ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

К ПОСТРОЕНИЮ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО СЕЛЕКТОРА МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

Д. А. Серков, А. Г. Ченцов

В работе изучаются свойства многозначных отображений общего вида в аспекте возможности выделения из них неупреждающих селекторов. Свойство неупреждаемости формулируется для произвольной области определения заданием некоторого семейства “тестовых” подмножеств. Предложены достаточные условия существования неупреждающего селектора неупреждающего многозначного отображения: его значения должны быть непустыми компактами, а семейство “тестовых” подмножеств необходимо линейно упорядочить по включению. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрена возможность их приложения к дифференциальной игре сближения-уклонения в форме П. Варайя и Дж. Лин.

Ключевые слова: квазистратегия, неупреждаемость, селектор, топология.

D. A. Serkov, A. G. Chentsov. On the construction of a nonanticipating selection of a multivalued mapping.

We study the properties of multivalued mappings of general form with respect to the possibility of finding their nonanticipating selections. The property of nonanticipation is formulated for an arbitrary domain by specifying some family of “test” subsets. Sufficient conditions for the existence of a nonanticipating selection of a nonanticipating multivalued mapping are proposed: the values of the mapping must be nonempty compact sets, and the family of “test” subsets must be totally ordered by inclusion. We illustrate the results by showing their applicability to the pursuit–evasion differential game in the form of P. Varaya and J. Lin.

Keywords: quasistrategy, nonanticipation, selection, topology.

MSC: 49N70, 54C65

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-232-246

Введение

Свойство неупреждаемости играет важную роль в теории дифференциальных игр (ДИ) в связи с построением идеализированных разрешающих стратегий. В ранних работах идеализированные стратегии — квазистратегии — определялись в виде операторов на функциональных пространствах управлений или траекторий со свойством физической осуществимости или неупреждаемости (см. [1–4] и др.). С другой стороны, в некоторых конструкциях, приводящих к неподвижным точкам операторов программного поглощения (см. [5]), естественным образом возникают неупреждающие многозначные отображения (МО) и, как следствие, многозначные квазистратегии. Вопрос о селекции МО с сохранением свойства неупреждаемости для отображений на пространствах обобщенных управлений рассматривался в [6], где существенно использовалась специфика управлений-мер. Данное исследование [6] было выполнено в связи с вопросом, поставленным Н. Н. Красовским одному из авторов. Известно, что в ДИ сближения-уклонения формализация в классе квазистратегий эквивалентна (см. [7]) позиционной формализации, т. е. формализации в классе процедур управления по принципу обратной связи (см. [8; 9]). Основополагающим фактом, касающимся структуры ДИ, является теорема

[1]Работа выполнена в рамках проекта “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Как следствие было установлено существование седловой точки для типичных показателей качества. Важно отметить, что упомянутая позиционная формализация допускает естественную для инженерных приложений реализацию с применением пошаговых движений с дискретизацией во времени. В этой связи существенную роль сыграли процедуры управления с поводырем (моделью), предложенные Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным (см. [9, § 57]). Оказалось, что в упомянутых процедурах могут использоваться квазистратегии (см. [10]).

Процедуры, конструируемые на основе метода программных итераций (МПИ), доставляют квазистратегии в виде МО (см. [6; 11; 12]). При этом реализуется непрямая версия МПИ, приводящая к последовательности множеств в пространстве позиций или последовательности функций. Другой вариант МПИ (по смыслу, прямая версия) реализует (см. [13; 14]) итерационную последовательность непосредственно в пространстве МО. Таким образом, многозначные квазистратегии, разрешающие соответствующую игровую задачу, определяются конструктивно. В то же время при решении ДИ широко используются однозначные квазистратегии (см. [1–4]). Возникает естественный вопрос о селекции неупреждающих МО в духе [6], но не связываемых обязательно с преобразованием обобщенных управлений — борелевских мер. В частности, представляется интересным вариант, связанный с построениями [3] и реализуемый в виде реакции непосредственно на пространстве траекторий. Здесь также естественной является задача о построении неупреждающего селектора заданного МО.

В настоящей работе изучается вариант достаточно общей постановки такого рода: показано, что для неупреждающего (в широком смысле) МО со свойствами непустозначности и компактности множеств-значений существует неупреждающий селектор.

1. Определения и обозначения общего характера

В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и т. п.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — произвольные объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Если a и b — некоторые объекты, то (см. [15, с. 67]) $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Если z есть УП, то через $\mathbf{pr}_1(z)$ и $\mathbf{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathbf{pr}_1(z), \mathbf{pr}_2(z))$.

Через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ условимся обозначать соответственно семейства всех и всех непустых подмножеств (п/м) произвольного множества X. Если A и B — непустые множества, то обозначим через B^A множество всех отображений из A в B (см. [15, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f \,|\, C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f \,|\, C)(x) \triangleq f(x) \;\; \forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $\big(F \,|\, C\big) \triangleq \{(f \,|\, C) \colon f \in F\}$. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, а B — множество, то через $\mathfrak{X}|_B$ будем обозначать сужение семейства $\mathfrak{X}$ на множество B: $\mathfrak{X}|_B \triangleq \{X \cap B \colon X \in \mathfrak{X}\}$. В качестве $\mathfrak{X}$ может использоваться топология некоторого множества, содержащего B.

В дальнейшем широко используется операция обобщенного декартова произведения (см., например, [15, гл. IV, §5]): если X и Y — непустые множества и $\alpha \in \mathcal{P}(Y)^X$, то

$$\prod_{x \in X} \alpha(x) \triangleq \{f \in Y^X \mid f(x) \in \alpha(x) \;\forall x \in X\}.$$

Назовем пару $(X, \prec)$ *частично упорядоченным множеством* (ЧУМ), если X — множество, $X \neq \varnothing$, и $\prec \in \mathcal{P}(X \times X)$ — отношение (нестрогого) частичного порядка на X. В частности, $(\mathcal{P}(X), \subset_X)$ — ЧУМ булеана множества X с отношением вложения: $\subset_X \triangleq \{w \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid \mathbf{pr}_1(w) \subset \mathbf{pr}_2(w)\}$. Для всякого ЧУМ $(X, \prec)$ и произвольного п/м $S \in \mathcal{P}(X)$ (множества X)

назовем S *цепью*, если это п/м линейно упорядочено (т. е. для любых двух элементов $x \in S$, $y \in S$ выполняется условие $(x \prec y) \vee (y \prec x)$). Заметим, что для всякого множества X, $X \neq \varnothing$, каждая цепь $\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(X), \subset_X)$ есть центрированное семейство (см. [16, п. 3.1, с. 196]).

Если X — непустое множество, а семейство $\tau \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ — топология на этом множестве, то для всякого элемента $x \in X$ через $N_\tau(x)$ будем обозначать семейство всех открытых окрестностей x, т. е. семейство всех открытых множеств (множеств из τ), содержащих x: $N_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$. Для любых двух непустых топологических пространств (ТП) (U, ξ) и (V, ζ) множество $C(U, \xi, V, \zeta)$ есть множество всех (ξ, ζ)-непрерывных отображений из множества V^U. Напомним, что в случае метризуемых ТП (U, ξ) и (V, ζ) ТП $C(U, \xi, V, \zeta)$ есть также множество всех секвенциально (ξ, ζ)-непрерывных отображений из множества V^U.

2. Основные конструкции

Фиксируем непустые множества X, Y и T, а также (непустые) множества $\Omega \in \mathcal{P}'(\mathrm{Y}^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{Z} \in \mathcal{P}'(\mathrm{X}^{\mathrm{T}})$ и семейство $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathrm{T}))$; иными словами, $\mathcal{T}$ — непустое семейство непустых множеств. В терминах $\mathcal{T}$ определяется ключевое в настоящей работе понятие *неупреждаемости*: отображение $z \in \mathrm{Z}^\Omega$ называем *неупреждающим* (относительно $\mathcal{T}$), если $\forall \omega_1 \in \Omega$, $\forall \omega_2 \in \Omega$, $\forall A \in \mathcal{T}$ имеем

$$((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \Rightarrow ((z(\omega_1) \,|\, A) = (z(\omega_2) \,|\, A)). \tag{2.1}$$

Свойству (2.1) сопоставляем аналог для МО: отображение $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ называем *неупреждающим*, если $\forall \omega_1 \in \Omega$, $\forall \omega_2 \in \Omega$, $\forall A \in \mathcal{T}$ выполняется

$$((\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A)) \Rightarrow \Big(\big(\mathbf{z}(\omega_1) \,|\, A\big) = \big(\mathbf{z}(\omega_2) \,|\, A\big)\Big). \tag{2.2}$$

Основной вопрос, рассматриваемый в данной работе, состоит в следующем: при каких условиях МО $\mathbf{z}$ обладает неупреждающим селектором; иными словами, при каких условиях существует селектор $z \in \prod_{\omega \in \Omega} \mathbf{z}(\omega)$, неупреждающий в смысле (2.1)?

В связи с этой задачей введем некоторые дополнительные определения. Оснащаем множество МО $\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ частичным порядком $\sqsubseteq$, полагая для любых $\alpha_1 \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $\alpha_2 \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} (\alpha_1(\omega) \subset \alpha_2(\omega) \ \forall \omega \in \Omega). \tag{2.3}$$

Если $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$, то $(\mathrm{DOM})[\mathbf{z}] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{z}(\omega) \neq \varnothing\}$. При $\omega \in \Omega$, $z \in \mathrm{Z}$ и $A \in \mathcal{P}'(\mathrm{T})$ обозначим

$$\begin{gathered}\Omega_0(\omega \,|\, A) \triangleq \{h \in \Omega \mid (\omega \,|\, A) = (h \,|\, A)\} \in \mathcal{P}'(\Omega), \\ \mathrm{Z}_0(z \,|\, A) \triangleq \{g \in \mathrm{Z} \mid (z \,|\, A) = (g \,|\, A)\} \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z}).\end{gathered} \tag{2.4}$$

Таким образом, определены множества *ростков* отображений из Ω и Z соответственно. Заметим, что для любых $A \in \mathcal{T}$ и $A' \in \mathcal{T}$

$$(A \subset A') \Rightarrow \big((\Omega_0(\omega \,|\, A') \subset \Omega_0(\omega \,|\, A) \ \forall \omega \in \Omega) \ \& \ (\mathrm{Z}_0(z \,|\, A') \subset \mathrm{Z}_0(z \,|\, A) \ \forall z \in \mathrm{Z})\big). \tag{2.5}$$

Обозначим через $\mathbf{N}$ множество всех неупреждающих МО из $\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$:

$$\mathbf{N} \triangleq \Big\{\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega \mid \forall A \in \mathcal{T} \ \forall \omega \in \Omega \ \forall \omega' \in \Omega \ \ ((\omega \,|\, A) = (\omega' \,|\, A)) \Rightarrow \Big(\big(\mathbf{z}(\omega) \,|\, A\big) = \big(\mathbf{z}(\omega') \,|\, A\big)\Big)\Big\}$$

$$= \Big\{\mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega \mid \big(\mathbf{z}(\omega) \,|\, A\big) = \big(\mathbf{z}(\omega') \,|\, A\big) \ \forall A \in \mathcal{T} \ \forall \omega \in \Omega \ \forall \omega' \in \Omega_0(\omega \,|\, A)\Big\}.$$

Среди всех таких отображений для нас наиболее важными будут мультиселекторы произвольно заданных МО: для $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ обозначим:

$$\mathbf{N}_0[\alpha] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathbf{N} \mid \mathbf{z} \sqsubseteq \alpha\}; \tag{2.6}$$

тогда в виде
$$\mathbf{N}^0[\alpha] \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0[\alpha] \mid (\mathrm{DOM})[\mathbf{z}] = \Omega\} \tag{2.7}$$
получаем множество всех непустозначных неупреждающих мультиселекторов МО α.

Замечание 1. Элементы $\mathbf{N}_0[\alpha]$ можно рассматривать как абстрактные аналоги многозначных квазистратегий, широко используемых в теории дифференциальных игр (в этой связи отметим также и конструкции неупреждающих однозначных управляющих отображений (см. [1–4] и др.).

Введем (см. [13, (2.10)]) поточечно исполняемое "объединение" МО: если $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega)$, то полагаем, что $\bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ определяется условием: $\forall \omega \in \Omega\ \big(\bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z}\big)(\omega) \triangleq \bigcup_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z}(\omega)$. Заметим, что в виде $\bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z}$ мы имеем точную верхнюю грань множества $\mathbb{M}$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega, \sqsubseteq)$. Исходя из определения, без труда проверяем справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'(\mathbf{N}_0[\alpha])$, то $\bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0[\alpha]$. Кроме того,*
$$\big(\forall \omega \in \Omega\ \ \exists \mathbf{z} \in \mathbb{M} \colon \mathbf{z}(\omega) \neq \varnothing\big) \Rightarrow \Big(\bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbb{M}} \mathbf{z} \in \mathbf{N}^0[\alpha]\Big). \tag{2.8}$$

Как следствие леммы 1 для $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $\mathbb{M} = \mathbf{N}_0[\alpha]$ мы получаем представление наибольшего элемента множества $\mathbf{N}_0[\alpha]$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega, \sqsubseteq)$ (см. [13, (2.15)]):
$$(\mathrm{na})[\alpha] \triangleq \bigvee_{\mathbf{z}\in\mathbf{N}_0[\alpha]} \mathbf{z}. \tag{2.9}$$

Замечание 2. При дополнительных условиях топологического характера для построения МО (2.9) можно использовать итерационную процедуру (см. [14, теорема 6.1; 13, предложение 3.2]), реализующуюся в $\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$. Тогда (см. [14, (40); 13, (3.25)]) МО $(\mathrm{na})[\alpha]$ есть предел итерационной последовательности с начальным элементом α. В общем случае МО (2.9) также может быть представлено в форме предела, но на этот раз, вообще говоря, для несчетной (трансфинитной) процедуры с начальным элементом α (см. [17, (3.11); 18, предложение 5.2]).

В связи с (2.1), (2.6) и (2.7) введем в рассмотрение также множество $\mathbf{n}^0[\alpha]$, $\mathbf{n}^0[\alpha] \subset \mathrm{Z}^\Omega$, однозначных неупреждающих селекторов произвольного МО $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$:
$$\mathbf{n}^0[\alpha] \triangleq \Big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\Big|\, \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in \Omega\ \ \omega' \in \Omega\ \big((\omega'' \mid A) = (\omega' \mid A)\big) \Rightarrow \big((h(\omega'') \mid A) = (h(\omega') \mid A)\big)\Big\}$$
$$= \Big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\Big|\, h(\omega') \in \mathrm{Z}_0(h(\omega'') \mid A)\ \ \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in \Omega\ \ \omega' \in \Omega_0(\omega'' \mid A)\Big\}. \tag{2.10}$$
В связи с (2.7) и (2.10) отметим, что при любом $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ истинна импликация
$$(g \in \mathbf{n}^0[\alpha]) \Rightarrow \big((\{g(\omega)\})_{\omega\in\Omega} \in \mathbf{N}^0[\alpha]\big). \tag{2.11}$$

В последующих построениях нам потребуется релаксированный вариант множества $\mathbf{n}^0[\alpha]$ — множество $\mathbf{n}^0_H[\alpha]$, $\mathbf{n}^0_H[\alpha] \subset \mathrm{Z}^\Omega$, всех однозначных селекторов МО α, удовлетворяющих свойству неупреждаемости (2.1) лишь на некотором п/м H множества Ω: пусть $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ и $H \in \mathcal{P}(\Omega)$, тогда множество $\mathbf{n}^0_H[\alpha]$ определяется в виде
$$\mathbf{n}^0_H[\alpha] \triangleq \Big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\Big|\, \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in H\ \ \omega' \in H\ \big((\omega'' \mid A) = (\omega' \mid A)\big) \Rightarrow \big((h(\omega'') \mid A) = (h(\omega') \mid A)\big)\Big\}$$
$$= \Big\{h \in \prod_{\omega\in\Omega} \alpha(\omega) \,\Big|\, h(\omega') \in \mathrm{Z}_0(h(\omega'') \mid A)\ \ \forall A \in \mathcal{T}\ \ \forall \omega'' \in H\ \ \forall \omega' \in H \cap \Omega_0(\omega'' \mid A)\Big\}. \tag{2.12}$$

Заметим, что из определения (2.12) сразу следует изотонность отображения $\mathcal{P}(\Omega) \ni H \mapsto \mathbf{n}^0_H[\alpha] \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})$: для любых $H \in \mathcal{P}(\Omega)$, $H' \in \mathcal{P}(\Omega)$ истинна импликация

$$(H' \subset H) \Rightarrow (\mathbf{n}^0_H[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_{H'}[\alpha]). \tag{2.13}$$

Введем отдельно обозначение для случая, когда $\alpha = \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ — наибольший элемент (см. (2.3)) в решетке $(\mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega, \sqsubseteq)$, т. е. постоянное на Ω отображение со значением Z:

$$\mathbf{n}^0_H \triangleq \{h \in \mathrm{Z}^\Omega \mid h(\omega') \in \mathrm{Z}_0(h(\omega) \,|\, A) \ \ \forall A \in \mathcal{T} \ \ \forall \omega \in H \ \ \forall \omega' \in H \cap \Omega_0(\omega \,|\, A)\}. \tag{2.14}$$

Таким образом, $\mathbf{n}^0_H$ — множество всех неупреждающих на H отображений из Z^Ω. Заметим, что при введенных обозначениях выполняются соотношения $\mathbf{n}^0[\alpha] = \mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$, $\mathbf{n}^0_H = \mathbf{n}^0_H[\mathcal{Z}]$, а также

$$\mathbf{n}^0_\varnothing[\alpha] = \prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \qquad \mathbf{n}^0_\varnothing = \mathrm{Z}^\Omega \neq \varnothing, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{n}^0_H[\alpha] = \big(\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)\big) \bigcap \mathbf{n}^0_H. \tag{2.16}$$

3. Достаточные условия существования неупреждающего селектора многозначного отображения

В настоящем разделе устанавливаются условия существования неупреждающего (однозначного) селектора МО. Этот раздел исследования — промежуточный этап, отвечающий случаю, когда упомянутое МО само является неупреждающим. С учетом результатов предыдущего раздела эти условия определяют основу построения неупреждающего селектора произвольного МО.

Пусть множество X (см. разд. 2) оснащено топологией τ_X. Далее полагаем, что на множестве $\mathrm{Z} \in \mathcal{P}'(\mathrm{X}^\mathrm{T})$ действует топология τ_Z, индуцированная топологией $\otimes^\mathrm{T}(\tau_\mathrm{X})$ тихоновской степени ТП $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ с индексным множеством T (см. [16, 2.3]), а на множестве Z^Ω — топология τ_{Z^Ω} тихоновской степени ТП $(\mathrm{Z}, \tau_\mathrm{Z})$ с индексным множеством Ω.

Определим для произвольно выбранного МО $\alpha \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^\Omega$ семейство $\mathcal{H}_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\Omega))$ вида

$$\mathcal{H}_\alpha \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathbf{n}^0_H[\alpha] \neq \varnothing\}. \tag{3.1}$$

Семейство $\mathcal{H}_\alpha$ не пусто при любом $\alpha \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})^\Omega$, так как в этом случае (см. (2.15)) оно содержит пустое множество, а также все синглетоны из семейства $\mathcal{P}'(\Omega)$.

Лемма 2. *Если* $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ *есть* T_1*-пространство, то для любых* $M \in \mathcal{P}'(\mathrm{T})$ *и* $h \in \mathrm{Z}$ *множество* $\mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ *замкнуто в* $(\mathrm{Z}, \tau_\mathrm{Z})$.

Доказательство. Для доказательства замкнутости $\mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ покажем, что множество $\mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ открыто. Выберем $g \in \mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ и элемент $\xi \in M$ со свойством $h(\xi) \neq g(\xi)$. Так как $(\mathrm{X}, \tau_\mathrm{X})$ — T_1-пространство, найдется окрестность $O_\mathrm{X} \in N_{\tau_\mathrm{X}}(g(\xi))$ такая, что

$$h(\xi) \notin O_\mathrm{X}. \tag{3.2}$$

Определим открытое множество $O_\mathrm{Z} \in \tau_\mathrm{Z}$, полагая

$$O_\mathrm{Z} \triangleq \{f \in \mathrm{Z} \mid f(\xi) \in O_\mathrm{X}\}. \tag{3.3}$$

Из построения следует, что $O_\mathrm{Z} \in N_{\tau_\mathrm{Z}}(g)$. С учетом соотношений (3.2) и (3.3) рассуждениями “от противного” легко проверить равенство $O_\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}_0(h \,|\, M) = \varnothing$.

Итак, выполнены соотношения $O_\mathrm{Z} \in N_{\tau_\mathrm{Z}}(g)$, $O_\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$. В силу произвольного выбора g это означает (см. [16, 1.1, с. 33]), что множество $\mathrm{Z} \setminus \mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ является открытым. Следовательно, множество $\mathrm{Z}_0(h \,|\, M)$ замкнуто.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $(\mathrm{X},\tau_{\mathrm{X}})$ *есть* T_2*-пространство и дано МО* $\beta\in\mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$*, значения которого* $\beta(\omega)$ *компактны в* $(\mathrm{Z},\tau_{\mathrm{Z}})$ *при всех* $\omega\in\Omega$*, тогда для любого* $H\in\mathcal{P}(\Omega)$ *множество* $\mathbf{n}^0_H[\beta]$ *компактно в* $(\mathrm{Z}^{\Omega},\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Выберем произвольно $H\in\mathcal{P}(\Omega)$ и установим замкнутость множества $\mathbf{n}^0_H$ (см. (2.14)) в ТП $(\mathrm{Z}^{\Omega},\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$. Для доказательства замкнутости $\mathbf{n}^0_H$ покажем, что множество $\mathrm{Z}^{\Omega}\setminus\mathbf{n}^0_H$ открыто.

Выберем произвольно $\bar{\alpha}\in\mathrm{Z}^{\Omega}\setminus\mathbf{n}^0_H$. Тогда существуют $\omega_1\in\Omega$, $\omega_2\in\Omega$ и $A\in\mathcal{T}$ такие, что

$$(\omega_1\in H)\ \&\ (\omega_2\in H)\ \&\ ((\omega_1\,|\,A)=(\omega_2\,|\,A))\ \&\ ((\bar{\alpha}(\omega_1)\,|\,A)\neq(\bar{\alpha}(\omega_2)\,|\,A)). \tag{3.4}$$

Обозначим для краткости $h_1\triangleq\bar{\alpha}(\omega_1)$, $h_2\triangleq\bar{\alpha}(\omega_2)$. Из (3.4) следует существование $\xi\in A$ такого, что $h_1(\xi)\neq h_2(\xi)$. Тогда, поскольку $(\mathrm{X},\tau_{\mathrm{X}})$ — T_2-пространство, найдутся окрестности $O_{\mathrm{X}1}\in N_{\tau_{\mathrm{X}}}(h_1(\xi))$, $O_{\mathrm{X}2}\in N_{\tau_{\mathrm{X}}}(h_2(\xi))$ такие, что

$$O_{\mathrm{X}1}\cap O_{\mathrm{X}2}=\varnothing. \tag{3.5}$$

Определим открытые множества $O_{\mathrm{Z}1}\in\tau_{\mathrm{Z}}$, $O_{\mathrm{Z}2}\in\tau_{\mathrm{Z}}$ вида

$$O_{\mathrm{Z}1}\triangleq\{g\in\mathrm{Z}\mid g(\xi)\in O_{\mathrm{X}1}\},\qquad O_{\mathrm{Z}2}\triangleq\{f\in\mathrm{Z}\mid f(\xi)\in O_{\mathrm{X}2}\}. \tag{3.6}$$

Из построения следует, что $O_{\mathrm{Z}1}\in N_{\tau_{\mathrm{Z}}}(h_1)$, $O_{\mathrm{Z}2}\in N_{\tau_{\mathrm{Z}}}(h_2)$. Зададим открытое множество $O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}\in\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}$ следующим образом:

$$O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}\triangleq\{\delta\in\mathrm{Z}^{\Omega}\mid(\delta(\omega_1)\in O_{\mathrm{Z}1})\ \&\ (\delta(\omega_2)\in O_{\mathrm{Z}2})\}. \tag{3.7}$$

По построению имеем $O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}\in N_{\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}}(\bar{\alpha})$. Рассуждением "от противного" легко проверить равенство $O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}\cap\mathbf{n}^0_H=\varnothing$.

В самом деле, пусть нашлось

$$\gamma\in\mathbf{n}^0_H \tag{3.8}$$

такое, что $\gamma\in O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}$. Из последнего включения получаем (см. (3.7)) $\gamma(\omega_1)\in O_{\mathrm{Z}1}$, $\gamma(\omega_2)\in O_{\mathrm{Z}2}$. Таким образом (см. (3.6)), выполнены включения $\gamma(\omega_1)(\xi)\in O_{\mathrm{X}1}$, $\gamma(\omega_2)(\xi)\in O_{\mathrm{X}2}$. Значит (см. (3.5)), имеем свойство $\gamma(\omega_1)(\xi)\neq\gamma(\omega_2)(\xi)$, из которого в силу включения $\xi\in A$ следует соотношение $(\gamma(\omega_1)\,|\,A)\neq(\gamma(\omega_2)\,|\,A)$, противоречащее (3.8). Действительно, по выбору ω_1, ω_2 имеем (см. (3.4)) $\omega_1\in H$, $\omega_2\in H$ и $(\omega_1\,|\,A)=(\omega_2\,|\,A)$, а тогда из (3.8) должно вытекать равенство $(\gamma(\omega_1)\,|\,A)=(\gamma(\omega_2)\,|\,A)$. Иначе говоря, $\gamma\notin\mathbf{n}^0_H$. Получено требуемое противоречие.

Итак, выполнены соотношения

$$O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}\in N_{\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}}(\bar{\alpha}),\qquad O_{\mathrm{Z}^{\Omega}}\subset\mathrm{Z}^{\Omega}\setminus\mathbf{n}^0_H.$$

В силу произвольного выбора $\bar{\alpha}$ это означает (см. [16, 1.1, с. 33]), что множество $\mathrm{Z}^{\Omega}\setminus\mathbf{n}^0_H$ является открытым. Следовательно, множество $\mathbf{n}^0_H$ замкнуто.

2. Выберем и зафиксируем МО β, удовлетворяющее условиям утверждения. Если при некотором $\omega\in\Omega$ окажется выполненным равенство $\beta(\omega)=\varnothing$, то, очевидно, выполняется равенство $\mathbf{n}^0_H[\beta]=\varnothing$, а вместе с ним и утверждение леммы. Исходя из этого, нам остается рассмотреть лишь случай $\beta\in\mathcal{P}'(\mathrm{Z})^{\Omega}$.

Из замкнутости множества $\mathbf{n}^0_H$ в $(\mathrm{Z}^{\Omega},\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}})$ с учетом (2.16) имеем замкнутость его п/м $\mathbf{n}^0_H[\beta]$ в ТП $(\prod\limits_{\omega\in\Omega}\beta(\omega),\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}|_{\prod\limits_{\omega\in\Omega}\beta(\omega)})$ как следа замкнутого множества. В силу непустоты и компактности значений $\beta(\omega)$ при любом $\omega\in\Omega$ само ТП $(\prod\limits_{\omega\in\Omega}\beta(\omega),\tau_{\mathrm{Z}^{\Omega}}|_{\prod\limits_{\omega\in\Omega}\beta(\omega)})$ компактно (см. [16, теорема 3.2.4]). Из (2.16) и из компактности этого ТП следует (см. [16, теорема 3.1.2]) искомая компактность $\mathbf{n}^0_H[\beta]$.

Лемма доказана.

Предложение 1. *Если* $(\mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}})$ — T_2*-пространство,* $\mathcal{T}$ — *цепь в ЧУМ* $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$, $\alpha \in \mathbf{N}$ *и множества* $\alpha(\omega)$ *непусты и компактны в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *при любом* $\omega \in \Omega$, *то* $\mathbf{n}^0[\alpha]$ — *непустое компактное в* $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$ *множество.*

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что условия неупреждаемости α, непустоты его значений и линейной упорядоченности семейства $\mathcal{T}$ являются существенными: без любого из этих условий предложение 1 может, вообще говоря, не выполняться (существенность первых двух условий очевидна; относительно линейной упорядоченности $\mathcal{T}$ см. [19]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем МО $\alpha \in \mathbf{N}$, удовлетворяющее условиям утверждения. Определим семейство $\mathcal{H}_\alpha \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\Omega))$, следуя (3.1). Это семейство непусто, так как пустое множество (см. (2.15)) и синглетоны элементов из Ω, очевидно, содержатся в нем. Обозначим $\preccurlyeq \triangleq \subset_\Omega \cap(\mathcal{H}_\alpha \times \mathcal{H}_\alpha)$.

В силу отмеченного выше равенства $\mathbf{n}^0[\alpha] = \mathbf{n}^0_\Omega[\alpha]$ компактность множества $\mathbf{n}^0[\alpha]$ сразу следует из леммы 3.

Схема доказательства непустоты множества $\mathbf{n}^0[\alpha]$ такова: сначала, пользуясь леммой Цорна, мы покажем, что в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$ существует максимальный элемент, а затем убедимся, что всякий такой максимальный элемент совпадает с Ω.

1. Пусть $\mathfrak{h}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$. Обозначим через $\bar{H}$ объединение всех множеств из $\mathfrak{h}$

$$\bar{H} \triangleq \bigcup_{H \in \mathfrak{h}} H \tag{3.9}$$

и проверим, что $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Если это так, то $\bar{H}$ является верхней гранью цепи $\mathfrak{h}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$.

Нетрудно видеть, что при всяком $H \in \mathfrak{h}$ для α и H выполняются условия леммы 3. Следовательно, при всяком $H \in \mathfrak{h}$ множество $\mathbf{n}^0_H[\alpha]$ компактно в $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$. Из T_2-отделимости топологии τ_{X} в силу определений τ_{Z}, τ_{Z^Ω} вытекает, что τ_{Z^Ω} также является T_2-топологией. Отсюда, всякое компактное в $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$ множество замкнуто. Таким образом, семейство $\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\}$ состоит из замкнутых в ТП $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$ множеств. В силу замкнутости $\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$ в ТП $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$ всякое п/м $\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$ замкнуто в ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^\Omega}|_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$. Таким образом, из замкнутости множеств семейства

$$\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\} \subset \mathcal{P}(\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega))$$

в ТП $(\mathrm{Z}^\Omega, \tau_{\mathrm{Z}^\Omega})$ следует их замкнутость и в ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^\Omega}|_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$.

Тогда с учетом линейной упорядоченности $\mathfrak{h}$ и свойства изотонности (см. (2.13)) можем заключить, что семейство $\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\}$ также образует цепь (непустых по определению) п/м в ЧУМ $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \subset_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$. В частности, как уже отмечалось, это семейство будет центрированным.

Из непустоты и компактности значений $\alpha(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ и свойств операции перехода к подпространству ТП (см. [16, 2.3.2]) следует компактность ТП $(\prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega), \tau_{\mathrm{Z}^\Omega}|_{\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)})$ (см. [16, теорема 3.2.4]).

Итак, $\{\mathbf{n}^0_H[\alpha] \colon H \in \mathfrak{h}\}$ — центрированное семейство замкнутых п/м компактного пространства. Следовательно (см. [16, теорема 3.1.1]),

$$\bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathbf{n}^0_H[\alpha] \neq \varnothing. \tag{3.10}$$

Выберем произвольно $\beta \in \bigcap\limits_{H \in \mathfrak{h}} \mathbf{n}^0_H[\alpha]$ и покажем, что $\beta \in \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]$. Пусть $A \in \mathcal{T}$, $\omega_1 \in \bar{H}$ и $\omega_2 \in \bar{H}$ таковы, что

$$(\omega_1 \,|\, A) = (\omega_2 \,|\, A). \tag{3.11}$$

Поскольку $\bar{H}$ — объединение множеств из цепи $\mathfrak{h}$, то найдется множество $S \in \mathfrak{h}$ такое, что $\omega_1 \in S$ и $\omega_2 \in S$. По выбору β имеем включение $\beta \in \mathbf{n}^0_S[\alpha]$. Отсюда с учетом (2.12) и (3.11) получим равенство $(\beta(\omega_1)\,|\,A){=}(\beta(\omega_2)\,|\,A)$. Так как ω_1, ω_2 были выбраны произвольно, имеем (см. (2.12)) включение $\beta \in \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]$. В силу произвольного выбора β получаем соотношение

$$\bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathbf{n}^0_H[\alpha] \subset \mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha]. \tag{3.12}$$

Итак (см. (3.10), (3.12)), $\mathbf{n}^0_{\bar{H}}[\alpha] \neq \varnothing$ и имеет место включение $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Исходя из соотношений $H \preccurlyeq \bar{H}$, очевидно выполненных для всех $H \in \mathfrak{h}$ (см. (3.9)), заключаем, что $\bar{H}$ есть верхняя грань $\mathfrak{h}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$.

Так как цепь $\mathfrak{h}$ выбиралась произвольно, можно воспользоваться леммой Цорна. Обозначим через $\hat{H}$ некоторый максимальный элемент в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$: $\hat{H} \in \mathcal{H}_\alpha$ и при этом $\forall H \in \mathcal{H}_\alpha$

$$(\hat{H} \preccurlyeq H) \Rightarrow (\hat{H} = H). \tag{3.13}$$

2. Покажем, что $\hat{H} = \Omega$. Предположим противное: существует $\hat{\omega} \in \Omega \backslash \hat{H}$. Пусть произвольно выбран селектор $\beta \in \prod\limits_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$ МО α, удовлетворяющий (см. (3.1)) включению

$$\beta \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}}[\alpha]. \tag{3.14}$$

Наметим схему дальнейшего рассуждения. Покажем сначала, что, изменяя значение функции β разве лишь в точке $\hat{\omega}$, можно получить новую функцию $\hat{\beta}$, удовлетворяющую включению

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}^0_{\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}}[\alpha]. \tag{3.15}$$

В этом случае (см. (3.15)) $\mathbf{n}^0_{\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}}[\alpha] \neq \varnothing$ и, значит, $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$. Следовательно, коль скоро $\hat{\omega} \notin \hat{H}$, элемент $\hat{H}$ не будет максимальным в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$, что противоречит выбору $\hat{H}$ (см. (3.13)).

Для реализации данной схемы введем семейство

$$\mathbb{A} \triangleq \{B \in \mathcal{T} \mid \exists \omega \in \hat{H} \colon (\omega\,|\,B) = (\hat{\omega}\,|\,B)\}. \tag{3.16}$$

Возможны лишь два случая:

a) $\mathbb{A} = \varnothing$ и **b)** $\mathbb{A} \neq \varnothing$.

Рассмотрим случай **a)**. Легко проверяется, что в этом случае для любых $A \in \mathcal{T}$ и $\omega_1 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$, $\omega_2 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ посылка условия неупреждаемости (см. (2.1)) $(\omega_1\,|\,A) = (\omega_2\,|\,A)$ истинна только при условиях, что $\{\omega_1; \omega_2\} \subset \hat{H}$ или $\{\omega_1; \omega_2\} = \{\hat{\omega}\}$. Но при выполнении любого из этих условий в силу выбора функции β (см. (3.14)) уже сама эта функция, очевидно, удовлетворяет равенству $(\beta(\omega_1)\,|\,A) = (\beta(\omega_2)\,|\,A)$. Таким образом, истинна импликация (2.1). Поскольку A, ω_1 и ω_2 выбирались произвольно, выполняется включение $\beta \in \mathbf{n}^0_{\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}}[\alpha]$. Итак, в случае **a)** мы имеем включение $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$, противоречащее максимальности $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$ (см. (3.13)). Приходим к выводу, что случай **a)** невозможен.

Пусть теперь имеет место случай **b)**: $\mathbb{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{T})$. В целях подходящего изменения значения функции β в точке $\hat{\omega}$ введем далее вспомогательное семейство $\Xi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\alpha(\hat{\omega})))$.

Для этого, учитывая (3.16), определим сначала семейство $\Lambda \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\hat{H}))$ вида $\Lambda \triangleq \{\mathrm{M}(B) \colon B \in \mathbb{A}\}$, где

$$\mathrm{M}(B) \triangleq \{\omega \in \hat{H} \mid (\omega\,|\,B) = (\hat{\omega}\,|\,B)\} = \Omega_0(\hat{\omega}\,|\,B) \cap \hat{H} \qquad \forall B \in \mathbb{A}. \tag{3.17}$$

Для произвольных $\bar{B} \in \mathbb{A}$ и $\bar{\omega} \in \mathrm{M}(\bar{B})$ обозначим $\delta \triangleq (\beta(\bar{\omega})\,|\,\bar{B})$. Тогда по выбору β выполняется включение $\delta \in \big(\alpha(\bar{\omega})\,|\,\bar{B}\big)$. Отсюда в силу (3.17) и неупреждаемости МО α (см.

(2.2)) вытекают равенство $\bigl(\alpha(\bar{\omega})\,|\,\bar{B}\bigr) = \bigl(\alpha(\hat{\omega})\,|\,\bar{B}\bigr)$ и как следствие включение $\delta \in \bigl(\alpha(\hat{\omega})\,|\,\bar{B}\bigr)$. С учетом последнего включения по выбору δ и определению $\mathrm{Z}_0(\beta(\bar{\omega})\,|\,\bar{B})$ (см. (2.4)) получим соотношение $\mathrm{Z}_0(\beta(\bar{\omega})\,|\,\bar{B}) \cap \alpha(\hat{\omega}) \neq \varnothing$. Итак, по итогам произвольного выбора $\bar{B}$ и $\bar{\omega}$ имеем соотношения

$$\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B) \cap \alpha(\hat{\omega}) \neq \varnothing \qquad \forall B \in \mathbb{A} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.18}$$

Поскольку $\mathrm{M}(B) \neq \varnothing$ при $B \in \mathbb{A}$, то ввиду неупреждаемости β на $\hat{H}$ выводим

$$\forall B \in \mathbb{A}\ \ \exists! \mathbb{S} \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})\colon \mathbb{S} = \mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B) \cap \alpha(\hat{\omega}) \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.19}$$

В самом деле, фиксируем $B' \in \mathbb{A}$ и $\omega_* \in \mathrm{M}(B')$. Тогда $\omega_* \in \hat{H}$ и $(\omega_*\,|\,B') = (\hat{\omega}\,|\,B')$. Пусть $\mathbb{S}_* \triangleq \mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B') \cap \alpha(\hat{\omega})$. В силу (3.18) $\mathbb{S}_* \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})$. Выберем произвольно $\omega^* \in \mathrm{M}(B')$, получая $\omega^* \in \hat{H}$ и $(\omega^*\,|\,B') = (\hat{\omega}\,|\,B')$. В этом случае $(\omega^*\,|\,B') = (\omega_*\,|\,B')$ и вследствие неупреждаемости β на $\hat{H}$ (см. (3.14)) $(\beta(\omega^*)\,|\,B') = (\beta(\omega_*)\,|\,B')$. Отсюда согласно (2.4) следует $\mathrm{Z}_0(\beta(\omega^*)\,|\,B') = \mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B')$, а тогда

$$\mathrm{Z}_0(\beta(\omega^*)\,|\,B') \cap \alpha(\hat{\omega}) = \mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B') \cap \alpha(\hat{\omega}).$$

Поскольку выбор ω^* был произвольным, то

$$\mathrm{Z}_0(\beta(\omega_*)\,|\,B') \cap \alpha(\hat{\omega}) = \mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B') \cap \alpha(\hat{\omega}) \quad \forall \omega \in \mathrm{M}(B').$$

Таким образом, установили свойство: существует $\mathbb{S} \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})\colon \mathbb{S} = \mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B') \cap \alpha(\hat{\omega})\ \ \forall \omega \in \mathrm{M}(B')$. Свойство единственности $\mathbb{S}$ очевидно, так как $\mathrm{M}(B') \neq \varnothing$. Поскольку выбор B' был произвольным, установлена справедливость (3.19).

С учетом этого для всякого $B \in \mathbb{A}$ определим $\mathrm{S}(B) \in \mathcal{P}'(\mathrm{Z})$ как

$$\mathrm{S}(B) \triangleq \mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B) \cap \alpha(\hat{\omega}) \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.20}$$

Таким образом, определено непустое (см. условие **b)**) семейство $\Xi \triangleq \{\mathrm{S}(G)\colon G \in \mathbb{A}\}$. Отметим соотношения, следующие из (3.19), (3.20): при $B \in \mathbb{A}$

$$\bigl(\mathrm{S}(B)\,|\,B\bigr) \triangleq \bigl((\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B) \cap \alpha(\hat{\omega}))\,|\,B\bigr) \subset \bigl(\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)\,|\,B\bigr) \cap \bigl(\alpha(\hat{\omega})\,|\,B\bigr)$$

$$= \{(\beta(\omega)\,|\,B)\} \cap \bigl(\alpha(\hat{\omega})\,|\,B\bigr) = \{(\beta(\omega)\,|\,B)\} \cap \bigl(\alpha(\omega)\,|\,B\bigr) = \{(\beta(\omega)\,|\,B)\} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B).$$

При этом $\varnothing \neq \bigl(\mathrm{S}(B)\,|\,B\bigr) \subset \{(\beta(\omega)\,|\,B)\}\ \ \forall B \in \mathbb{A}\ \ \forall \omega \in \mathrm{M}(B)$. Тогда имеем

$$\bigl(\mathrm{S}(B)\,|\,B\bigr) = \{(\beta(\omega)\,|\,B)\} \qquad \forall B \in \mathbb{A} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.21}$$

Напомним, что по условию теоремы $\mathcal{T}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$. Следовательно, ее подсемейство $\mathbb{A}$ также есть цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$. Тогда, опираясь на свойство изотонности (2.5) и определение (3.20), можно проверить, что для любых $B \in \mathbb{A}$, $B' \in \mathbb{A}$ выполняется импликация $(B' \subset_{\mathrm{T}} B) \Rightarrow (\mathrm{S}(B) \subset \mathrm{S}(B'))$. Значит, семейство Ξ есть цепь в $(\mathcal{P}(\mathrm{Z}), \subset_{\mathrm{Z}})$. Отсюда с учетом (3.18), (3.20) заключаем, что Ξ — центрированное семейство непустых п/м $\alpha(\hat{\omega})$.

По условию теоремы $\alpha(\hat{\omega})$ — компактное множество в топологическом пространстве $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$. Согласно определению и лемме 2 множество $\mathrm{Z}_0(\beta(\omega)\,|\,B)$ замкнуто в $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ при любом $B \in \mathbb{A}$. Следовательно (см. (3.20)), элементы семейства Ξ замкнуты в ТП $\bigl(\alpha(\hat{\omega}), \tau_{\mathrm{Z}}|_{\alpha(\hat{\omega})}\bigr)$. Итак, Ξ — центрированное семейство замкнутых п/м компактного пространства. Следовательно (см. [16, теорема 3.1.1]),

$$\bigcap_{S \in \Xi} S \triangleq \bigcap_{B \in \mathbb{A}} \mathrm{S}(B) \neq \varnothing. \tag{3.22}$$

Воспользуемся (3.22) и выберем элемент $\hat{\chi} \in \alpha(\hat{\omega})$, удовлетворяющий включению

$$\hat{\chi} \in \bigcap_{B \in \mathbb{A}} \mathrm{S}(B). \tag{3.23}$$

Отметим соотношение, сразу следующее из определения (3.23) и равенств (3.21):

$$(\hat{\chi}\,|\,B) = (\beta(\omega)\,|\,B) \qquad \forall B \in \mathbb{A} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.24}$$

Переопределим функцию β в точке $\hat{\omega}$, порождая тем самым новое отображение $\hat{\beta} \in \mathrm{Z}^{\Omega}$: при $\omega \in \Omega$

$$\hat{\beta}(\omega) \triangleq \begin{cases} \beta(\omega), & \omega \neq \hat{\omega}, \\ \hat{\chi}, & \omega = \hat{\omega}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Из (3.24) и определения (3.25), очевидно, следуют равенства

$$(\hat{\beta}(\hat{\omega})\,|\,B) = (\beta(\omega)\,|\,B) \qquad \forall B \in \mathbb{A} \qquad \forall \omega \in \mathrm{M}(B). \tag{3.26}$$

Здесь учитывается тот факт, что $\mathrm{M}(B) \subset \hat{H}$ при $B \in \mathbb{A}$ и $\hat{\omega} \notin \hat{H}$. Кроме того, так как $\hat{\omega} \notin \hat{H}$, функция $\hat{\beta}$ наследует (см. (3.25)) неупреждаемость β на множестве $\hat{H}$:

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}^0_{\hat{H}}[\alpha]. \tag{3.27}$$

С целью проверки неупреждаемости функции $\hat{\beta}$ на множестве $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ выберем произвольно $\zeta_1 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$, $\zeta_2 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ и $E \in \mathcal{T}$, для которых выполняется равенство

$$(\zeta_1\,|\,E) = (\zeta_2\,|\,E). \tag{3.28}$$

Согласно (3.27) два случая очевидны (см. (3.14)) — их рассмотрение можно опустить: $\{\zeta_1; \zeta_2\} \subset \hat{H}$, $\{\zeta_1; \zeta_2\} \subset \{\hat{\omega}\}$. Рассмотрим единственный (с точностью до переобозначений) оставшийся вариант: пусть

$$(\zeta_1 \in \hat{H})\ \&\ (\zeta_2 \in \{\hat{\omega}\}). \tag{3.29}$$

Тогда из (3.28), (3.29) следует равенство $(\zeta_1\,|\,E) = (\hat{\omega}\,|\,E)$. Из этого равенства в силу определения (3.16) выводим включение

$$E \in \mathbb{A}, \tag{3.30}$$

а также в силу определения (3.17) — включение

$$\zeta_1 \in \mathrm{M}(E). \tag{3.31}$$

Из соотношений (3.30), (3.31) в силу (3.26) вытекает равенство $(\hat{\beta}(\hat{\omega})\,|\,E) = (\beta(\zeta_1)\,|\,E)$, из которого с учетом (3.25), (3.29) получаем соотношения $(\hat{\beta}(\zeta_2)\,|\,E) = (\hat{\beta}(\hat{\omega})\,|\,E) = (\beta(\zeta_1)\,|\,E) = (\hat{\beta}(\zeta_1)\,|\,E)$. Аналогичным образом проверяется равенство $(\hat{\beta}(\zeta_2)\,|\,E) = (\hat{\beta}(\zeta_1)\,|\,E)$ при $\zeta_2 \in \hat{H}$ и $\zeta_1 \in \{\hat{\omega}\}$. В итоге (см. (3.28)) имеем импликацию

$$((\zeta_1\,|\,E) = (\zeta_2\,|\,E)) \Rightarrow ((\hat{\beta}(\zeta_1)\,|\,E) = (\hat{\beta}(\zeta_2)\,|\,E)).$$

Так как множество E и элементы ζ_1, ζ_2 множества $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ выбирались произвольно, установлено включение (3.15). Значит, $\mathbf{n}^0_{\hat{H}\cup\{\hat{\omega}\}}[\alpha] \neq \varnothing$ и как следствие (см. (3.1)) $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$, где $\hat{\omega} \notin \hat{H}$. Последнее противоречит максимальности элемента $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$ (см. (3.13)). Итак, случай **b)** также невозможен.

Мы показали, что во всех возможных случаях предположение $\hat{H} \neq \Omega$ влечет противоречие с максимальностью $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \preccurlyeq)$. Следовательно, имеет место равенство $\hat{H} = \Omega$. Отсюда $\Omega \in \mathcal{H}_\alpha$; иными словами, $\mathbf{n}^0_\Omega[\alpha] \neq \varnothing$.

Предложение доказано.

4. Эквивалентность существования неупреждающих селектора и мультиселектора

В этом разделе мы на основании результатов разд. 3 установим эквивалентность существования неупреждающих селектора и мультиселектора для МО достаточно общего вида. Вначале отметим одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$, $\mathbf{a}(\omega)$ *компактно в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *для всякого* $\omega \in \Omega$. *Тогда* $(\mathrm{na})[\mathbf{a}](\omega)$ *компактно в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *для всякого* $\omega \in \Omega$.

Справедливость данной леммы нетрудно установить, пользуясь соотношениями [13, (3.25)].

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{T}$ *— цепь в ЧУМ* $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$, $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$, $(\mathrm{DOM})[\mathbf{a}] = \Omega$ *и* $\mathbf{a}(\omega)$ *компактно в* $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ *для всякого* $\omega \in \Omega$. *Тогда*

$$(\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing). \tag{4.1}$$

Доказательство. Выберем произвольно $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathrm{Z})^{\Omega}$ со свойствами $(\mathrm{DOM})[\mathbf{a}] \neq \varnothing$ и компактности множеств $\mathbf{a}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. С учетом (2.11) имеем импликацию

$$(\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing) \Rightarrow (\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing). \tag{4.2}$$

Проверим обратную импликацию. Пусть $\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing$. Рассмотрим МО $\alpha \triangleq (\mathrm{na})[\mathbf{a}]$. Для α выполнены все условия предложения 1: $\alpha \in \mathbf{N}$, множества $\alpha(\omega)$ непусты (см. (2.8)) и компактны в $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ при любом $\omega \in \Omega$ (лемма 4). Поэтому в силу предложения 1 $\mathbf{n}^0[\alpha] \neq \varnothing$. Но по выбору α очевидно имеем вложение $\mathbf{n}^0[\alpha] \subset \mathbf{n}^0[\mathbf{a}]$. Следовательно, $\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing$. Итак, выполняется импликация

$$(\mathbf{N}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing) \Rightarrow (\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing). \tag{4.3}$$

Импликации (4.2) и (4.3) при произвольном выборе МО $\mathbf{a}$ дают искомое утверждение (4.1).

Предложение доказано.

5. Один частный случай

Рассмотрим пример реализации общих построений разд. 2–4, имея в виду, что в дальнейшем $\mathrm{T} \triangleq [t_0, \vartheta]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$; $\vartheta \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая); в качестве $\mathcal{T}$ используем семейство всех отрезков $[t_0, t]$, $t \in \mathrm{T}$. Данная конкретизация соответствует варианту, используемому в теории дифференциальных игр (см. [1–5]). При этом $\mathcal{T}$ является цепью в ЧУМ $(\mathcal{P}(\mathrm{T}), \subset_{\mathrm{T}})$. В качестве X и Y используем непустые множества, оснащаемые метриками ρ_{X} и ρ_{Y} соответственно, так что $(\mathrm{X}, \rho_{\mathrm{X}})$, $(\mathrm{Y}, \rho_{\mathrm{Y}})$ — метрические пространства. Полагаем далее, что τ_{X} и τ_{Y} — топологии на X и на Y, порожденные метриками ρ_{X} и ρ_{Y} соответственно. Мы полагаем здесь, что Ω и Z суть непустые множества в пространствах непрерывных отображений из T в X и в Y соответственно (при этом T оснащается обычной $|\cdot|$-топологией τ_{T}, а X и Y — топологиями τ_{X} и τ_{Y}). Полагаем, что Z компактно в топологии равномерной сходимости пространства $C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}})$. Данную топологию обозначаем через θ, а метрику равномерной сходимости, порождающую θ, — через $\mathbf{r}$. Сходимость последовательностей из $C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}})$ в метрике $\mathbf{r}$ обозначаем, как обычно, через $\rightrightarrows$.

Введем в рассмотрение конкретный вариант отображения $\mathbf{a}$, связанный с естественным обобщением дифференциальной игры сближения-уклонения (см. [8; 9]). Для этого оснащаем $\mathbb{H} \triangleq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ естественной (метризуемой) топологией $\tau_{\mathbb{H}} \triangleq \tau_{\mathrm{X}} \otimes \tau_{\mathrm{Y}}$.

В этой связи напомним, что (см. [20, с. 17]) $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{T} \triangleq (\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \times \mathrm{T} = \mathbb{H} \times \mathrm{T}$; данное множество оснащается естественной метризуемой топологией $\tau_{\mathbb{H} \times \mathrm{T}}$, отвечающей произведению ТП $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$, $(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}})$.

Фиксируем множество $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{H} \times \mathrm{T})$, замкнутое в ТП $(\mathbb{H} \times \mathrm{T}, \tau_{\mathbb{H}\times\mathrm{T}})$. Кроме того, фиксируем множество $N \in \mathcal{P}'(\mathbb{H} \times \mathrm{T})$, для которого замкнуты в $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$ все множества-сечения $N\langle t\rangle \triangleq \{h \in \mathbb{H} \mid (t, h) \in N\}$, $t \in \mathrm{T}$. Напомним, что $\mathrm{Z} \subset C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}) \subset \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$. С учетом этого введем (метризуемую) топологию $\theta_{\mathrm{Z}} \triangleq \theta|_{\mathrm{Z}}$, индуцированную из $(C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}), \theta)$. Отметим, что сходимость последовательности в метризуемом ТП равносильна сходимости этой последовательности в смысле метрики, порождающей топологию данного пространства. Кроме того, для метризуемого ТП компактность множеств в данном ТП, понимаемая как компактность соответствующих подпространств, эквивалентна (см. [16, 4.1.17]) секвенциальной компактности, понимаемой как возможность выделения из последовательности элементов соответствующего множества сходящейся подпоследовательности (см. [21, 2.7.43]).

Введем в рассмотрение следующий вариант отображения $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(Z)^{\Omega}$:

$$\mathbf{a}(\omega) \triangleq \{z \in \mathrm{Z} \mid \exists t \in \mathrm{T}\colon ((z(t), \omega(t), t) \in M) \ \&\ ((z(\xi), \omega(\xi)) \in N\langle \xi\rangle \ \ \forall \xi \in [t_0, t[)\} \quad \forall \omega \in \Omega; \quad (5.1)$$

напомним (см. [20, с. 17]), что $(x, y, t) \triangleq ((x, y), t)$ при $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$ и $t \in \mathrm{T}$.

З а м е ч а н и е 4. Данная схема отвечает на идейном уровне построениям [3]. В самом деле, под Z и Ω мы можем понимать пучки траекторий двух управляемых систем в одном и том же (для простоты) фазовом пространстве $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. При этом условие компактности Z можно связать с использованием обобщенных управлений-мер [22–24] в одной из управляемых систем (полагаем, что управление в этой системе формирует игрок I). Относительно множества Ω это условие не предполагается выполненным. Следуя идее [3], мы рассматриваем вариант реагирования траекторией (траекториями, в многозначном варианте) системы игрока I на траекторию игрока II, формирующего управление второй системой. Упомянутое реагирование, как и в [3], подчинено условию неупреждаемости (физической осуществимости). При этом реагирование траекторией на траекторию (а не управлением на управление) имеет своей целью выделить наиболее существенные моменты решения.

Предложение 3. *Отображение* $\mathbf{a}$ *компактнозначно в* $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$: *при любом* $\omega \in \Omega$ *множество* $\mathbf{a}(\omega)$ *компактно в ТП* $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и рассмотрим множество $\mathbf{a}(\omega)$, $\mathbf{a}(\omega) \subset \mathrm{Z}$. Покажем сначала, что $\mathbf{a}(\omega)$ замкнуто в топологии θ. Итак, пусть

$$(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{a}(\omega)^{\mathbb{N}}, \qquad z \in C(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}, \tau_{\mathrm{X}}) \quad (5.2)$$

таковы, что $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows z$. Тогда по свойствам Z имеем $z \in \mathrm{Z}$ и согласно (5.1) для некоторой последовательности $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{T}^{\mathbb{N}}$ получаем свойство: для всякого $j \in \mathbb{N}$

$$((z_j(t_j), \omega(t_j), t_j) \in M) \ \&\ ((z_j(\xi), \omega(\xi)) \in N\langle\xi\rangle \ \ \forall \xi \in [t_0, t_j[).$$

В силу компактности $(\mathrm{T}, \tau_{\mathrm{T}})$ можно полагать последовательность $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ сходящейся: $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t^0$, где $t^0 \in \mathrm{T}$. Получили, что

$$((t_i)_{i\in\mathbb{N}} \to t^0) \ \&\ ((z_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows z) \ \&\ (\rho_Y(\omega(t_i), \omega(t^0))_{i\in\mathbb{N}} \to 0). \quad (5.3)$$

Из двух первых положений (5.3) имеем свойство

$$(\rho_X(z_i(t_i), z(t^0)))_{i\in\mathbb{N}} \to 0. \quad (5.4)$$

Тогда (см. последнее положение (5.3) и (5.4)) последовательность $((z_j(t_j), \omega(t_j)))_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ сходится в метрике, порождающей топологию $\tau_{\mathbb{H}}$, т. е. сходится в ТП $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$. Учитывая еще раз первое положение в (5.3), имеем сходимость последовательности $(z_j(t_j), \omega(t_j), t_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ к $(z(t^0), \omega(t^0), t^0)$ в топологии $\tau_{\mathbb{H}} \otimes \tau_{\mathrm{T}}$. В силу замкнутости M получаем, что

$$(z(t^0), \omega(t^0), t^0) \in M. \quad (5.5)$$

Пусть $\zeta \in [t_0, t^0[$, а $m \in \mathbb{N}$ таково, что $t_j \in]\zeta, \vartheta]$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$ (с учетом первого положения в (5.3) такой выбор m, очевидно, возможен). Тогда в силу (5.1) $(z_j(\zeta), \omega(\zeta)) \in N\langle\zeta\rangle$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$. Поскольку $N\langle\zeta\rangle$ замкнуто в $(\mathbb{H}, \tau_{\mathbb{H}})$, то с учетом второго положения в (5.3) и определения топологии $\tau_{\mathbb{H}}$ имеем включение $(z(\zeta), \omega(\zeta)) \in N\langle\zeta\rangle$. Поскольку выбор ζ был произвольным, установлено, что

$$(z(t), \omega(t)) \in N\langle t\rangle \qquad \forall t \in [t_0, t^0[. \tag{5.6}$$

С учетом (5.1), (5.5) и (5.6) получаем включение $z \in \mathbf{a}(\omega)$. Коль скоро выбор (5.2) также был произвольным, установлено требуемое свойство замкнутости $\mathbf{a}(\omega)$ в топологии θ. Поскольку $\mathbf{a}(\omega) \subset \mathrm{Z}$ (см. (5.1)), то $\mathbf{a}(\omega)$ есть п/м Z, замкнутое в $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$. В силу компактности последнего ТП имеем требуемое утверждение.

Предложение доказано.

Отметим, что $\tau_{\mathrm{Z}} \subset \theta_{\mathrm{Z}}$ (доказательство данного свойства подобно обоснованию [16, предложение 2.2.6]). Поэтому всякое п/м Z, компактное в $(\mathrm{Z}, \theta_{\mathrm{Z}})$, компактно и в ТП $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$. Следовательно, при условиях, определяющих предложение 3, имеем свойство: МО $\mathbf{a}$ (5.1) компактнозначно в смысле $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$, что позволяет использовать это МО в лемме 4.

Итак, при условиях, определяющих предложение 3, для МО $\mathbf{a}$ (5.1) справедливо свойство: $(\mathrm{na})[\mathbf{a}](\omega)$ компактно в ТП $(\mathrm{Z}, \tau_{\mathrm{Z}})$ для каждого $\omega \in \Omega$; если к тому же $(\mathrm{DOM})[(\mathrm{na})[\mathbf{a}]] = \Omega$, то согласно предложению 1 $\mathbf{n}^0[(\mathrm{na})[\mathbf{a}]] \neq \varnothing$ и как следствие $\mathbf{n}^0[\mathbf{a}] \neq \varnothing$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roxin Emilio**. Axiomatic approach in differential games // J. Optim. Theory Appl. 1969. Vol. 3, № 3. P. 153–163.
2. **Ryll-Nardzewski C. R.** A theory of persuit and evasion. Adv. in game theory // Ann. Math. Stud. 1964. P. 113–126.
3. **Varaiya P., Lin Jiguan**. Existence of saddle points in differential games // SIAM J. Control. 1969. Vol. 7, № 1. P. 141–157.
4. **Elliott Robert J., Kalton Nigel J.** The existence of value in differential games of pursuit and evasion // J. Diff. Eq. 1972. Vol. 12, № 3. P. 504–523.
5. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче на минимакс функционала // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 5. С. 1047–1050.
6. **Ченцов А. Г.** Селекторы многозначных стратегий в дифференциальных играх. Деп. в ВИНИТИ, № 3101-78 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978. 45 с.
7. **Ченцов А. Г.** Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения-уклонения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 10. С. 1801–1808.
8. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
9. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. **Кряжимский А. В., Ченцов А. Г.** О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения. Деп. в ВИНИТИ, № 1729-80 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. 72 с.
11. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
12. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 3. С. 394–420.
13. **Ченцов А. Г.** Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций, I // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 470–480.
14. **Ченцов А. Г.** Неупреждающие селекторы многозначных отображений // Дифференц. уравнения и процессы управления. 1998. № 2. С. 1–64. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j019.pdf.
15. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
16. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

17. **Serkov D. A.** Unlocking of predicate: application to constructing a non-anticipating selection // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2017. Vol. 27, № 2. P. 283–291.
18. **Серков Д. А.** К построению множества истинности предиката // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2017. № 2 (50). С. 37–53.
19. **Serkov D. A.** On a condition of existence of non-anticipating selections // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, № 32. P. 267–270.
20. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 432 с.
21. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 2002. 408 p.
22. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
23. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 256 с.
24. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

Поступила 15.05.2019
После доработки 19.06.2019
Принята к публикации 24.06.2019

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: serkov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Emilio Roxin. Axiomatic approach in differential games. *J. Optim. Theory. Appl.*, vol. 3, no. 3, pp. 153–163. doi: 10.1007/BF00929440 .
2. Ryll-Nardzewski C. A theory of persuit and evasion. In: *Adv. in game theory*, Melvin Dresher, Lloyd S. Shapley, Albert William Tucker (eds), Princeton University Press, 1964, vol. 52, pp. 113–126. doi: 10.1515/9781400882014-010 .
3. Varaiya P., Lin J. Existence of Saddle Points in Differential Games. *SIAM J. Control*, 1969, vol. 7, no. 1, pp. 141–157. doi: 10.1137/0307011 .
4. Elliott Robert J., Kalton Nigel J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion. *J. Diff. Eq.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 504–523. doi: 10.1016/0022-0396(72)90022-8 .
5. Chentsov A.G. On the game problem on minimax of a functional. *Dokl. AN SSSR*, 1976, vol. 230, pp. 1047–1050 (in Russian).
6. Chentsov A.G. *Selektory mnogoznachnykh strategii v differentsial'nykh igrakh* [Selections of multivalued strategies in differential games]. Sverdlovsk, 1978, 45 p. Available from VINITI, no. 3101-78.
7. Chentsov A.G. On an alternative in a class of quasistrategies for a differential approach-evasion game. *Diff. Eq.* (1980), 1981, vol. 16, no. 10, pp. 1167–1171.
8. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .

9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
10. Kryazhimskiy A.V., Chentsov A.G. *O strukture igrovogo upravleniya v zadachakh sblizheniya i ukloneniya* [On the structure of the game control in the approach-evasion problems]. Sverdlovsk, 1979, 72 p. Available from VINITI, no. 1729-80.
11. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, no. 1, pp. 73–77.
12. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
13. Chentsov A.G. Nonanticipating multivalued mappings and their construction by the method of programmed iterations. I. *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 498–509. doi: 10.1023/A:1019275422741 .
14. Chentsov A.G. Non-anticipating selections of multivalued mappings. *Differentsial'nyye Uravneniya i Protsessy Upravleniya*, 1998, no. 2, pp. 29–64 (in Russian).
15. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
16. Engelking R. *General Topology.* Sigma series in pure mathematics, vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag. 1989, 535 p. ISBN: 3885380064 . Translated to Russian inder the title *Obshchaya topologiya.* Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
17. Serkov D.A. Unlocking of predicate: application to constructing a non-anticipating selection. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki.*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 283–291 (in Russian). doi: 10.20537/vm170211 .
18. Serkov D.A. On the construction of a predicate truth set. *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 45–61 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-50-06 .
19. Serkov D.A. On a condition of existence of non-anticipating selections. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 267–270. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.393 .
20. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* Acad. Press Inc., 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza.* Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
21. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
22. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* N Y: Acad. Press, 1972. ISBN: 9781483259192 .
23. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory.* Springer, 1978, 175 p. ISBN: 978-1-4684-7398-8 . Original Russian text published in Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya.* Tbilisi: Tbilis. univ. Publ., 1975, 256 p.
24. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimization of Guarantee in Control Problems.* Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p. (in Russian)

Received May 15, 2019
Revised June 19, 2019
Accepted June 24, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Presidium of the Russian Academy of Sciences within the project "Newest Methods of Mathematical Modeling in the Study of Nonlinear Dynamic Systems."

Dmitrii Aleksandrovich Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: serkov@imm.uran.ru .

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: D. A. Serkov, A. G. Chentsov. On the construction of a nonanticipating selection of a multivalued mapping, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 232–246 .