательно,

$$H^\delta(x^n, y^m) < P$$

для (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) > \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + q_s$.

Перейдем к доказательству (2). Пусть $\Gamma_{sk}\colon |a_{sk}^x/a_{sk}^y| \leq 1$. Для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^\varepsilon) \leq \tau$, используя оценки лемм 1 и 3, получаем

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \geq a\Delta^{\min} - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big) - A_1\lambda_1 - \frac{A_2(\lambda_2 + \tau)}{\lambda_1} - \frac{A_3 q_s}{\lambda_1}.$$

При данном выборе параметров $\lambda_2 + \tau \leq 3D_2\delta$ и $A_2(\lambda_2 + \tau)/\lambda_1 \leq P/6$. Поскольку $q_s \leq D_3\delta$, то $A_3 q_s/\lambda_1 \leq P/4$. Следовательно, учитывая оценки из доказательства п. (1), имеем

$$|G_x^\delta(x^n, y^m)| \geq a\Delta^{\min} - \frac{11}{12}P = \frac{13}{12}P > P.$$

Аналогичная оценка справедлива для G_y^δ в точках сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^\varepsilon) \leq \tau$ при $\Gamma_{sk}\colon |a_{sk}^y/a_{sk}^x| \leq 1$.

Поскольку для отрезка Γ_{sk} имеем $|a_{sk}^x/a_{sk}^y| \leq 1$ и/или $|a_{sk}^y/a_{sk}^x| \leq 1$, то $H^\delta(x^n, y^m) > P$ для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^\varepsilon) \leq \tau$. Лемма 4 доказана.

3. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Изложенный ниже алгоритм локализации определяет множество T^δ точек сетки, аппроксимирующих линию разрыва Γ. Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ. Договоримся, если $T^\delta = \varnothing$, считать $\rho((x^n, y^m); T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n, y^m) сетки T. Приведенный ниже алгоритм локализации в своей работе использует параметры n_1, n_2 и величину порога $P = a\Delta^{\min}/2$. Напомним, что функция H^δ определена в (2.12).

Алгоритм $\Pi D(\delta, f_{n,m}^\delta)$

Подготовка к циклу. Положим $N = 0$; $T^\delta = \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) *сетки* T. Если в процессе перебора не рассмотренных точек сетки T не осталось, то конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n, y^m) > P$ и $\rho((x^n, y^m); T^\delta) > 3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s$, то $N := N + 1$; $T^\delta := T^\delta \bigcup (x^n, y^m)$ и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и функции выбраны и зафиксированы.

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Выберем меру близости множества U к множеству V:

$$\mu(U;V) = \sup_{(x_1,y_1)\in U} \inf_{(x_2,y_2)\in V} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Напомним, что

$$n_1 = n_1(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad n_2 = n_2(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad \lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau. \quad (3.1)$$

Введем константы и функцию

$$B = \frac{40\sqrt{2}A_3}{P\nu}, \quad D = \sqrt{2}D_1, \quad \bar{\delta}_0 = \min\{\delta_0,\, \bar{q}/D_3\}, \quad h(\delta) = 5D\delta.$$

Напомним, что константы Θ, p входят в определение класса $\mathfrak{M}$.

Положим

$$\varepsilon_{sk} = h(\delta)\Theta_{sk}, \quad (3.2)$$

где Θ_{sk} определено в (1.1)

Теорема. *Пусть функция $f \in \mathfrak{M}(p)$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $\delta \le \bar{\delta}_0$, шага $\tau \le \tau_0(\delta)$, при связи параметров* (3.1), *при выполнении соотношения $p < 1/B$ и дополнительного условия разделимости $\min\limits_{s\in\mathbb{N},\, 1\le k,j\le l_s,\, k\ne j} \rho(\Gamma^{\varepsilon}_{sk};\Gamma^{\varepsilon}_{sj}) \ge h(\delta)$, где $h(\delta) = 5D\delta$, алгоритм $\Pi D(\delta, f^{\delta}_{n,m})$ построит множество точек $T^{\delta} \ne \varnothing$ такое, что*:

(1) $\mu(T^{\delta};\Gamma) \le 2D\delta$;

(2) $\mu(\Gamma;T^{\delta}) \le (4+5\Theta)D\delta$;

(3) *для всех различных точек $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in T^{\delta}$ справедливо неравенство*

$$\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 3D\delta;$$

(4) *для $s = s(\delta)$: $q_s/D_3 < \delta \le q_{s-1}/D_3$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{7D}\frac{|\Gamma_s|}{\delta}(1-pB) \le N(T^{\delta}) \le \frac{1}{D}\frac{|\Gamma_s|}{\delta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с основной идеей проведения оценок перейдем от точной линии Γ к аппроксимирующей ее последовательности Γ_s. Зафиксируем $s = s(\delta)$: $q_s/D_3 < \delta \le q_{s-1}/D_3$. Ясно, что $s(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$.

Докажем оценку (1). Заметим, что условие разделимости в теореме гарантирует выполнение условия разделимости в леммах, поскольку $h(\delta) > \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \sqrt{2}\tau + q_s$. Из оценки в п. (1) леммы 4 вытекает, что $\mu(T^{\delta};\Gamma_s) \le \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + q_s$. Следовательно, $\mu(T^{\delta};\Gamma) \le \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + 2q_s$. Используя оценки из утверждения 1, получаем требуемое неравенство.

Докажем оценку (2). Очевидно, что все Γ^{ε}_s можно покрыть окружностями с центром в точках из множества T^{δ} радиусом $3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s + \sqrt{2}\tau$. Если это не так, то согласно п. (2) леммы 4 обязательно найдется точка сетки T, не принадлежащая множеству T^{δ}, в которой функция H^{δ} больше порога P. Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма ΠD перебираются все точки сетки T. Следовательно, $\mu(\Gamma^{\varepsilon}_s;T^{\delta}) \le 3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s + \sqrt{2}\tau$. Значит, $\mu(\Gamma_s;T^{\delta}) \le 3\sqrt{2}\lambda_1 + 2q_s + \sqrt{2}\tau + \varepsilon_{sk}$ и $\mu(\Gamma;T^{\delta}) \le 3\sqrt{2}\lambda_1 + 3q_s + \sqrt{2}\tau + \varepsilon_{sk}$. С учетом выбора (3.2) и учитывая условия на параметры, получаем требуемую оценку.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in T^{\delta}$. По построению множества T^{δ} алгоритмом ΠD справедливо неравенство $\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 3\sqrt{2}\lambda_1 \ge 3\sqrt{2}D_1\delta$.

Докажем оценку (4). Согласно оценке в п. (1) леммы 4 окружность с центром в точке из множества T^{δ} радиусом $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + q_s$ обязательно содержит точку из Γ_s. Пусть $(x^n, y^m) \in T^{\delta}$, тогда существует $(x,y)\in\Gamma_s$ такая, что $\rho((x^n,y^m);(x,y))\le\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+q_s\le\sqrt{2}\lambda_1+q_s$. Аналогично для $(x^{\bar n},y^{\bar m})\in T^\delta$ найдется $(\bar x,\bar y)\in\Gamma_s$ такая, что $\rho((x^{\bar n},y^{\bar m});(\bar x,\bar y))\le\sqrt{2}\lambda_1+q_s$. Ясно, что $\rho((x,y);(\bar x,\bar y))\ge\rho((x^{\bar n},y^{\bar m});(x^n,y^m))-2(\sqrt{2}\lambda_1+q_s)$. Используя оценку для первого слагаемого из доказательства п. (3) настоящей теоремы, получаем $\rho((x,y);(\bar x,\bar y))\ge\sqrt{2}\lambda_1$. Следовательно, справедлива оценка сверху

$$N(T^\delta)\le\frac{|\Gamma_s|}{\sqrt{2}\lambda_1}\le\frac{|\Gamma_s|}{\sqrt{2}D_1\delta}.$$

Получим оценку снизу. В доказательстве п. (2) установлено, что все Γ_s^ε можно покрыть окружностями с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau$. Поскольку $h(\delta)-(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)\ge D\delta>0$, то количество таких окружностей на Γ_{sk}^ε должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma_{sk}^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)}\ge\frac{|\Gamma_{sk}|-\varepsilon_{sk-1}-\varepsilon_{sk}}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)}.$$

Ввиду (3.2) и соотношения $h(\delta)=5D\delta\le(5\sqrt{2}D_1/D_3)(q_s/\nu)=20\sqrt{2}A_3q_s/(P\nu)$ получаем

$$\frac{\varepsilon_{sk}}{|\Gamma_{sk}|}\le\frac{20\sqrt{2}A_3}{P\nu}\frac{\Theta_{sk}q_s}{|\Gamma_{sk}|}\le\frac{pB}{2}.$$

Следовательно, $\dfrac{|\Gamma_{sk}^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+2q_s+\sqrt{2}\tau)}\ge\dfrac{1}{7\sqrt{2}D_1}\dfrac{|\Gamma_{sk}|}{\delta}(1-pB)$. Условие $p<1/B$ обеспечивает непустоту Γ_{sk}^ε. При выбранном алгоритме общее количество точек получается сложением по всем k. Таким образом,

$$N(T^\delta)\ge\frac{1}{7\sqrt{2}D_1}\frac{|\Gamma_s|}{\delta}(1-pB).$$

Теорема доказана. □

Оценки в пп. (1)–(3) теоремы почти такие же (чуть хуже из-за наличия q_s), как соответствующие оценки в [10]. Оценки количества точек в настоящей статье (п. (4) теоремы) в отличие от соответствующей оценки в [10] зависят от переменной величины $|\Gamma_s|$, а значит и от δ. При дополнительных ограничениях на кривую возможно установить порядок поведения $|\Gamma_s|$ как функции от δ и конкретизировать оценку (4) в теореме.

Приведем примеры гладкой линии и линии, не дифференцируемой ни в одной точке. В примерах удобно считать, что нумерация по s (см. определение 1) начинается не с единицы, а с некоторого $\bar s$, т. е. $s=\bar s,\bar s+1,\dots$.

Пример 1. Рассмотрим случай гладкой линии разрыва. Пусть функция $f(x,y)$ равна нулю вне окружности Γ радиусом R и единице внутри этой окружности. Следовательно, $\Delta^{\min}=1$. В качестве Γ_s рассмотрим правильный s-угольник, вписанный в эту окружность. Тогда $q_s\le\sqrt{2}R(1-\cos(\pi/s))$, $\Theta_{sk}=(\sin(\pi(s-2)/(2s)))^{-1}=(\cos(\pi/s))^{-1}$, $|\Gamma_{sk}|=2R\sin(\pi/s)$. Заметим, что

$$\frac{q_{s+1}}{q_s}=\Bigl(\frac{\sin(\pi/(s+1))}{\sin(\pi/s)}\Bigr)^2<1\quad\text{и}\quad\frac{q_{s+1}}{q_s}\to1\quad\text{при}\quad s\to\infty.$$

Поскольку q_{s+1}/q_s является монотонно возрастающей функцией, то существует $\bar s$ такое, что для всех $s=\bar s,\bar s+1,\dots$, выполняется неравенство

$$\frac{q_{s+1}}{q_s}=\Bigl(\frac{\sin(\pi/(s+1))}{\sin(\pi/s)}\Bigr)^2>\nu=\frac{2}{3}.$$

Тогда $\nu\le q_{s+1}/q_s<1$ для всех $s=\bar s,\bar s+1,\dots$. Положим $\bar q=q_{\bar s}\le\sqrt{2}R(1-\cos(\pi/\bar s))$. При этом $\Theta=\max\limits_{s,k}\Theta_{sk}=2$. Зафиксируем $\phi\in\Phi F$. Заметим, что отношение $\Theta_{sk}q_s/|\Gamma_{sk}|$ не зависит от k и

$$\frac{\Theta_{sk}q_s}{|\Gamma_{sk}|}<\frac{1-\cos(\pi/s)}{\sqrt{2}\cos(\pi/s)\sin(\pi/s)}=\frac{2\sqrt{2}(\sin(\pi/(2s)))^2}{\sin(2\pi/s)}.$$

Эта величина стремится к нулю при $s \to \infty$. Увеличив, если это необходимо, $\bar{s}$, можно считать, что

$$\frac{2\sqrt{2}(\sin(\pi/(2\bar{s})))^2}{\sin(2\pi/\bar{s})} < \frac{1}{B}, \quad \text{где} \quad B = \frac{40\sqrt{2}A_3}{P\nu}.$$

Очевидно, что функция f с разрывом по линии Γ принадлежит описанному в разд. 1 классу $\mathfrak{M}(p)$, где

$$p = \frac{2\sqrt{2}(\sin(\pi/(2\bar{s})))^2}{\sin(2\pi/\bar{s})}.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим случай линии разрыва, не дифференцируемой ни в одной точке. Будем строить последовательность ломаных Γ_s и линию Γ итерационным способом. Для определения константы B в теореме зафиксируем $\phi \in \Phi F$, положим $\Delta^{\min} = 1$, $\nu = 1/3$. Выберем $\bar{s}$ такое, что

$$\frac{\sin(\pi/\bar{s})}{3\sqrt{2}\cos^2(\pi/\bar{s})} < \frac{1}{B}.$$

Такое $\bar{s}$ существует, поскольку величина в левой части неравенства стремится к нулю при $\bar{s} \to \infty$. В качестве Γ_1 возьмем правильный $\bar{s}$-угольник со стороной R. Ломаную Γ_2 строим следующим образом: каждую сторону правильного $\bar{s}$-угольника делим на три равные части и среднюю часть заменяем сторонами равнобедренного треугольника, угол при вершине которого равен $\pi(\bar{s}-2)/\bar{s}$. Для построения Γ_3 повторяем эту операцию для каждого отрезка в Γ_2 и т. д. Получающаяся в пределе линия Γ не дифференцируема ни в одной точке (обоснование см. ниже). Пусть функция $f(x,y)$ внутри Γ равна единице, а вне фигуры, ограниченной линией Γ, функция $f(x,y)$ равна нулю.

Поскольку отношение $q_s/|\Gamma_{sk}| \le \operatorname{tg}(\pi/\bar{s})/(3\sqrt{2})$ и $\Theta_{sk} \le (\sin(\pi(\bar{s}-2)/(2\bar{s})))^{-1} = (\cos(\pi/\bar{s}))^{-1}$ для всех $s \ge \bar{s}$, то $\dfrac{\Theta_{sk}q_s}{|\Gamma_{sk}|} \le \dfrac{\sin(\pi/\bar{s})}{3\sqrt{2}\cos^2(\pi/\bar{s})} < \dfrac{1}{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{s} \ge 3$, и для всех $s \ge \bar{s}$

$$\frac{q_{s+1}}{q_s} \ge \frac{1}{6\cos(\pi/\bar{s})} = \frac{1}{3} = \nu.$$

Очевидно, что функция f с разрывом по линии Γ принадлежит описанному в разд. 1 классу $\mathfrak{M}(p)$, где

$$p = \frac{\sin(\pi/\bar{s})}{3\sqrt{2}\cos^2(\pi/\bar{s})};$$

при этом выполнено условие $p < 1/B$ в теореме.

Обозначим через M_s множество вершин ломаной Γ_s, положим $M = \bigcup_1^\infty M_s$. В следующем утверждении показано, что построенная линия Γ не дифференцируема ни в одной точке.

Утверждение 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Последовательность M_s является вложенной*: $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M$.

(2) *Множество $M \subset \Gamma$ и всюду плотно в Γ.*

(3) *Линия Γ не дифференцируема ни в одной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Последовательность множеств M_s вложена по построению.

(2) Поскольку $|\Gamma_{sk}| \le 2R\sin(\pi/s)/3^s \to 0$ при $s \to \infty$, то множество M всюду плотно в Γ, так как для любой точки $(x,y) \in \Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $(\bar{x},\bar{y}) \in M\colon \rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) < \varepsilon$.

(3) Пусть $(x,y) \in M$. Зафиксируем $\tilde{s}$ такое, что $(x,y) \in M_{\tilde{s}}$. Обозначим через $(x_s^\pm, y_s^\pm)$, $s \ge \tilde{s}$, точки из множества $M_s \subset M$ такие, что смежные отрезки $[(x_s^\pm, y_s^\pm),(x,y)]$ принадлежат ломаной Γ_s. Поэтому для любой точки $(x,y) \in M$ существуют две разные последовательности $(x_s^\pm, y_s^\pm) \in M$, сходящиеся по разным направлениям к (x,y) при $s \to \infty$. Значит, линия Γ не дифференцируема ни в одной точке. Утверждение доказано. $\square$

4. Заключение

Таким образом, в настоящей статье разработана аппроксимационная схема приближения с масштабом q_s последовательностью ломаных Γ_s линии Γ. Ограничения на линию Γ вводятся с помощью требований на ломаные Γ_s и масштабы q_s, $s = 1, 2, \ldots$. Определяются классы корректности $\mathfrak{M}$, зависящие от параметров $\nu, \bar{q}, r, \Theta, \Delta^{\min}, p$. Эти параметры используются для получения оценок в теореме (параметры входят в константы D_1, D_2, D_3, а на параметр p накладывается дополнительное требование в формулировке теоремы).

Как уже упоминалось во введении, для простоты в настоящей работе проводятся самые грубые оценки. Далее приведем три модификации предложенного подхода.

1. В [10] предполагается, что линия разрыва состоит из конечного числа отрезков. Для произвольной замкнутой линии также можно рассматривать аналогичный случай. Пусть для каждого s ломаная Γ_s распадается на конечное число L ломаных Γ_s^m, $m = 1, 2, \ldots, L$, и все углы между Γ_s^m учитываются отдельно, а в параметры Θ и p (см. определение 5, условия (ii), (iiii)) входят только углы между ломаными Γ_s^m. Конечность числа L, позволяет провести подобную модификацию.

2. Можно ввести $\Gamma_{sk}^{\varepsilon}$ в разд. 2 (перед леммой 3) более аккуратно, чтобы это множество было, в общем случае, ближе к Γ_{sk}. В частности, если углы между звеньями $\Gamma_{sk+1}, \Gamma_{sk-1}$ и звеном Γ_{sk} больше некоторого фиксированного угла, то можно положить $\Gamma_{sk}^{\varepsilon} = \Gamma_{sk}$ (при другом законе выбора параметров регуляризации).

3. Предлагаемая в настоящей работе схема рассчитана на анализ методов усреднения со сдвигом по осям x и y. Анализ проведения оценок показывает, что методы, использующие другие виды усреднения, например усреднение “с поворотом” [7], позволяют обосновать применимость этих методов для более широкого класса функций.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность В. Г. Пименову и Н. В. Байдаковой за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 c.
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
6. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений: изд. 3-е испр. и доп. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
7. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Дискретный алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4(72). С. 3–12. doi: 10.17377/sibjim.2017.20.401
10. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та математики и механики. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23.

Поступила 11.06.2019
После доработки 22.07.2019
Принята к публикации 29.07.2019

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of ill-posed problems.* New York etc.: John Wiley & Sons, 1977, 258 p. ISBN: 0-470-99124-0 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 223 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 208 p.
3. Vasin V.V., Ageev A.L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995, 255 p.
4. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way.* N Y: Acad. Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X . Translated to Russian inder the title Malla S. *Veivlety v obrabotke signalov.* Moscow: Mir Publ., 2005, 671 p.
5. Furman Ya.A. (ed.). *Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov* [Introduction to Contour Analysis and its Application to Image and Signal Processing]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 596 p. ISBN: 5-9221-0255-9 .
6. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing (3rd Edition).* N J: Pearson Prentice Hall, 2006, 976 p. ISBN: 978-0131687288 . Translated to Russian inder the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii. (Izdanie 3-e ispravlennoe i dopolnennoe).* Moscow: Tekhnosfera, 2012, 1104 p.
7. Antonova T.V. A method for localization of discontinuity lines of an approximately defined function of two variables. *Numerical Anal. Appl.*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 285–296. doi: 10.1134/S1995423912040015 .
8. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. Appl. Industrial Math.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015 .
9. Ageev A.L., Antonova T.V. A Discrete Algorithm for Localizing the Discontinuity Lines of a Function of Two Variables. *J. Appl. Industrial Math.*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 463–471. doi: 10.1134/S1990478917040019 .
10. Ageev A.L., Antonova T.V. On the problem of global localization of discontinuity lines for a function of two variables. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 12–23 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23 .

Received June 11, 2019
Revised July 22, 2019
Accepted July 29, 2019

Aleksandr Leonidovich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tat'yana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Ageev, T. V. Antonova. On the localization of nonsmooth discontinuity lines of a function of two variables, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 9–23 .