ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977.1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

М. И. Гусев, И. О. Осипов

Геометрическая структура множеств достижимости на малых временных промежутках играет важную роль в теории управления, в частности при решении задач локального синтеза. В данной работе рассматривается задача приближенного описания множеств достижимости на малых временах для аффинных по управлению систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление. Используя замену времени, авторы вместо исходного множества рассматривают множество достижимости для управляемой системы на единичном интервале, содержащей малый параметр (длину временного интервала для исходной системы). При этом ограничения на управление заданы шаром малого радиуса в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$. При определенных условиях, накладываемых на грамиан управляемости линеаризованной системы, такое множество достижимости оказывается выпуклым при достаточно малом значении параметра. В работе показано, что в этом случае множество достижимости асимптотически близко по форме к эллипсоиду в пространстве состояний. Доказательство данного факта базируется на представлении множества достижимости в виде образа гильбертова шара малого радиуса в $\mathbb{L}_2$ при нелинейном отображении его в $\mathbb{R}^n$. В частности, данное асимптотическое представление имеет место для достаточно широкого класса нелинейных управляемых систем второго порядка с интегральными ограничениями. В статье приведены три примера систем, множества достижимости которых демонстрируют как наличие указанного асимптотического поведения, так и отсутствие последнего при невыполнении нужных условий.

Ключевые слова: управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, выпуклость, асимптотика.

M. I. Gusev, I. O. Osipov. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals.

The geometric structure of small-time reachable sets plays an important role in control theory, in particular, in solving problems of local synthesis. In this paper, we consider the problem of approximate description of reachable sets on small time intervals for control-affine systems with integral quadratic constraints on the control. Using a time substitution, we replace such a set by the reachable set on a unit interval of a control system with a small parameter, which is the length of the time interval for the original system. The constraints on the control are given by a ball of small radius in the Hilbert space $\mathbb{L}_2$. Under certain conditions imposed on the controllability Gramian of the linearized system, this reachable set turns out to be convex for sufficiently small values of the parameter. We show that in this case the shape of the reachable set in the state space is asymptotically close to an ellipsoid. The proof of this fact is based on the representation of the reachable set as the image of a Hilbert ball of small radius in $\mathbb{L}_2$ under a nonlinear mapping to $\mathbb{R}^n$. In particular, this asymptotic representation holds for a fairly wide class of second-order nonlinear control systems with integral constraints. We give three examples of systems whose reachable sets demonstrate both the presence of the indicated asymptotic behavior and the absence of the latter if the necessary conditions are not satisfied.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, convexity, asymptotics.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99

Введение

В работе рассматриваются асимптотические свойства множеств достижимости нелинейных управляемых систем с интегральными квадратичными ограничениями на управляющие параметры. Хорошо известно (см. [1; 2]), что в случае линейных управляемых систем такие множества выпуклы. Более того, эти множества являются эллипсоидами в конечномерном пространстве состояний системы, параметры данных эллипсоидов допускают конструктивное описание. В общем случае нелинейных систем с интегральными ограничениями свойство выпуклости множеств достижимости теряется и для их построения приходится использовать достаточно трудоемкие приближенные алгоритмы [3–5]. Однако, если временной промежуток имеет достаточно малую длину, множества достижимости могут оказаться выпуклыми.

Геометрическая структура множеств достижимости на малых временных промежутках играет важную роль в теории управления, в частности при решении задач локального синтеза. Множества достижимости на малых интервалах времени при геометрических ограничениях на управление изучались рядом авторов (см., например, [6; 7]). Выпуклость множеств достижимости нелинейных систем исследована в [8; 9]. Асимптотическому поведению множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями на управление на малых промежутках времени посвящена работа [10]. В данной статье рассматривается задача описания множеств достижимости на малых промежутках времени для аффинных по управлению систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление. Используя замену времени, мы подменяем исходное множество достижимости множеством достижимости для управляемой системы на единичном интервале, содержащей малый параметр (длину временного интервала для исходной системы) [11]. При этом ограничения на управление оказываются заданы шаром малого радиуса в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$, а множество достижимости имеет вид образа шара при нелинейном отображении его в $\mathbb{R}^n$. Из работы [12] при условиях регулярности, накладываемых на производную отображения, следует выпуклость образа при достаточно малом радиусе шара и, соответственно, множества достижимости. Эти условия, применительно к рассмотренной в работе системе, принимают вид ограничений снизу на минимальное собственное число грамиана управляемости линеаризованной системы при малых значениях параметра [11].

В настоящей статье показано, что в этом случае множество достижимости не только выпукло, но и асимптотически близко по форме к эллипсоиду в пространстве состояний. В частности, указанное асимптотическое представление имеет место для достаточно широкого класса нелинейных управляемых систем второго порядка с интегральными ограничениями. В статье приведены три примера систем, множества достижимости которых иллюстрируют данный факт. В первых двух примерах двумерных нелинейных систем справедливо указанное асимптотическое поведение множеств достижимости. В третьем примере, описывающем поведение нелинейной управляемой системы с одним входом (уницикл), показано, что множества достижимости не являются выпуклыми даже при малых временах.

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты

Пусть X, Y — банаховы пространства, обозначим через $B_X(a, \mu_0) \subset X$ шар радиуса μ_0 с центром в точке a. Рассмотрим отображение шара $F_\varepsilon : B_X(a, \mu_0) \to Y$, зависящее от параметра ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. В дальнейшем этот параметр будем считать малым.

Предположение 1. *Отображение $F_\varepsilon(x)$ имеет производную Фреше по x, которая удовлетворяет условию Липшица на $B_X(a, \mu_0)$*

$$\|F_\varepsilon^{'}(x_1) - F_\varepsilon^{'}(x_2)\| \le L(\varepsilon)\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in B_X(a, \mu_0), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{1.1}$$

где $L(\varepsilon)$ — ограниченная на $(0, \varepsilon_0]$ функция.

Пусть функция $\mu(\varepsilon)$ отображает полуинтервал $(0, \varepsilon_0]$ в $(0, \mu_0]$. Далее полагаем, что $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Функцию $s(\varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \to (0, \infty)$ назовем масштабирующим множителем, если $s(\varepsilon) \to \infty$, $s(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon)L(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через G_ε образ шара $B_X(a, \mu(\varepsilon))$

$$G_\varepsilon = \{F_\varepsilon(x) : x \in B_X(a, \mu(\varepsilon))\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.1) *и* $\mu(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Пусть* $s(\varepsilon)$ — *масштабирующий множитель. Тогда*

$$h(s(\varepsilon)(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)F'_\varepsilon(a)B_X(0,1)) \to 0 \quad \text{при} \;\; \varepsilon \to 0,$$

где h — *хаусдорфово расстояние между множествами, символом* "co" *обозначена выпуклая оболочка множества.*

Доказательство. Для произвольного элемента $x \in B_X(a, \mu(\varepsilon))$, используя теорему о среднем, запишем равенство

$$F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a) = F'_\varepsilon(\bar{x}(\varepsilon))(x-a) = F'_\varepsilon(a)(x-a) + (F'_\varepsilon(\bar{x}(\varepsilon)) - F'_\varepsilon(a))(x-a) = F'_\varepsilon(a)(x-a) + r(\varepsilon, x).$$

Здесь $\bar{x}(\varepsilon)$ — точка отрезка, соединяющего x и a. Из условия (1.1) вытекает следующее неравенство:

$$\|r(\varepsilon, x)\| \le L(\varepsilon)\|\bar{x}(\varepsilon) - a\| \cdot \|x - a\| \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon).$$

Вычисляя супремум от обеих частей равенства

$$(y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) = (y^*, F'_\varepsilon(a))(x-a) + r(\varepsilon, x)),$$

на шаре $B_X(a, \mu(\varepsilon))$ получим

$$\sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) \le \sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F'_\varepsilon(a)(x-a)) + \sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, r(\varepsilon, x)).$$

Здесь y^* — произвольный элемент из сопряженного к Y пространства Y^*, $(\cdot,\cdot)$ — билинейная форма, приводящая Y и Y^* в двойственность. Применяя подобную операцию к равенству $F'_\varepsilon(a)(x-a) = F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a) - r(\varepsilon, x)$, будем иметь

$$\sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F'_\varepsilon(a)(x-a)) \le \sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) + \sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (-y^*, r(\varepsilon, x)).$$

Из доказанных неравенств, учитывая оценку для $r(\varepsilon, x)$, получим

$$\Big| \sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) - \sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F'_\varepsilon(a)(x-a)) \Big| \le L(\varepsilon)\|y^*\|\mu^2(\varepsilon). \tag{1.2}$$

Очевидно, что

$$\sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(a)) = \delta(y^* | G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)) = \delta(y^* | \mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)),$$

$$\sup_{\|x-a\|\le\mu(\varepsilon)} (y^*, F'_\varepsilon(a)(x-a)) = \mu(\varepsilon)\|F'_\varepsilon(a)^* y^*\| = \mu(\varepsilon)\delta(y^* | F'_\varepsilon(a)B_X(0,1)),$$

где через $\delta(y^*|A)$ обозначена опорная функция множества $A \subset X$, T^* — стандартное обозначение для оператора, сопряженного к линейному ограниченному оператору T. Неравенство (1.2) можно в таком случае записать в следующем эквивалентном виде:

$$\sup_{\|y^*\|=1} |\delta(y^* | \mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)) - \mu(\varepsilon)\delta(y^* | F'_\varepsilon(a)B_X(0,1))| \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon).$$

Левая часть последнего неравенства представляет собой формулу для хаусдорфова расстояния между ограниченными выпуклыми множествами $\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)$ и $\mu(\varepsilon)F'_\varepsilon(a)B_X(0,1))$, следовательно,

$$h(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a), \mu(\varepsilon)F'_\varepsilon(a)B_X(0,1)) \le L(\varepsilon)\mu^2(\varepsilon). \tag{1.3}$$

Умножив обе части неравенства (1.3) на $s(\varepsilon)$ и принимая во внимание равенство $h(\lambda A, \lambda B) = \lambda h(A, B)$, $\lambda > 0$, справедливое для хаусдорфова расстояния между множествами A, B, приходим к утверждению теоремы. $\square$

Поясним смысл введения масштабирующего множителя $s(\varepsilon)$. Если не умножать обе части неравенства (1.3) на $s(\varepsilon)$, то мы получим, разумеется, что

$$h(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a), \mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

учитывая, что константа Липшица $L(\varepsilon)$ ограничена в окрестности нуля. Данное соотношение не очень содержательно, так как понятно, что каждое из этих двух множеств стягивается к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Во-первых, выбором $s(\varepsilon)$ надо добиться, чтобы множество $s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ не стягивалось к нулю. Множитель $s(\varepsilon)$ должен стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, его можно интерпретировать как увеличение “микроскопа”, с помощью которого изучается асимптотическое поведение указанных множеств (см. [10]). Можно предложить следующий способ выбора $s(\varepsilon)$. Множество $\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ — центрально-симметричное выпуклое множество с центром в нуле. Введем две величины, определяющие максимальный и минимальный “размеры” центрально-симметричного множества $A \subset X$

$$\lambda_{\max}(A) = \sup_{\|y^*\|=1}\delta(y^*|A), \quad \lambda_{\min}(A) = \inf_{\|y^*\|=1}\delta(y^*|A).$$

Если A имеет непустую внутренность, то обе эти величины положительны. Предположим, что множества $F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ имеют непустую внутренность при достаточно малых ε. Функцию $s(\varepsilon)$ выберем таким образом

$$s(\varepsilon) = 1/\mu(\varepsilon)\lambda_{\max}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)),$$

это исключает стягивание $s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)$ к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Во-вторых, надо добиться, чтобы хаусдорфово расстояние между множествами $s(\varepsilon)(\mathrm{co}G_\varepsilon - F_\varepsilon(a))$ и $s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)$ стремилось к нулю быстрее, чем $\lambda_{\min}(s(\varepsilon)\mu(\varepsilon)F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))$ — минимальный из размеров второго множества. Только в этом случае можно говорить, что форма этих множеств близка между собой. Умножив обе части неравенства (1.3) на $s(\varepsilon)$, получим, что данное условие будет выполнено, если

$$\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\lambda_{\max}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = o(\lambda_{\min}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1))),$$

т. е. данное условие не зависит от выбора масштабирующего множителя.

Пусть X, Y — действительные гильбертовы пространства. Предположим, что отображение $F : B_X(a, \mu_0) \to Y$ дифференцируемо и его производная Фреше $F^{'}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. Пусть отображение F регулярно в точке a, т. е. оператор $F'(a) : X \to Y$ является сюрьективным (отображением на). Из последнего свойства следует существование положительного числа γ, такого что $\|F'(a)^*y\| \geq \gamma\|y\|$ для всех $y \in Y$, что эквивалентно неравенству

$$(F'(a)F'(a)^*y, y) \geq \gamma^2\|y\|^2$$

для всех $y \in Y$. В качестве γ^2 можно взять, например, минимальное собственное число самосопряженного оператора $F'(a)F'(a)^*$.

В работе [12] показано, что если выполняется неравенство $\mu \leq \min\left\{\mu_0, \dfrac{\gamma}{2L}\right\}$ то образ шара $B(a, \mu)$ — множество $G = \{F(x) : x \in B(a, \mu)\}$ — является выпуклым.

Рассмотрим семейство операторов F_ε, считая далее, что X — гильбертово пространство, $Y = \mathbb{R}^n$ — конечномерное евклидово пространство. Пусть отображения F_ε регулярны в точке a. Обозначим через $\gamma^2(\varepsilon)$ и $\eta^2(\varepsilon)$ ($\gamma(\varepsilon) > 0$, $\eta(\varepsilon) > 0$) соответственно минимальное и максимальное собственные числа оператора (матрицы) $W_\varepsilon := F_\varepsilon'(a)F_\varepsilon'(a)^*$. Заметим, что множество

$E_\varepsilon := F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)$ в данном случае — конечномерный эллипсоид, определяемый соотношением $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_\varepsilon^{-1} x \le 1\}$, а $\eta(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ — соответственно величины максимальной и минимальной полуосей эллипсоида.

Найдем $\lambda_{\min}(E_\varepsilon)$, $\lambda_{\max}(E_\varepsilon)$. Вычисляя значение опорной функции, получим

$$\delta(y^*|F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = \sup_{(u,u)\le 1}(y^*, F_\varepsilon^{'}(a)u) = \sup_{(u,u)\le 1}(F_\varepsilon^{'}(a)^* y^*, u) = \|F_\varepsilon^{'}(a)^* y^*\| = \sqrt{(y^*, W_\varepsilon y^*)}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\min}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = \lambda_{\min}(E_\varepsilon) = \min_{\|y^*\|=1}\sqrt{(y^*, W_\varepsilon y^*)} = \sqrt{\gamma^2(\varepsilon)} = \gamma(\varepsilon),$$

$$\lambda_{\max}(F_\varepsilon^{'}(a)B_X(0,1)) = \lambda_{\max}(E_\varepsilon) = \max_{\|y^*\|=1}\sqrt{(y^*, W_\varepsilon y^*)} = \sqrt{\eta^2(\varepsilon)} = \eta(\varepsilon).$$

Следствие 1.1. *Пусть $\mu(\varepsilon) \to 0$, $\eta(\varepsilon)$ ограничена в нуле и $\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть $s(\varepsilon)$ — масштабирующий множитель, определенный равенством $s(\varepsilon) = 1/\mu(\varepsilon)\eta(\varepsilon)$. Тогда G_ε выпукло для достаточно малых ε и*

$$h(s(\varepsilon)(G_\varepsilon - F_\varepsilon(a)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)E_\varepsilon) \le o(\gamma(\varepsilon)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$, то при достаточно малых ε выполняется неравенство $2\mu(\varepsilon)L(\varepsilon) \le \gamma(\varepsilon)$, которое гарантирует, что $\mathrm{co}G_\varepsilon = G_\varepsilon$. Следовательно, из теоремы 1 получаем утверждение следствия. При $\gamma(\varepsilon) \ge \alpha > 0$ неравенство $2\mu(\varepsilon)L(\varepsilon) \le \gamma(\varepsilon)$, очевидно, выполнено при малых ε. В этом случае $o(\gamma(\varepsilon))$ означает величину стремящуюся к нулю. □

Таким образом, в условиях следствия образы шаров малого радиуса при нелинейном отображении $F_\varepsilon(x)$ по форме близки к эллипсоидам.

2. Асимптотика множеств достижимости

Рассмотрим управляемую систему, аффинную по управлению

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.1}$$

где $t_0 \le t \le t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, функции $f_1 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times r}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x. Обозначим через $\mathbb{L}_2$ гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций, скалярное произведение, в котором определено равенством

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} u^\top(t)v(t)dt.$$

Ограничения на $u(\cdot)$ заданы в виде шара $B(0,\mu) = \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \le \mu^2\}$ радиуса $\mu > 0$.

Будем далее предполагать, что для любого $u(\cdot) \in B(0, \mu_0)$ существует и единственно решение $x(t)$ системы (2.1), это решение определено на промежутке $[t_0, t_1]$ и все траектории системы (2.1), отвечающие управлениям из $B(0,\mu)$, принадлежат $D \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим $G(t_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \le \mu^2, \ x = x(t_1, u(\cdot))\}$, $G(t_1)$ — множество достижимости (2.1) в заданный момент t_1.

Предположение 2. *Функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ имеют непрерывные производные по x, которые удовлетворяют условию Липшица: для всех $t \in [t_0, t_1]$, $x_1, x_2 \in D$*

$$\Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x_2)\Big\| \le L_3\|x_1 - x_2\|, \ \Big\|\frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x_2)\Big\| \le L_4\|x_1 - x_2\|,$$

где $L_i \ge 0$ для $i = 3, 4$.

Далее мы исследуем поведение множеств достижимости $G(t_1)$ при фиксированном μ в предположении, что интервал $[t_0, t_1]$ является малым. Используя предложенную в [11] замену времени, мы сводим задачу описания множества достижимости на малом интервале к аналогичной задаче на фиксированном интервале для системы, уравнения которой и интегральные ограничения на управление зависят от малого параметра.

Далее мы предполагаем, что уравнения системы (2.1) определены на отрезке $[t_0, \bar{t}_1]$, что все траектории системы (2.1), отвечающие управлениям $u(\cdot) \in B(0, \mu)$, $t \in [t_0, \bar{t}_1]$, принадлежат компакту D и предположение 2 выполняется на $[t_0, \bar{t}_1]$. Рассмотрим $t_0 < t_1 \leq \bar{t}_1$ и обозначим $t_1 - t_0 = \varepsilon$. Произведя замену времени $t = \varepsilon\tau + t_0$ и положив $y(\tau) = x(\varepsilon\tau + t_0)$, $v(\tau) = \varepsilon u(\varepsilon\tau + t_0)$, мы получим

$$\dot{y}(\tau) = \tilde{f}_1(\tau, y(\tau)) + \tilde{f}_2(\tau, y)v(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad y(0) = x^0, \tag{2.2}$$

где $\tilde{f}_1(\tau, y) = \varepsilon f_1(\varepsilon\tau + t_0, y)$, $\tilde{f}_2(\tau, y) = f_2(\varepsilon\tau + t_0, y)$ при ограничении на управление $v(\cdot)$, заданном неравенством

$$\int_0^1 v^\top(t)v(t)dt \leq (\mu\sqrt{\varepsilon})^2. \tag{2.3}$$

Заметим, что траектории системы (2.2), (2.3), как и ранее, принадлежат D при $\varepsilon \leq \bar{t}_1 - t_0$ и $y(\tau, 0) = x(\varepsilon\tau + t_0, 0)$.

Определим семейство отображений $F_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}^n$ равенством $F_\varepsilon(v(\cdot)) = y_\varepsilon(1, v(\cdot))$, где $y_\varepsilon(t, v(\cdot))$ — соответствующее управлению $v(\cdot)$ решение системы (2.2). Тогда, в силу того что $y(1, v(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$, имеет место равенство

$$\tilde{G}(1) = G(t_1) = G_\varepsilon := \{F_\varepsilon(x) : x \in B(0, \mu(\varepsilon))\}.$$

Здесь $\tilde{G}(1)$ — множество достижимости системы (2.2) при ограничении (2.3), $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$. Отметим, что $\tilde{G}(1)$ и $G(t_1)$ зависят от малого параметра ε, хотя это явным образом и не отражено в используемых обозначениях.

Производная отображения $F_\varepsilon(v(\cdot))$ определяется равенством $F'_\varepsilon(v(\cdot))\Delta v(\cdot) = \Delta y(1)$, где $\Delta y(t)$ — решение линеаризованной вдоль пары $y(t, v(\cdot)), v(\cdot)$ системы

$$\dot{\Delta y}(t) = \varepsilon A_\varepsilon(t)\Delta y(t) + B_\varepsilon(t)v(t), \quad t \in [0,1], \quad \Delta y(0) = 0.$$

При выполнении условий предположения 2 отображение $F'_\varepsilon(v(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon$ $(L_0, L_1 \geq 0)$ [13]. Причем если коэффициенты матрицы f_2 в уравнении системы не зависят от состояния $(f_2(t, x) = f_2(t))$, то $L_0 = 0$. Ограничения на управление заданы шаром $B_{\mathbb{L}_2}(0, 1)$ с центром в нуле. Самосопряженный оператор $F'_\varepsilon(0)F'_\varepsilon(0)^*$ имеет вид

$$F'_\varepsilon(0)F'_\varepsilon(0)^* = W_\varepsilon(1),$$

где симметричная неотрицательно определенная матрица $W_\varepsilon(t)$ — грамиан управляемости линеаризованной в окрестности нулевого управления системы (2.2). Грамиан определяется равенством

$$W_\varepsilon(t) = \int_0^t X_\varepsilon(t, \tau)B_\varepsilon(t)B_\varepsilon^\top(t)X_\varepsilon^\top(t, \tau)d\tau.$$

Здесь $X_\varepsilon(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $(\dot{X}_\varepsilon(t, \tau) = \varepsilon A_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t, \tau),\ X(\tau, \tau) = I)$. Регулярность отображения $F'_\varepsilon(0)$ эквивалентна невырожденности грамиана, которая, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда линеаризованная система вполне управляема. В данном случае $F'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2}(0, 1)$ — множество достижимости в момент $t = 1$ системы, линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению.

Известно (см., например, [2]), что это множество является эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$, который можно представить в следующем виде:

$$F'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_\varepsilon^{-1}(1)x \le 1\}.$$

Далее для краткости используем обозначение $W_\varepsilon = W_\varepsilon(1)$. Сделаем невырожденную замену переменных $z = W_\varepsilon^{-1/2}x$, для произвольного вектора x из множества достижимости будем иметь неравенство $(z,z) \le 1$, т. е. $z \in B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$. Отсюда получаем

$$F'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2}(0,1) = W_\varepsilon^{1/2}B_{\mathbb{R}^n}(0,1).$$

Пусть, как и ранее, $\gamma^2(\varepsilon)$, $\eta^2(\varepsilon)$ минимальное и максимальное собственные числа W_ε. Так как $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$ то условие $\mu(\varepsilon)L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$ принимает вид

$$\sqrt{\varepsilon}L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon)). \tag{2.4}$$

В итоге мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение. *Пусть при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение* (2.4). *Тогда множество достижимости $G(t_1)$ выпукло при достаточно малых t_1 и*

$$h\Big(s(\varepsilon)(G(t_1) - x(t_1,0)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)W_\varepsilon^{1/2}B_{\mathbb{R}^n}(0,1)\Big) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.5}$$

Здесь $t_1 = t_0 + \varepsilon$, $x(t,0)$ — решение системы, отвечающее нулевому управлению, $s(\varepsilon) = 1/(\mu\,\eta(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon})$ — масштабирующий множитель.

В общем случае проверка выполнения условия (2.4) представляет достаточно трудную задачу, так как требует исследования асимптотики грамиана управляемости для нестационарной линейной системы, зависящей от малого параметра. Для отдельных случаев стационарных управляемых систем в [13] получены оценки минимального собственного числа грамиана управляемости линеаризованной системы.

Пусть исходная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \le t \le t_1, \tag{2.6}$$

$0 \le t \le t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, B — матрица размеров $n \times 1$ с интегральными квадратичными ограничениями на управление $u(\cdot) \in B(0,\mu)$. Считаем, что существует компактное множество $D \subset \mathbb{R}^n$, содержащее все траектории системы (2.6) и градиент $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на D.

Пусть $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t,0))$, где $x(t,0)$ — траектория, порожденная нулевым управлением. Предположим, что $f(x^0) = 0$, тогда $x(t,0) \equiv x^0$, следовательно,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0) = A$$

— постоянная матрица. Линеаризованная система в этом случае имеет вид

$$\dot{\Delta y}(t) = \varepsilon A\Delta y(t) + Bv(t), \quad t \in [0,1], \quad \Delta y(0) = 0.$$

Пусть $\gamma^2(\varepsilon)$ — минимальное собственное число W_ε. В [13] показано, что если пара (A,B) управляема, то $\gamma^2(\varepsilon) \ge \alpha\varepsilon^2$ при $n = 2$ и $\gamma^2(\varepsilon) \le \beta\varepsilon^4$ при $n \ge 3$ для некоторых $\alpha, \beta > 0$. Так как для системы (2.6) $L(\varepsilon) = L_1\varepsilon$ и $\eta(\varepsilon) = a + O(\varepsilon)$, $a > 0$, то

$$\sqrt{\varepsilon}L(\varepsilon)/\eta(\varepsilon) = L_1\varepsilon^{3/2}/(a + O(\varepsilon)) = o(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon)).$$

Это влечет выполнение условия (2.4) и, следовательно, соотношения (2.5) при $n = 2$. Для систем порядка $n \ge 3$ с одним входом выполнение соотношения не гарантируется.

В следующем разделе мы иллюстрируем применение полученных результатов к исследованию асимптотики множеств достижимости для нескольких нелинейных систем 2-го и 3-го порядков.

3. Примеры

3.1. Осциллятор Дуффинга

Рассмотрим в качестве примера осциллятор Дуффинга, описываемый уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 10x_1^3 + u, \quad 0 \le t \le \varepsilon \tag{3.1}$$

при интегральных ограничениях на управление

$$\int_0^{\varepsilon} u^2(t)dt \le \mu^2,$$

при нулевых начальных условиях $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$. Дифференцируя функцию Ляпунова

$$V(x) = V(x_1, x_2) = \frac{5}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

вдоль траектории системы (3.1) и применяя аналог леммы Грануолла, можно доказать, что все траектории системы (3.1) с нулевым начальным состоянием принадлежат компактному множеству $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \le \mu^2\varepsilon\}$ [14].

Линеаризованная вдоль траектории $x(t) \equiv 0$, отвечающей нулевому управлению, система имеет матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, является вполне управляемой. Грамиан управляемости W_ε представим в виде [13] $W_\varepsilon = S^2(\varepsilon) + \varepsilon^3 R(\varepsilon)$, где

$$S^2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\varepsilon) & \varphi_2(\varepsilon) \\ \varphi_2(\varepsilon) & \varphi_3(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$R(\varepsilon)$ — ограниченная матричная функция, $\varphi_1(\varepsilon) = \dfrac{1}{3}\varepsilon^2$, $\varphi_2(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}\varepsilon$, $\varphi_3(\varepsilon) = -\dfrac{1}{3}\varepsilon^2 + 1$. Собственные значения матрицы W_ε имеют вид

$$\lambda_{\min}(W_\varepsilon) = \nu(W_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^2), \quad \lambda_{\max}(W_\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^2).$$

Используя спектральное разложение матрицы $W_\varepsilon = U_\varepsilon D_\varepsilon U_\varepsilon^\top$, получим $W_\varepsilon^{1/2} = U_\varepsilon D_\varepsilon^{1/2} U_\varepsilon^\top$. Здесь $D_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon^2/12 + o(\varepsilon^2), 1 - \varepsilon^2/12 + o(\varepsilon^2))$, $D_\varepsilon^{1/2} = \mathrm{diag}(\varepsilon/\sqrt{12} + o(\varepsilon), 1 + o(\varepsilon))$, U_ε — ортогональная матрица.

При выборе $s(\varepsilon) = 1/\mu\sqrt{\varepsilon}$ мы имеем, учитывая, что $U_\varepsilon B(0,1) = B(0,1)$ в силу ортогональности U_ε, следующее равенство

$$s(\varepsilon)G(\varepsilon) = U_\varepsilon \mathrm{diag}(\varepsilon/\sqrt{12}, 1)B_{\mathbb{R}^2}(0,1) + r_\varepsilon,$$

где множество r_ε таково, что $h(r_\varepsilon, \{0\}) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, множество достижимости $G(\varepsilon)$ при малых ε близко по форме к эллипсоиду с полуосями, пропорциональными $\varepsilon/\sqrt{12}$ и 1. Иллюстрацией к данному заключению могут служить результаты численного моделирования в работе [13], демонстрирующие поведение множеств достижимости осциллятора Дуффинга при разных значениях длины временного интервала.

3.2. Билинейная система 2-го порядка с двумя входами

Рассмотрим билинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2u_1 - x_1u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1u_1 - x_2u_2, \end{cases}$$

начальное состояние которой задано равенствами $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. При ограничениях на управление вида $|u_1(t)| \le 1,\ |u_2(t)| \le 1,\ 0 \le t \le \varepsilon$, множество достижимости $G(\varepsilon)$ не выпукло при любом $\varepsilon > 0$ [15, с. 282]. Действительно, если записать систему в полярных координатах

$$\begin{cases} \dot{r} = -ru_2, \\ \dot{\varphi} = -u_1, \end{cases}$$

то понятно, что множество достижимости представляет собой часть кругового кольца на плоскости: $G(\varepsilon) = \{(r, \varphi) : \exp(-\varepsilon) \le r \le \exp(\varepsilon), -\varepsilon \le \varphi \le \varepsilon\}$. Если заменить поточечные ограничения на управление на интегральные ограничения следующего вида

$$\int\limits_0^\varepsilon u_1^2(t)dt \le 1, \quad \int\limits_0^\varepsilon u_2^2(t)dt \le 1,$$

то $G(\varepsilon)$ будет по-прежнему частью кругового кольца $G(\varepsilon) = \big\{(r, \varphi) : \exp(-\sqrt{\varepsilon}) \le r \le \exp(\sqrt{\varepsilon}), -\sqrt{\varepsilon} \le \varphi \le \sqrt{\varepsilon}\big\}$, т. е. не выпуклой. Заметим, что раздельные интегральные ограничения нельзя представить как ограничение на норму в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$.

Рассмотрим далее совместные интегральные ограничения на управление

$$\int\limits_0^{t_1} \left(u_1^2 + a^2u_2^2\right) dt \le 1,$$

где $a > 0$ — заданный параметр. Все траектории системы лежат внутри компактного множества на плоскости. Это легко доказать, используя переход к полярным координатам.

Сделав замену управления $\tilde{u}_2 = au_2$ и сохранив прежние обозначения для управления, придем к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2u_1 - \dfrac{1}{a}x_1u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1u_1 - \dfrac{1}{a}x_2u_2 \end{cases}$$

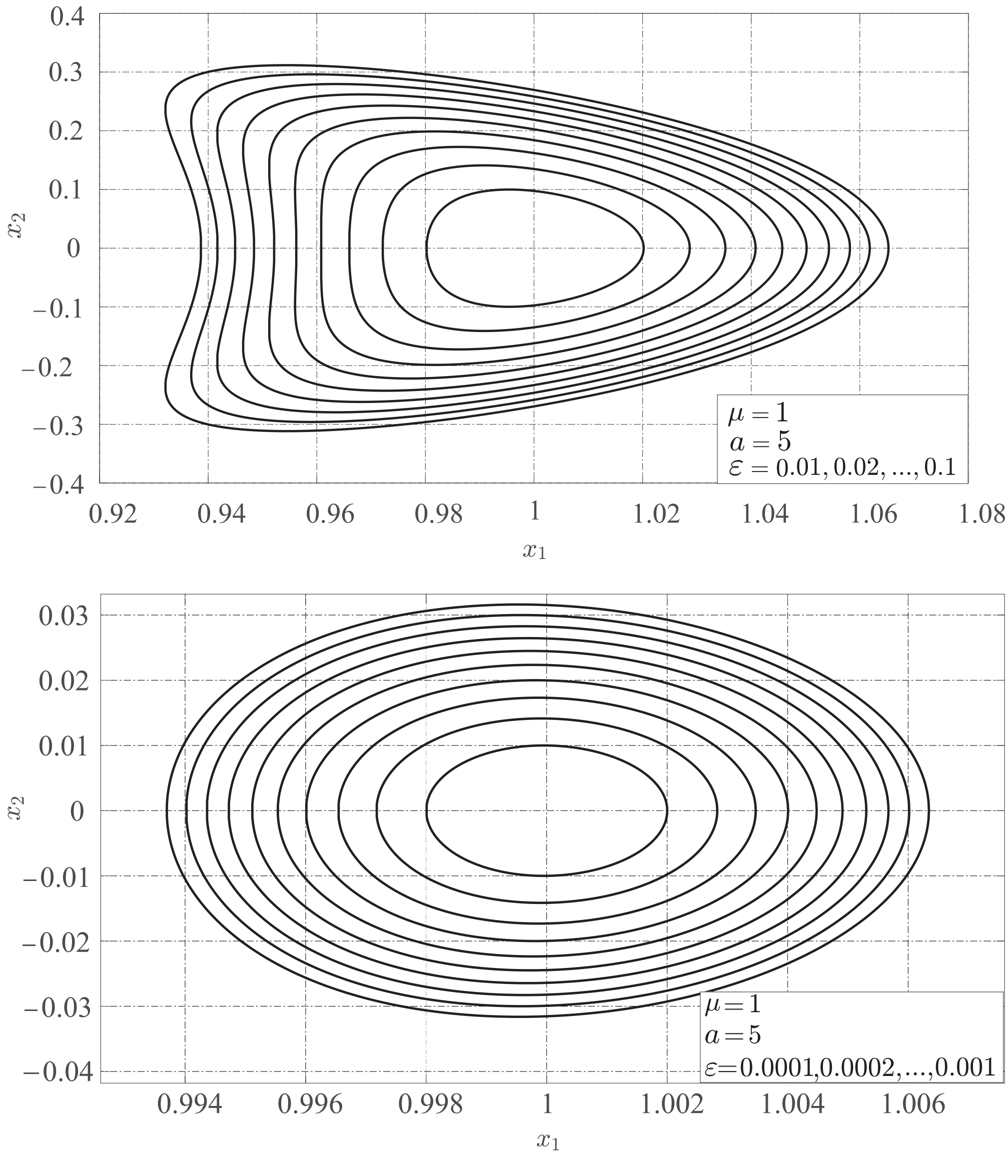
с ограничениями на норму управления в $\mathbb{L}_2$ $\displaystyle\int_0^{t_1} \left(u_1^2 + u_2^2\right) dt \le 1$. Матрицы A, B линеаризованной вдоль траектории $x(t) \equiv (1, 0)$, отвечающей нулевому управлению, системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1/a \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

система, следовательно, является вполне управляемой. Грамиан управляемости W_ε здесь не зависит от ε :

$$W_\varepsilon = BB^\top = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\nu(W_\varepsilon)$ и константа Липшица L не зависят от ε, то условие $\mu(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \le \nu/2L$, очевидно, выполнено для достаточно малых ε. Таким образом, множество достижимости $G(\varepsilon)$ является выпуклым. Если взять в качестве масштабирующего множителя $s(\varepsilon) = 1/\sqrt{\varepsilon}$, то при малых ε множество $s(\varepsilon)G(\varepsilon)$ близко к эллипсоиду $E = \{(x_1, x_2) : a^2x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.



Множества достижимости для билинейной системы

На рисунке приведены результаты численного моделирования для данного примера при $a = 5$. В верхней его части изображены границы множеств достижимости для значений ε от 0.1 до 0.01 с шагом 0.01. Из рисунка видно, что невыпуклые при ε, близких к 0.1, множества достижимости становятся выпуклыми по мере убывания длины промежутка времени. Нижняя часть рисунка соответствует значениям ε от 0.001 до 0.0001. Здесь уже все множества выпуклы и по форме близки к эллипсоидам, полуоси которых относятся как 1 к 5.

3.3. Уницикл

Данный пример демонстрирует невыпуклость множеств достижимости с интегральными ограничениями на управление даже при малых длинах временного промежутка.

Рассмотрим систему 3-го порядка (уницикл)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = \sin x_3, \qquad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

на отрезке $[0, \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. При геометрических ограничениях на управление множества достижимости для данной системы на плоскости (x_1, x_2) исследованы в [16] (см., также [17, с. 114–121]), общий трехмерный случай изучен в работе [18]. Множества достижимости в данной системе не являются выпуклыми.

Мы здесь рассматриваем интегральные ограничения на $u(t)$, заданные неравенством

$$\int_0^{\varepsilon} u^2(\tau)d\tau \leqslant \mu^2.$$

Покажем, что множество достижимости системы $G(\varepsilon)$ в данном случае также не является выпуклым при любом $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу оптимального управления с линейным терминальным критерием

$$x_1(\varepsilon) \to \min, \quad x(\varepsilon) \in G(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Так как множество достижимости замкнуто [5], то решение задачи существует. Выберем какую-либо оптимальную траекторию и обозначим эту траекторию и порождающее ее управление через $x^0(t)$ и $u^0(t)$, соответственно. Решение задачи не единственно, так как понятно, что для управления $\overline{u}(t) = -u^0(t)$ мы будем иметь $\overline{x}_3(t) = -x_3^0(t)$, $\overline{x}_1(t) = x_1^0(t)$, $\overline{x}_2(t) = -x_2^0(t)$. То есть $\overline{u}(t)$ — также оптимальное управление.

Введя дополнительную переменную x_4 равенством $\dot{x}_4(t) = u^2(t)$, задачу (3.2) представим в виде $x_1(\varepsilon) \to \min$ при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \\ \dot{x}_4 = u^2, \end{cases} \quad x_i(0) = 0, \ i = 1, \dots, 4,$$

$$x_4(\varepsilon) \le \mu^2.$$

Выпишем принцип максимума Понтрягина для данной задачи. Рассмотрим функцию Понтрягина $H(p, x, u) = p_1 \cos x_3 + p_2 \sin x_3 + p_3 u + p_4 u^2$ и функцию $l(\lambda_0, \lambda_1, x) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1 (x_4 - \mu^2)$. Оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию: существуют множители Лагранжа $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0$, $(\lambda_0, \lambda_1) \ne 0$, такие что

$$H(p(t), x^0(t), u^0(t)) = \max_u H(p(t), x^0(t), u), \quad 0 \le t \le \varepsilon,$$

где $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t))$ – решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -H_{x_1} = 0, \\ \dot{p}_2 = -H_{x_2} = 0, \\ \dot{p}_3 = -H_{x_3} = p_1 \sin x_3^0(t) - p_2 \cos x_3^0(t), \\ \dot{p}_4 = -H_{x_4} = 0; \end{cases}$$

выполнены также условие трансверсальности $p(\varepsilon) = -l_x(\lambda_0, \lambda_1, x^0(\varepsilon)) = -(\lambda_0, 0, 0, \lambda_1)$ и условие дополняющей нежесткости $\lambda_1(x_4^0(\varepsilon) - \mu^2) = 0$.

Из принципа максимума следует, что $H_u(p(t), x^0(t), u^0(t)) = 0$, и значит $2u^0(t)p_4(t) = -p_3(t)$. В итоге получаем

$$\begin{cases} p_1 = -\lambda_0, \\ p_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = -\lambda_0 \sin x_3^0(t), \\ p_4 = -\lambda_1. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то максимум H по u не достигается, что противоречит принципу максимума. Отсюда $\lambda_1 \ne 0$ и, следовательно, $p_4 = -\lambda_1 \ne 0$. Если $\lambda_0 = 0$, то $p_3(t) \equiv 0$, и значит $u^0(t) \equiv 0$.

Но при нулевом управлении $x_3(t) \equiv 0$, $\cos x_3 \equiv 1$, что соответствует максимальному, а не минимальному значению $x_1(\varepsilon)$.

Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, $u^0(t) = \dfrac{1}{2}\lambda_1^{-1}p_3$, и пара (x_3^0, p_3) есть решение краевой задачи.

$$\begin{cases} \dot{p}_3 = -\lambda_0 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{2}\lambda_1^{-1}p_3, \\ p_3(\varepsilon) = 0, \\ x_3(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Из второго уравнения системы (3.3) получаем $\displaystyle\int_0^\varepsilon \sin x_3^0(\tau)d\tau = 0$.

Интегрируя первое из уравнений системы (3.3), с учетом равенства $p_3(\varepsilon) = 0$ будем иметь $p_3(0) = 0$. Таким образом, $p_3(t), x_3^0(t)$ — решение системы (3.3) с нулевыми начальными условиями, и в силу теоремы единственности решения дифференциального уравнения имеем $p_3(t) \equiv 0$, $x_3^0(t) \equiv 0$. Но $x_3^0(t) \equiv 0$ соответствует решению задачи на максимум, а не минимум $x_1(\varepsilon)$.

Условие $x_2^0(\varepsilon) \neq 0$ справедливо для любой оптимальной траектории в задаче (3.2). Выбрав $\bar{u}(t) = -u^0(t)$, получим другую оптимальную траекторию $\bar{x}(t)$, для которой $\bar{x}_2(t) = -x_2^0(t)$, $\bar{x}_1(t) = x_1^0(t)$. Рассмотрим точку $\hat{x} = \dfrac{1}{2}x^0(\varepsilon) + \dfrac{1}{2}\bar{x}(\varepsilon)$, у которой $\hat{x}_1 = x_1^0(\varepsilon)$, $\hat{x}_2 = 0$. Покажем, что $\hat{x} \notin G(\varepsilon)$. Действительно, если $\hat{x} \in G(\varepsilon)$, то найдется допустимая траектория $\hat{x}(t)$, такая что $\hat{x}(\varepsilon) = \hat{x}$. Так как $\hat{x}_1 = \hat{x}_1(\varepsilon)$, то $\hat{x}(t)$ — оптимальная траектория. Но при этом $\hat{x}_2(\varepsilon) = 0$, что противоречит доказанному выше утверждению. Таким образом, полусумма точек $x^0(\varepsilon)$, $\bar{x}(\varepsilon) \in G(\varepsilon)$ не принадлежит $G(\varepsilon)$, т. е. $G(\varepsilon)$ невыпукла при любом $\varepsilon > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S.** Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261–268
4. **Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.** The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Diff. Eq. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
5. **Gusev M.I., Zykov I.V.** On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC PapersOnline. 2017. Vol. 50, iss. 1. P. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
6. **Krener A., Schättler H.** The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM J. Control Optim. 1989. Vol. 27, no. 1. P. 120–147. doi: 10.1137/0327008 .
7. **Schättler, H.** Small-time reachable sets and time-optimal feedback control // Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control / eds. B.S. Mordukhovich, H.J. Sussmann. N Y: Springer, 1996. Vol. 78. P. 203–225. (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications.) https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8489-2_9 .
8. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Math. Anal. 2004. Vol. 11. P. 255–267.
9. **Райсиг Г.** Выпуклость множеств достижимости систем управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 9. С. 64–78.
10. **Goncharova E., Ovseevich A.** Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 168 (2). P. 615–624. doi: 10.1007/s10957-015-0754-4 .
11. **Gusev M.I.** On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382 .

12. **Поляк Б.Т.** Локальное программирование // Журн. вычисл. математки и мат. физики. 2001. Т. 41, № 9. С. 1324–1331.
13. **Gusev M.I.** Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 2019. Vol. 11548. P. 461–473. (Lecture Notes in Computer Science.) doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_32 .
14. **Зыков И.В.** О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2019. Т. 53. С. 61–72. doi: 10.20537/2226-3594-2019-53-06 .
15. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
16. **Cockayne E.J., Hall G.W.C.** Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220. doi: 10.1137/0313012 .
17. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с.
18. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.

Поступила 7.07.2019
После доработки 12.07.2019
Принята к публикации 5.08.2019

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
ведущий науч. сотрудник
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Осипов Иван Олегович
аспирант
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: 79193053374@yandex.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation Under the Conditions of Uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Guseinov Kh.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 261–268.
4. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
5. Gusev M.I., Zykov I.V. On Extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
6. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, 1989, vol. 27, no. 1, pp. 120–147. doi: 10.1137/0327008 .
7. Schättler, H. Small-time reachable sets and time-optimal feedback control. In: Mordukhovich B.S., Sussmann H.J. (eds.) *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, N Y: Springer, 1996, vol. 78, pp. 203–225. doi: 10.1007/978-1-4613-8489-2_9 .
8. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.

9. Reißig G. Convexity of reachable sets of nonlinear ordinary differential equations. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1527–1543. doi: 10.1134/S000511790709007X.
10. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set. *J. Optim. Theory. Appl.*, 2016, vol. 168, no. 2, pp. 615–624. doi: 10.1007/s10957-015-0754-4.
11. Gusev M.I. On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 207–212. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.382.
12. Polyak B.T. Local programming. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 9, pp. 1259–1266.
13. Gusev M.I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (MOTOR 2019), Ser. Lecture Notes in Computer Science, 2019, vol. 11548, pp. 461–473. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_32.
14. Zykov I.V. On external estimates of the reachable sets for control systems with integral constraints. *Izv. IMI UdGU*, 2019, vol. 53, pp. 61–72 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-53-06.
15. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635.
16. Cockayne E.J., Hall G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. doi: 10.1137/0313012.
17. Berdyshev Yu.I. *Nelineynye zadachi posledovatelnogo upravleniya i ih prilozhenie* [Nonlinear sequential control problems and their application]. Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2015. 193 c. ISBN: 978-5-8295-0381-9.
18. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.

Received July 7, 2019
Revised July 12, 2019
Accepted August 5, 2019

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Ivan Olegovich Osipov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: 79193053374@yandex.ru.

Cite this article as: M. I. Gusev, I. O. Osipov. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 86–99.