ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.833

СТРАТЕГИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ В ИГРЕ "THE PRICE IS RIGHT"[1]

Т. В. Серёгина, А. А. Ивашко, В. В. Мазалов

Популярное телевизионное шоу "The Price is Right" представляет собой привлекательный ресурс для моделирования стратегического поведения в конкуренции за определенное вознаграждение. В данной работе структура этой игры используется как основа для различных теоретико-игровых постановок. Рассматривается некооперативная игра с оптимальной остановкой для конечного числа игроков. Каждый игрок получает очки, наблюдая суммы независимых случайных величин, равномерно распределенных на единичном отрезке. На очередном шаге игрок должен принять решение: остановиться или продолжить игру. Победителем становится игрок с наибольшей суммой очков, не превышающей 1. Если сумма очков каждого из игроков превысила 1, то побеждает игрок, получивший наименьшее число очков. В работе найдены оптимальные стратегии игроков в многошаговой модели игры с полной информацией об очках предшествующих игроков. Кроме того, сравниваются оптимальные стратегии игроков и выигрыши в играх с полной информацией и без информации. Введено понятие цены информации в данной игре.

Ключевые слова: оптимальная остановка, игра n лиц, равновесие по Нэшу, пороговая стратегия, полная информация, Showcase Showdown.

T. V. Seregina, A. A. Ivashko, V. V. Mazalov. Optimal stopping strategies in the game "The Price Is Right."

The popular TV show "The Price Is Right" is an attractive source of modeling the strategic behavior in a competitive environment for a specific reward. In this study, the structure of the show is used as a basis for several game-theoretic settings. We consider a noncooperative optimal stopping game for a finite number of players. Each player earns points by observing the sums of independent random variables uniformly distributed on the unit interval. At each step, the player must decide whether to stop or continue the game. The winner is the player with the maximal score not exceeding unity. If the scores of all players exceed this limit, the winner is the player with the lowest score. We characterize the optimal strategies of the players in the multi-step version of the game with complete information about the scores of the previous players. We also compare the optimal strategies and payoffs of the players in the games with complete information and with no information. The notion of information price is introduced.

Keywords: optimal stopping, n-person game, Nash equilibrium, threshold strategy, complete information, Showcase Showdown.

MSC: 60G40, 91A40, 91A06

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-217-231

Введение

При покупке редких товаров или аренде крайне лимитированных ресурсов распространены схемы предложения конкурентной цены. Здесь можно выделить различные аукционы, конкуренцию за вычислительные ресурсы или объемы хранилищ. Среди подобных схем существуют такие, в которых при покупке какого-либо товара или ресурса необходимо предложить цену как можно ближе к итоговой цене, но существенно не превышающую ее. При этом для участника торгов важно определить оптимальную стратегию для того, чтобы увеличить шансы выиграть торги. Подобные схемы используются в каждом выпуске популярного телевизионного шоу "The Price is Right", где участники по очереди вращают колесо один или два раза, получая очки. Каждый из игроков стремится получить наибольшее число очков, не превышающих заданную границу. Телевизионная игра "The Price is Right" описана в работах [2; 6]. Данное

[1]Работа частично поддержана грантом провинции Шаньдун (Shandong Province) "Double-Hundred Talent Plan" (No. WST2017009).

шоу имеет простые правила и привлекательные выигрыши для участников. Вместе с тем эта игра является удобной платформой для моделирования различных торговых схем и изучения стратегического поведения участников торгов. Шоу располагает данными, доступными для эмпирического анализа, которые можно использовать при верификации теоретических выкладок и интерпретации возможных расхождений. Телевизионное шоу было использовано для различных эмпирических исследований и как экспериментальная основа для изучения экономического поведения [3; 16].

В представленной работе предлагается теоретико-игровой подход к описанию данной игры и определению оптимального поведения ее участников. В соответствии с правилами игрового шоу "The Price is Right" рассматривается некооперативная игра n лиц с оптимальной остановкой. Здесь каждый игрок получает очки, наблюдая суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. На очередном шаге каждый игрок должен принять решение: остановиться на текущем наблюдении или продолжить и получить дополнительно значение следующей независимой случайной величины, которое прибавляется к полученным ранее очкам. Побеждает тот игрок, чья сумма очков окажется наиболее близкой, но не превышающей заданной границы. Если сумма очков каждого из игроков превысила заданную границу, то побеждает игрок, получивший наименьшее число очков. Каждый игрок стремится максимизировать вероятность своего выигрыша.

При этом возможны различные постановки задачи: а) игроки ходят независимо от своих противников, могут не знать о количестве очков и действиях друг друга в ходе игры (модель без информации), б) игроки ходят последовательно, видят количество очков своих предшественников и знают об их действиях (модель с полной информацией). Также игрокам может быть представлена возможность получать очки по итогам не только двух (как в телевизионном шоу), но и нескольких шагов игры.

Постановки данной задачи с отсутствием информации о поведении участников игры были рассмотрены в [7; 9]. В [9] были исследованы варианты игры с конечным и бесконечным числом шагов. Задача с полной информацией о действиях противников была сформулирована в рамках теории вероятностей в [17], и решение было найдено для двух игроков с двумя шагами.

В представленной работе найдено решение задачи для многошаговой игры с оптимальной остановкой при полной информации об очках и действиях предыдущих игроков. Игра без информации достигает равновесия по Нэшу — состояния, из которого никому из игроков не выгодно отклониться индивидуально от своей стратегии (см. [9]). В версии с полной информацией игра имеет равновесие по Нэшу, когда игроки принимают решения последовательно и каждый следующий игрок знает информацию о действиях его предшественников. В данной работе найдены и исследованы оптимальные стратегии игроков в модели игры с полной информацией. Также, в отличие от предыдущих работ, вычислены оптимальные выигрыши в обеих версиях игры, с полной информацией и без информации, для конечного и бесконечного числа шагов. Кроме того, проведено сравнение оптимальных стратегий в задаче с полной информацией и в задаче с отсутствием информации о действиях противников для различного числа шагов в игре. Установлена нижняя граница оптимальных порогов и обсуждается, как доступность информации влияет на пороговые значения и выигрыши. Показаны соотношения между порогами в играх разных типов информации для конечного и бесконечного числа шагов, а также определено понятие цены информации в данной игре.

Для получения оптимальных стратегий игроков используется метод динамического программирования, который позволяет решать сложную задачу, разбивая ее на более простые подзадачи, представленные рекурсивной последовательностью. Метод динамического программирования имеет приложения в различных областях, таких как игры выхода (quitting games [14]), задача о продаже дома (house-selling problem [4; 13]), задача поиска работы (job-search problem [10]), задача поиска партнера (mate choice problem [1]), игры Showcase Showdown [11; 12], и успешно используется для решения теоретико-игровых задач с оптимальной остановкой [8; 15].

Статья организована следующим образом. В разд. 1 описано решение игры n лиц с отсутствием информации о действиях противников. Приведены оптимальные стратегии и ожидаемые выигрыши игроков как в двухшаговой, так и в многошаговой модели. Далее, в разд. 2 и 3, представлены постановка и решение последовательной игры с полной информацией о действиях игроков. При этом рассмотрены как двухшаговый вариант задачи, так и игра с бесконечным числом шагов. В завершение сравниваются оптимальные стратегии игроков и выигрыши в играх с полной информацией и без информации.

1. Игра n участников с отсутствием информации

Рассмотрим двухшаговую игру n лиц. Игрок k независимо от остальных участников получает в качестве очков значение $x_1^{(k)}$ случайной величины $X_1^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Игрок должен принять решение: *остановиться* после первого шага или *продолжить* и получить дополнительные очки $x_2^{(k)}$ как значение случайной величины $X_2^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. $X_1^{(k)}$ и $X_2^{(k)}$ — независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины. Побеждает тот игрок, чья сумма очков окажется наиболее близкой, но не превышающей 1. Если сумма очков каждого из игроков превысила 1, то побеждает игрок, получивший наименьшее число очков. Игроки не знают ни значений наблюдений, ни решений, принятых другими игроками. Каждый игрок стремится максимизировать вероятность своего выигрыша. Решение данной задачи было получено в работе [7] для $n = 2, 3$. В [9] было найдено оптимальное решение для $n \geq 2$, согласно которому в двухшаговой игре n лиц с отсутствием информации значения оптимальных порогов $u^{(2,n,N)} = u$ могут быть найдены из следующего уравнения[2]:

$$u^{2(n-1)} = \frac{1 - u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}. \tag{1.1}$$

Обозначим через $h^{(2,n,N)}(x|u)$ и $H^{(2,n,N)}(x|u)$ выигрыши каждого из игроков при остановке и продолжении игры соответственно, если игрок получил на первом шаге число очков x, а остальные игроки используют стратегию u:

$$h^{(2,n,N)}(x|u) = (x - u + xu)^{n-1};$$

$$H^{(2,n,N)}(x|u) = \int\limits_x^u \Big(\frac{u^2 + y^2}{2}\Big)^{n-1} dy + \frac{1 - u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1} - (u-x)^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}.$$

Тогда ожидаемый выигрыш для каждого игрока при использовании оптимальной стратегии $u^{(\omega)}$, $(\omega) = (2, n, N)$, вычисляется как

$$G^{(\omega)} = \int\limits_0^{u^{(\omega)}} H^{(\omega)}(z|u^{(\omega)})dz + \int\limits_{u^{(\omega)}}^1 h^{(\omega)}(z|u^{(\omega)})dz. \tag{1.2}$$

Покажем, что $G^{(2,n,N)} = 1/n$:

$$G^{(2,n,N)} = \int\limits_0^u H^{(2,n,N)}(z|u)dz + \int\limits_u^1 h^{(2,n,N)}(z|u)dz$$

$$= \int\limits_0^u \bigg(\int\limits_z^u \Big(\frac{u^2 + y^2}{2}\Big)^{n-1} dy + \frac{1 - u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1} - (u-z)^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}\bigg)dz + \int\limits_u^1 (z - u + zu)^{n-1} dz$$

[2]Верхний индекс (m, n, N) или (m, n, F) следует понимать как “m-шаговая игра n лиц с отсутствием информации (N) или с полной информацией (F)” соответственно.

$$= \frac{u^{2n}}{n}\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) + \int\limits_0^u \Big(\frac{1-u^{2n}}{n(u+1)} + \frac{u^{2n-1}-(u-z)^{2n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}\Big)dz + \frac{1-u^{2n}}{n(u+1)} = \frac{1}{n}.$$

В работе [9] была исследована также версия этой игры с бесконечным числом шагов. Значение оптимального порога $u^{(inf,n,N)} = u$ может быть найдено из следующего уравнения:

$$(e^u(u-1)+1)^{n-1} = \frac{e^{-u}\big(1-(e^u(u-1)+1)^n\big)}{n} + \int\limits_1^{u+1} (e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n-1}dz. \qquad (1.3)$$

Выигрыши игрока при остановке и продолжении игры, если игрок получил на первом шаге число очков x, а остальные игроки используют стратегию $u^{(inf,n,N)} = u$, равны $h^{(inf,n,N)}(x|u)$ и $H^{(inf,n,N)}(x|u)$ соответственно и определяются по формулам

$$h^{(inf,n,N)}(x|u) = (1-e^u(1-x))^{n-1};$$

$$H^{(inf,n,N)}(x|u) = \int\limits_x^u H^{(inf,n,N)}(z|u)dz + \int\limits_u^1 h^{(inf,n,N)}(z|u)dz + \int\limits_1^{x+1} (e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n-1}dz. \qquad (1.4)$$

Дифференцируя (1.4) по x, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dH^{(inf,n,N)}(x|u)}{dx} = -H^{(inf,n,N)}(x|u) + (e^x-(x+1-u)e^u)^{n-1}$$

с граничным условием $H^{(inf,n,N)}(u|u) = h^{(inf,n,N)}(u|u) = (1-e^u(1-u))^{n-1}$. Его решение можно записать следующим образом:

$$H^{(inf,n,N)}(x|u) = e^{-x}\Bigg(e^u(1-e^u(1-u))^{n-1} - \int\limits_x^u e^z(e^z-(z+1-u)e^u)^{n-1}dz\Bigg).$$

Несложно видеть, что при $x=0$ при выборе оптимального порога u значение

$$H^{(inf,n,N)}(0|u) = 1/n$$

и представляет собой ожидаемый выигрыш игрока перед началом игры, т. е. $G^{(inf,n,N)}$. Это и понятно, игра симметрична, все игроки имеют одинаковые шансы и поэтому значение игры равно $1/n$.

Данная задача принадлежит классу задач с оптимальной остановкой, где оптимальным является так называемое правило продолжения на один шаг (one-stage look-ahead (OLA) stopping rule, см. в [5] более подробное описание). Согласно этому правилу сравниваются текущий выигрыш и ожидаемое вознаграждение при продолжении игры с остановкой на следующем шаге. В рассматриваемой задаче с оптимальной остановкой ожидаемый выигрыш $h^{(inf,n,N)}(x|u)$ игрока после первого шага является возрастающей функцией. В то же время ожидаемый выигрыш $H^{(inf,n,N)}(x|u)$ при продолжении игры еще на один шаг представляет собой невозрастающую функцию. Следовательно, в этой игре правило остановки OLA оптимально.

Значение ожидаемого выигрыша каждого игрока при использовании оптимальной стратегии $u^{(inf,n,N)}$ может быть получено из уравнения (1.2) для $(\omega) = (inf, n, N)$. Значения оптимальных порогов и оптимальных выигрышей для различных n представлены в таблице ниже. Как видно из таблицы, пороги в игре с бесконечным числом шагов выше, чем в двухшаговой игре.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что для $n \geq 2$, $u^{(2,n+1,N)} > u^{(2,n,N)}$ и $u^{(inf,n+1,N)} > u^{(inf,n,N)}$, и следовательно, $u^{(2,n,N)} > 1/2$ и $u^{(inf,n,N)} > 1/2$.

Оптимальные стратегии и выигрыши

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				Игра без информации					
$u^{(2,n,N)}$	0.563	0.661	0.718	0.757	0.785	0.806	0.823	0.837	0.849
$G^{(2,n,N)}$	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.110	0.100
$u^{(inf,n,N)}$	0.633	0.718	0.767	0.800	0.823	0.841	0.856	0.867	0.877
$G^{(inf,n,N)}$	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.110	0.100
				Игра с полной информацией					
$u_1^{(2,n,F)}$	0.532	0.649	0.711	0.752	0.781	0.804	0.821	0.835	0.847
$E(u_2^{(2,n,F)})$	0.599	0.705	0.752	0.783	0.806	0.824	0.838	0.850	0.860
$G_1^{(2,n,F)}$	0.454	0.305	0.231	0.186	0.156	0.135	0.118	0.106	0.095
$u_1^{(inf,n,F)}$	0.571	0.688	0.749	0.787	0.814	0.834	0.850	0.863	0.873
$G_1^{(inf,n,F)}$	0.425	0.286	0.218	0.176	0.149	0.128	0.113	0.101	0.092

Покажем это для случая с бесконечным числом шагов. Перепишем разность правой и левой части уравнения (1.3) в виде

$$g(n,y)=\int_y^1 (1-e^y(1-z))^{n-1}dz+\int_1^{y+1}(e^{z-1}-(z-y)e^y)^{n-1}dz-(e^y(y-1)+1)^{n-1}.$$

Функция $g(n,y)$ убывает по y при $0\le y\le 1$.

Пусть $y=u^{(inf,n,N)}=u$. Тогда $g(n,u)=0$. Рассмотрим

$$g(n+1,u)=\int_u^1 (1-e^u(1-z))^{n}dz+\int_1^{u+1}(e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n}dz-(e^u(u-1)+1)^{n}$$

$$>(1-e^u(1-u))\Bigg(\int_u^1 (1-e^u(1-z))^{n-1}dz+\int_1^{u+1}(e^{z-1}-(z-u)e^u)^{n-1}dz-(e^u(u-1)+1)^{n-1}\Bigg)$$

$$=(1-e^u(1-u))g(n,u)=0.$$

Следовательно, функция $g(n+1,y)$ обращается в нуль правее $y=u=u^{(inf,n,N)}$. Таким образом, $u^{(inf,n+1,N)}>u^{(inf,n,N)}$, и значит, пороги возрастают по n. А поскольку $u^{(inf,2,N)}>1/2$, то и все $u^{(inf,n,N)}>1/2$ для $n\ge 2$.

2. Двухшаговая игра с полной информацией

2.1. Игра двух лиц

Рассмотрим игру двух лиц с полной информацией о действиях противников. В отличие от постановки с отсутствием информации в этой игре участники последовательно получают очки. Пусть первым ходит игрок 1, а игрок 2 — вторым. Второму игроку известно общее число очков игрока 1. Такая постановка задачи была рассмотрена в работе [17] с помощью теории вероятностей. В данной статье задача исследуется с теоретико-игровой точки зрения. Находятся подробно не только оптимальные стратегии игроков, но и их выигрыши.

Приступая к игре, игрок 1 не знает, как поведет себя второй игрок при своем ходе. Предположим, что первый игрок для принятия решения использует следующую однопороговую стратегию: остановиться на первом шаге, если полученное значение случайной величины $X_1^{(1)}$ больше или равно пороговому значению $0 < u_1^{(2,2,F)} < 1$, и продолжить в противном случае.

Обозначим через $S^{(1)}$ сумму очков, полученных игроком 1 в результате использования стратегии $u_1^{(2,2,F)}$. $S^{(1)}$ равно $x_1^{(1)}$ — при остановке на первом шаге или $x_1^{(1)} + x_2^{(1)}$ — при продолжении:

$$S^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)}, & \text{если } x_1^{(1)} \geq u_1^{(2,2,F)}, \\ x_1^{(1)} + x_2^{(1)}, & \text{если } x_1^{(1)} < u_1^{(2,2,F)}. \end{cases}$$

Второй игрок знает общее число очков первого игрока $S^{(1)}$. Руководствуясь этой информацией, игрок 2 останавливается на первом шаге, если $S^{(1)} > 1$ или если $x_1^{(2)} > S^{(1)}$, $S^{(1)} \leq 1$; иначе он продолжает игру. Таким образом, стратегия игрока 2 имеет вид

$$u_2^{(2,2,F)} = \begin{cases} S^{(1)}, & \text{если } S^{(1)} \leq 1, \\ 0, & \text{если } S^{(1)} > 1. \end{cases}$$

Найдем оптимальное поведение первого игрока. Обозначим через $S^{(2)}$ сумму очков, которую получит игрок 2 в результате игры. Вычислим выигрыш игрока 1 при остановке на первом шаге с числом очков $X_1^{(1)} = x$:

$$h_1^{(2,2,F)}(x) = P\{S^{(2)} < x\} + P\{S^{(2)} > 1\}$$
$$= P\{X_1^{(2)} < x, X_1^{(2)} + X_2^{(2)} < x\} + P\{X_1^{(2)} < x, X_1^{(2)} + X_2^{(2)} > 1\}$$
$$= \int_0^x \int_0^{x-x_1} dx_2 dx_1 + \int_0^x \int_{1-x_1}^1 dx_2 dx_1 = x^2.$$

Выигрыш игрока 1 при продолжении игры определяется как

$$H_1^{(2,2,F)}(x) = \int_x^1 h_1^{(2,2,F)}(z) dz = 1/3 - x^3/3.$$

Оптимальный порог $u_1^{(2,2,F)} = x$ может быть найден из уравнения $h_1^{(2,2,F)}(x) = H_1^{(2,2,F)}(x)$. Так как $h_1^{(2,2,F)}(x)$ возрастает, а $H_1^{(2,2,F)}(x)$ убывает по x, то существует единственное решение уравнения $u_1^{(2,2,F)} = x \approx 0.532$.

2.2. Игра n лиц

Рассмотрим игру n лиц с полной информацией, где очередной игрок получает свои очки только после предшествующих игроков. Игроки не знают значений наблюдений последующих участников, но знают значения наблюдений и решения своих предшественников. Каждый игрок стремится максимизировать вероятность своего выигрыша.

Обозначим через $S^{(i)}$ сумму очков, полученных игроком i ($i = 1, \dots, n$). $S^{(i)}$ равно $x_1^{(i)}$ — при остановке на первом шаге или $x_1^{(i)} + x_2^{(i)}$ — при продолжении. Также обозначим через $u_i^{(2,n,F)}$ пороговую стратегию игрока i. Тогда стратегия игрока n вычисляется по формуле

$$u_n^{(2,n,F)} = \max_{i=\overline{1,n-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \leq 1\}\}.$$

Далее стратегию игрока k, $k = 2, \dots, n-1$, определим как

$$u_k^{(2,n,F)} = \max\{\max_{i=\overline{1,k-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \leq 1\}\}; u_1^{(2,n-k+1,F)}\}.$$

Заметим, что выигрыш и оптимальная стратегия игрока зависят только от тех игроков, чьи суммы очков после второго шага были меньше 1.

Теорема 1. *В игре n лиц с полной информацией и двумя шагами оптимальная стратегия $u_1^{(2,n,F)} = v$ первого игрока может быть найдена из уравнения*

$$v^{2n-2} = \frac{1 - v^{2n-1}}{2n-1}, \tag{2.1}$$

а ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии вычисляется по формуле

$$G_1^{(2,n,F)}(v) = \int\limits_0^{u_1^{(2,2,F)}} H_2(x)dx + \int\limits_{u_1^{(2,2,F)}}^{u_1^{(2,3,F)}} H_3(x)dx + \dots + \int\limits_{u_1^{(2,n-1,F)}}^{v} H_n(x)dx + \int\limits_v^1 x^{2(n-1)}dx, \tag{2.2}$$

где $u_1^{(2,2,F)} < u_1^{(2,3,F)} < \dots < u_1^{(2,n,F)}$;

$$H_i(x) = \int\limits_x^{u_1^{(2,i,F)}} h_i(y)dy + H_{i+1}(u_1^{(2,i,F)}), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad H_n(x) = \int\limits_x^1 h_n(y)dy;$$

$$h_j(y) = h_{j+1}(y)\frac{y^2 + (u_1^{(2,j,F)})^2}{2y^2}, \quad j = i, \dots, n-1, \quad h_n(y) = y^{2(n-1)}.$$

Доказательство. Докажем теорему по индукции. Для $n = 2$ условие теоремы выполняется. Далее для $n = 3$ нетрудно показать, что $u_1^{(2,2,F)} < u_1^{(2,3,F)}$ и $u_1^{(2,3,F)}$ удовлетворяет уравнению (2.1), а ожидаемый выигрыш первого игрока находится из (2.2). Действительно, $G_1^{(2,n,F)}(v)$ достигает максимума при $v > u_1^{(2,2,F)}$, удовлетворяющем уравнению (2.1), а при $v < u_1^{(2,2,F)}$ мы получаем противоречие.

Пусть условие теоремы выполняется для игры с $n-1$ игроками и $u_1^{(2,2,F)} < u_1^{(2,3,F)} < \dots < u_1^{(2,n-1,F)}$, т. е. пороги первого игрока возрастают по n.

Рассмотрим игру n лиц. Предположим, что первый игрок для принятия решения об остановке/продолжении использует однопороговую стратегию v и $u_1^{(2,n-1,F)} < v < 1$. Найдем этот порог. Для простоты обозначим здесь $u_1^{(2,k,F)} = u_1^{[k]}$ и $G_1^{(2,k,F)} = G_1^{[k]}$, $k = 2, \dots, n$.

Ожидаемый выигрыш первого игрока может быть описан формулой

$$G_1^{[n]}(v) = \int\limits_0^{u_1^{[2]}} H_2(x)dx + \int\limits_{u_1^{[2]}}^{u_1^{[3]}} H_3(x)dx + \dots + \int\limits_{u_1^{[n-1]}}^{v} H_n(x)dx + \int\limits_v^1 x^{2(n-1)}dx.$$

Величина $H_i(x)$ представляет собой вероятность выигрыша первого игрока при продолжении игры на следующий шаг для x из соответствующего интервала. Она имеет вид

$$H_i(x) = \int\limits_x^{u_1^{[i]}} h_i(y)dy + \int\limits_{u_1^{[i]}}^{u_1^{[i+1]}} h_{i+1}(y)dy + \ldots + \int\limits_{u_1^{[n-1]}}^{1} h_n(y)dy = \int\limits_x^{u_1^{[i]}} h_i(y)dy + H_{i+1}(u_1^{[i]}), \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$H_n(x) = \int\limits_x^1 h_n(y)dy,$$

где $h_j(y)$ — вероятность выигрыша игрока 1 при остановке на первом шаге со значением y,

$$h_j(y) = P\Big\{ \bigcap_{k=2}^{n} \big(\{S^{(k)} < y\} \cup \{S^{(k)} > 1\}\big) \Big\} = y^{2(j-1)} \frac{\prod_{k=2}^{n-(j-1)} \big(y^2 + (u_1^{[n-k+1]})^2\big)}{2^{n-j}}$$

$$= h_{j-1}(y)\frac{2y^2}{y^2+(u_1^{[j-1]})^2}, \quad j=i,\dots,n-1, \quad h_n(y)=y^{2(n-1)}.$$

Функция $G_1^{[n]}(v)$ вогнута по v на $[0,1]$ (вторая производная неположительна) и достигает максимума в точке, абсцисса которой находится из уравнения, полученного приравниванием производной $G_1^{[n]}(v)$ по v к нулю, т. е. из $h_n(v)=H_n(v)$, или $v^{2n-2}=\dfrac{1-v^{2n-1}}{2n-1}$.

Если же порог первого игрока удовлетворяет соотношению $u_1^{[n-2]}<v<u_1^{[n-1]}$, то его ожидаемый выигрыш вычисляется как

$$\hat{G}_1^{[n]}(v)=\int\limits_0^{u_1^{[2]}} H_2(x)dx+\int\limits_{u_1^{[2]}}^{u_1^{[3]}} H_3(x)dx+\dots+\int\limits_{u_1^{[n-2]}}^{v} H_{n-1}(x)dx+\int\limits_v^1 h_{n-1}(x)dx$$

и, следовательно, оптимальный порог выводится из уравнения $h_{n-1}(v)=H_{n-1}(v)$.

Функция $\hat{G}_1^{[n]}(v)$ вогнута на $[0,1]$ (вторая производная неположительна). Производная функции $\hat{G}_1^{[n]}(v)$ по v

$$\int\limits_v^{u_1^{[n-1]}} y^{2(n-2)}\frac{(y^2+(u_1^{[n-1]})^2)}{2}dy+\int\limits_{u_1^{[n-1]}}^1 y^{2(n-1)}dy-v^{2(n-2)}\frac{(v^2+(u_1^{[n-1]})^2)}{2}$$

меняет знак с положительного на отрицательный правее $u_1^{[n-1]}$. Действительно, производная в точке $u_1^{[n-1]}$ имеет вид $\dfrac{1-(u_1^{[n-1]})^{2n-1}}{2n-1}-(u_1^{[n-1]})^{2n-2}>\dfrac{1-(u^*)^{2n-1}}{2n-1}-(u^*)^{2n-2}=0$, где неравенство справедливо для $u^*>u_1^{[n-1]}$, и выражение обращается в нуль при $u^*>u_1^{[n-1]}$, удовлетворяющем (2.1). При $v=1$ производная имеет следующий вид:

$$\frac{(1-n)(2n-3)+(u_1^{[n-1]})^{2n-1}}{(2n-1)(2n-3)}-\frac{(n-1)(u_1^{[n-1]})^2}{2n-3}<\frac{(1-n)(2n-3)+1}{(2n-1)(2n-3)}=\frac{-(n-2)(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)}<0.$$

Это означает, что $G_1^{[n]}(v)$ достигает максимума в точке перегиба с абсциссой $v>u_1^{[n-1]}$.

Теорема доказана.

Значения оптимального порога $u_1^{(2,n,F)}$ и оптимальные выигрыши $G_1^{(2,n,F)}$, которые вычисляются по формулам (2.1) и (2.2), представлены для различных n в таблице выше. Заметим, что $u_1^{(2,n,F)}>1/2$.

3. Многошаговая игра с полной информацией

3.1. Многошаговая игра двух лиц с бесконечным числом шагов

Рассмотрим многошаговую игру с полной информацией и двумя игроками. Пусть игроки один за другим получают последовательность сумм независимых и одинаково распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных величин, $\{X_i^{(1)}\}$ и $\{X_i^{(2)}\}$, $i=1,2,\dots,$.

$$S_t^{(k)}=\sum_{i=1}^t X_i^{(k)}, \quad t=1,2,\dots; \quad k=1,2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим поведение каждого из игроков. Пусть игрок 2 использует стратегию $u_2^{(inf,2,F)}=u, 0<u<1$, и фиксирует сумму своих очков в первый момент, когда сумма $S_t^{(2)}$

превысит u. Обозначим эту итоговую сумму для игрока 2 через $S^{(2)}$. Второй игрок знает общее число очков первого игрока $S^{(1)}$. Исходя из этой информации второй игрок останавливается, если $S^{(2)} > S^{(1)}$ или $S^{(1)} > 1$, и продолжает, если $S^{(2)} \leq S^{(1)}$. Таким образом, стратегию игрока 2 находим по формуле

$$u_2^{(inf,2,F)} = u = S^{(1)} I\{S^{(1)} \leq 1\}.$$

Для вычисления выигрыша игрока найдем распределение $S^{(2)}$. Для $u \leq z \leq 1$ получим

$$P\{S^{(2)} \leq z\} = \sum_{t=1}^{\infty} P\{S_t^{(2)} \leq z\} = \sum_{t=1}^{\infty} P\{S_1^{(2)} < u, \ldots, S_{t-1}^{(2)} < u, S_t^{(2)} \in [u, z]\}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{u^{t-1}}{(t-1)!}(z-u) = e^u(z-u);$$

тогда

$$P\{S^{(2)} > 1\} = 1 - P\{S^{(2)} \leq 1\} = 1 - e^u(1-u). \tag{3.2}$$

Найдем оптимальный порог $0 < u_1^{(inf,2,F)} < 1$ первого игрока. Выигрыш игрока 1 при остановке в момент времени t, если сумма его очков $S_t^{(1)} = x$, определим как

$$h_1^{(inf,2,F)}(x) = P\{S^{(2)} < x\} + P\{S^{(2)} > 1\}.$$

Вероятность $P\{S^{(2)} < x\} = 0$. Тогда, используя выражение из (3.2) для $u = x$, имеем

$$h_1^{(inf,2,F)}(x) = 1 - e^x(1-x).$$

Выигрыш первого игрока при продолжении игры получаем по формуле

$$H_1^{(inf,2,F)}(x) = \int_x^{u_1} H_1^{(inf,2,F)}(z)dz + \int_{u_1}^{1} h_1^{(inf,2,F)}(z)dz = \int_x^{u_1} H_1^{(inf,2,F)}(z)dz + 1 - e - u_1 - e^{u_1}(u_1 - 2).$$

Оптимальный порог $u_1^{(inf,2,F)} = x$ может быть найден из уравнения $h_1^{(inf,2,F)}(x) = H_1^{(inf,2,F)}(x)$, или

$$e^x(1-x) = e + x + e^x(x-2). \tag{3.3}$$

Так как $h_1^{(inf,2,F)}(x)$ возрастает по x, а $H_1^{(inf,2,F)}(x)$ убывает, то (3.3) имеет единственное решение. $x \approx 0.571$ — оптимальный порог $u_1^{(inf,2,F)}$ для первого игрока.

3.2. Многошаговая игра n лиц с бесконечным числом шагов

Рассмотрим многошаговую игру с полной информацией и n игроками. Пусть игроки один за другим получают последовательность сумм независимых и одинаково распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин вида (3.1), где $k = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $S^{(k)}$ сумму очков, полученную игроком k ($k = 1, \ldots, n$), а через $u_k^{(inf,n,F)}$ его пороговую стратегию. Тогда стратегию игрока n вычислим следующим образом:

$$u_n^{(inf,n,F)} = \max_{i=\overline{1,n-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \leq 1\}\}.$$

Далее стратегию игрока k, $k = 2, \ldots, n-1$, найдем как

$$u_k^{(inf,n,F)} = \max\{\max_{i=\overline{1,k-1}} \{S^{(i)} \cdot I\{S^{(i)} \leq 1\}\}; u_1^{(inf,n-k+1,F)}\}.$$

Теорема 2. *В игре n лиц с полной информацией и бесконечным числом шагов оптимальная стратегия $u_1^{(inf,n,F)} = v$ может быть получена из уравнения*

$$(1 - e^v(1 - v))^{n-1} = \int\limits_v^1 (1 - e^y(1 - y))^{n-1} dy,$$

а ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии находится по формуле

$$G_1^{(inf,n,F)}(v) = e^v(1 - e^v(1 - v))^{n-1},$$

причем $u_1^{(inf,2,F)} < u_1^{(inf,3,F)} < \cdots < u_1^{(inf,n,F)}$.

Доказательство возрастания порогов по n и вывод уравнения для нахождения оптимального порога проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Найдем ожидаемый выигрыш первого игрока $G_1^{(inf,n,F)}(u_1^{(inf,n,F)})$ при

$$u_1^{(inf,n-1,F)} < u_1^{(inf,n,F)} = u_1 < 1$$

в данной игре. Выигрыш игрока 1, если число его очков $S^{(1)} = x$, учитывая, что $P\{S^{(k)} < x | S^{(1)} = x\} = 0$, определим как

$$h_1^{(inf,n,F)}(x) = P\Big\{ \bigcap_{k=2}^{n} \Big(\{S^{(k)} > 1\} \Big) \Big\} = P(\{S^{(2)} > 1\})^{n-1} = (1 - e^x(1 - x))^{n-1}.$$

Выигрыш первого игрока при продолжении игры вычислим как

$$H_1^{(inf,n,F)}(x) = \int\limits_x^{u_1} H_1^{(inf,n,F)}(z)dz + \int\limits_{u_1}^1 h_1^{(inf,n,F)}(z)dz.$$

Дифференцируя $H_1^{(inf,n,F)}(x)$ и учитывая граничное условие $H_1^{(inf,n,F)}(u_1) = h_1^{(inf,n,F)}(u_1)$, получим

$$H_1^{(inf,n,F)}(x) = e^{u_1 - x}(1 - e^{u_1}(1 - u_1))^{n-1}.$$

$H_1^{(inf,n,F)}(0)$ представляет собой ожидаемый выигрыш $G_1^{(inf,n,F)}$ игрока 1 перед началом игры при использовании оптимального порога u_1, т. е.

$$G_1^{(inf,n,F)}(u_1) = H_1^{(inf,n,F)}(0) = e^{u_1}(1 - e^{u_1}(1 - u_1))^{n-1}.$$

Теорема доказана.

Значения оптимальных поргов $u_1^{(inf,n,F)}$ и оптимальных выигрышей для различных n отражены в таблице, представленной ранее. Заметим из таблицы, что в игре с полной информацией оптимальные пороги игрока 1 в случае бесконечного числа шагов больше, чем пороги в случае двух шагов.

3.3. Сравнение стратегий в играх разного типа информации

Теорема 3. *Оптимальный порог первого игрока в игре с полной информацией меньше, чем для игроков в игре с отсутствием информации, т. е. выполняются соотношения*

$$\text{а)}\ \ u_1^{(2,n,F)} < u^{(2,n,N)}; \quad \text{б)}\ \ u_1^{(inf,n,F)} < u^{(inf,n,N)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай (а) с двумя шагами, доказательство случая (б) с бесконечным числом шагов проводится по такой же схеме.

Случай а). Оптимальные пороги $u^{(2,n,N)}$ и $u_1^{(2,n,F)}$ находятся из уравнений (1.1) и (2.1) соответственно. Обозначим как $h^{(2,n,N)}(x)$ и $h_1^{(2,n,F)}(x)$ левые части этих уравнений и как $H^{(2,n,N)}(x)$ и $H_1^{(2,n,F)}(x)$ их правые части соответственно. Эти функции имеют вид

$$h^{(2,n,N)}(x) = x^{2(n-1)}, \quad H^{(2,n,N)}(x) = \int_x^1 (zx + z - x)^{n-1} dz + \int_1^{x+1} \left(P\{S^{(k)} > z\}\right)^{n-1} dz,$$

$$h_1^{(2,n,F)}(x) = x^{2(n-1)}, \quad H_1^{(2,n,F)}(x) = \int_x^1 z^{2(n-1)} dz,$$

где $S^{(k)}$ — общее число очков игрока k в игре с отсутствием информации.

Функции $h_1^{(2,n,N)}(x)$ и $h_1^{(2,n,F)}(x)$ совпадают и возрастают.

Очевидно, что $H_1^{(2,n,F)}(x)$ убывает по x. Рассмотрим разность функций

$$H^{(2,n,N)}(x) - H_1^{(2,n,F)}(x) = \left(\int_x^1 (zx + z - x)^{n-1} dz - \int_x^1 (z^2)^{n-1} dz\right) + \int_1^{x+1} \left(P\{S^{(k)} > z\}\right)^{n-1} dz.$$

Выражение в скобках положительно, так как для $z > x$ $z^2 < zx + z - x$. Следовательно, $H^{(2,n,N)}(x) - H_1^{(2,n,F)}(x) > 0$; это означает, что $u_1^{(2,n,F)} < u^{(2,n,N)}$.

Теорема доказана.

Соотношения теоремы можно установить по данным таблицы, представленной выше. Таким образом, наличие информации уменьшает пороги оптимальной остановки первого игрока. В игре с полной информацией первый игрок становится более осторожным в своей стратегии, тогда как последующие игроки наблюдают очки предшественников и могут быть заинтересованы в увеличении своих собственных порогов.

З а м е ч а н и е 2. Из численных результатов (см. таблицу) заметим, что для $n \geq 2$ выполняется $G_1^{(2,n,F)} < G^{(2,n,N)} = 1/n$, так же как и $G_1^{(inf,n,F)} < G^{(inf,n,N)} = 1/n$.

З а м е ч а н и е 3. Наличие информации дает преимущество последнему игроку, так что он может ожидать больший выигрыш, чем в случае отсутствия информации.

Следующий пример демонстрирует это соотношение для двухшаговой игры двух лиц.

П р и м е р. Покажем, что $G^{(2,2,N)} < G_2^{(2,2,F)}$. Имеем $G^{(2,2,N)} = 1/2 = 0.5$.

Оптимальная стратегия второго игрока в двухшаговой игре с полной информацией — $u_2^{(2,2,F)} = S^{(1)} I\{S^{(1)} \leq 1\}$. Тогда его ожидаемый выигрыш определяется как

$$G_2^{(2,2,F)} = \int_0^2 \left(\int_0^s H_2^{(2,2,F)}(z) dz + \int_s^1 h_2^{(2,2,F)}(z) dz\right) dF(s),$$

где $F(s) = P(S^{(1)} < s)$ — функция распределения случайной величины $S^{(1)}$. Поскольку $h_2^{(2,2,F)}(z) = 1$ для $z \in [s, 1]$, перепишем ожидаемый выигрыш второго игрока:

$$G_2^{(2,2,F)} = \int_0^1 \left(\int_0^s H_2^{(2,2,F)}(z) dz + (1 - s)\right) dF(s) + \int_1^2 dF(s).$$

Для $0 < z < 1$ имеем $H_2^{(2,2,F)}(z) = P(S^{(1)} < z + X_2^{(2)} < 1) = 1 - s$. Тогда

$$G_2^{(2,2,F)} = \int_0^1 \Big(\int_0^s (1-s)dz + (1-s) \Big) dF(s) + \int_1^2 dF(s) = 1 - \int_0^1 s^2 dF(s).$$

Для упрощения обозначений положим $u_1^{(2,2,F)} = u_1$ и $u^{(2,2,N)} = u$.
Для $0 \le s \le u_1$: $\quad F(s) = P\{S^{(1)} < s\} = P\{X_1^{(1)} < s, X_1^{(1)} + X_2^{(1)} < s\} = s^2/2$;
для $u_1 < s \le 1$:

$$F(s) = P\{S^{(1)} < s\} = P\{u_1 \le X_1^{(1)} < s\} + P\{X_1^{(1)} \le u_1, X_1^{(1)} + X_2^{(1)} < s\}$$
$$= s - u_1 + \int_0^{u_1} (s-z)dz = s(1+u_1) - u_1 - \frac{u_1^2}{2}.$$

Тогда имеем $G_2^{(2,2,F)} = 0.546$. Таким образом, $G_1^{(2,2,F)} < G^{(2,2,N)} < G_2^{(2,2,F)}$.

Найдем ожидаемый порог второго игрока. Обозначим $u_2^{(2,2,F)} = u_2$, тогда

$$E(u_2) = \int_0^{u_1} s \cdot s ds + \int_{u_1}^1 s(1+u_1)ds = \frac{1}{2} + \frac{u_1}{2} - \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_1^3}{6} = 0.599.$$

Получим, что $u_1 < u < E(u_2)$.

З а м е ч а н и е 4. Ожидаемый порог второго игрока $E(u_2^{(2,n,F)}) > u^{(2,n,N)}$.

Вычислим ожидаемый порог второго игрока в игре с полной информацией. Пусть $u_2^{(2,n,F)} = u_2^{[n]}$, $u_1^{(2,n,F)} = u_1^{[n]}$. Функцию распределения $S^{(1)}$ числа очков игрока 1 устанавливаем следующим образом:

$$F^{[n]}(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{2}, & \text{если} \quad 0 \le s \le u_1^{[n]}, \\ s(1+u_1^{[n]}) - u_1^{[n]} - \dfrac{(u_1^{[n]})^2}{2}, & \text{если} \quad u_1^{[n]} < s \le 1, \\ 1 - \dfrac{(u_1^{[n]} - s + 1)^2}{2}, & \text{если} \quad 1 < s \le 1 + u_1^{[n]}, \\ 1, & \text{если} \quad 1 + u_1^{[n]} < s \le 2. \end{cases}$$

Заметим, что $u_2^{[n]} = \max\{\{S^{(1)} \cdot I\{S^{(1)} \le 1\}\}; u_1^{[n-1]}\}$, тогда ожидаемый порог второго игрока в игре n лиц вычисляется по формуле

$$E(u_2^{[n]}) = \int_0^{u_1^{[n-1]}} u_1^{[n-1]} s ds + \int_{u_1^{[n-1]}}^{u_1^{[n]}} s^2 ds + \int_{u_1^{[n]}}^1 s(1+u_1^{[n]})ds + \int_1^{1+u_1^{[n]}} u_1^{[n-1]}(1+u_1^{[n]} - s)ds$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{u_1^{[n]}}{2} - \frac{(u_1^{[n]})^2}{2} - \frac{(u_1^{[n]})^3}{6} + \frac{(u_1^{[n-1]})^3}{6} + \frac{u_1^{[n-1]}(u_1^{[n]})^2}{2}.$$

Как видно из таблицы, представленной выше, $u_1^{[n]} < u < E(u_2^{[n]})$. Таким образом, в игре с полной информацией порог игрока 1 ниже, а порог игрока 2 выше, чем соответствующие пороги в игре с отсутствием информации.

Численные результаты показывают, что в игре с полной информацией каждый последующий игрок имеет преимущество перед предыдущими в том смысле, что он получает больше информации и может использовать ее при принятии решения об остановке/продолжении игры.

З а м е ч а н и е 5. Разница между ожидаемыми выигрышами последнего игрока в игре с полной информацией и игрока в игре без информации представляет собой цену информации в игре. Обозначим через $PoI^{(m,n)} = G_n^{(m,n,F)} - G^{(m,n,N)}$ цену информации в m-шаговой игре n лиц.

В приведенном выше примере $PoI^{(2,2)} = G_2^{(2,2,F)} - G^{(2,2,N)} = 0.046$.

4. Заключение

Данная работа расширяет исследования некооперативной игры с оптимальной остановкой, прототипом которой является телевизионное шоу “The Price is Right”, где игроки по очереди могут получить одно или два числовых значения, чтобы быть как можно ближе к заданной границе, но не превышать ее. Была расширена последовательная постановка игры с полной информацией: на произвольное число участников в игре и на бесконечное число шагов.

Для игры с полной информацией, так же как и для случая с отсутствием информации показано, что оптимальный порог всегда больше половины, или половины предельного значения, установленного в игре. Для каждой игры с различным типом информации вычислены значения оптимальных порогов и ожидаемых выигрышей для различного числа участников.

Проведено сравнение игр с использованием различных типов информации. Для произвольного числа игроков были рассмотрены пороговые стратегии в игре с отсутствием информации и с полной информацией о действиях противников. Было установлено, что доступность информации в игре меняет оптимальную стратегию первого игрока, снижая ее значение. Оптимальный порог первого игрока и его ожидаемый выигрыш ниже, чем в игре с отсутствием информации для того же числа участников. Когда имеется доступ к информации о действиях и результатах предшественников, последующие игроки получают возможность увеличить значения своих порогов. Между тем их оптимальные пороги превышают пороговое значение в игре с отсутствием информации.

В дальнейшем следует также провести исследование для случая, когда доступна только частичная информация. Это может быть постановка, в которой каждый игрок знает общее число участников и свою очередь в игре. На своем ходе он также получает дополнительную информацию о количестве участников, чьи очки превысили заданную границу, однако игроку ничего не известно об очках, полученных предыдущими игроками. Интересно оценить, какие преимущества дает такая дополнительная информация игроку в сравнении с игрой без информации. С другой стороны, стоит исследовать, будет ли игрок, обладающий такой частичной информацией, оценивать выше свои шансы на выигрыш, и идти, таким образом, на больший риск, чем в случае, когда доступна вся информация о предыдущих игроках.

Эта игровая модель может быть расширена дальше. Хотя исследования в данной работе ограничены постановкой с одним раундом, можно рассмотреть игру с двумя или более раундами, когда каждый раунд сопровождается выбыванием одного или нескольких участников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Alpern S., Katrantzi I., Ramsey D.** Partnership formation with age-dependent preferences // European J. Operational Research. 2013. Vol. 225, iss. 1. P. 91–99. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.012 .
2. **Bennett R.W., Hickman K.A.** Rationality and the “Price is Right” // J. Economic Behavior & Organization. 1993. Vol. 21, iss. 1. P. 99–105. doi: 10.1016/0167- 2681(93)90042-N .
3. **Berk J., Hughson E., Vandezande K.** The Price is Right, but are the bids? An investigation of rational decision theory // The American Economic Review. 1996. Vol. 86, no. 4. P. 954–970.
4. **Bruss F.T., Ferguson T.S.** Multiple buying or selling with vector offers // J. Appl. Probability. 1997. Vol. 34. no. 4. P. 959–973. doi: 10.2307/3215010 .
5. **Chow Y.S., Robbins H., Siegmund D.** Great expectations: The theory of optimal stopping. Boston: Houghton Mifflin, 1971. 139 p.

6. **Coe P.R., Butterworth W.** Optimal stopping in “The Showcase Showdown” // The American Statistician. 1995. Vol. 49, no. 3. P. 271–275. doi: 10.2307/2684199 .
7. **Kaynar B.** Optimal stopping in a stochastic game // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2009. Vol. 23. P. 51–60. doi: 10.1017/S0269964809000059 .
8. **Krasnosielska-Kobos A.** Construction of Nash equilibrium based on multiple stopping problem in multi-person game // Math. Methods Oper. Research. 2016. Vol. 83, no. 1. P. 53–70. doi: 10.1007/s00186-015-0519-8 .
9. **Mazalov V.V., Ivashko A.A.** Equilibrium in n-person game of showcase showdown // Probability in the Engineering and Informational Sciences.2010. Vol. 24, no. 3. P. 397–403. doi: 10.1017/S0269964810000045 .
10. **Ramsey D.M.** A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation // Math. Methods Oper. Research. 2007. Vol. 66, no. 1. P. 149–164. doi: 10.1007/s00186-006-0136-7 .
11. **Sakaguchi M.** Equilibrium in two-player games of “Showcase Showdown” // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2005. Vol. 61. P. 145–151.
12. **Sakaguchi M.** Players information in two-player games of “Score Showdown” // Game Theory Appl. 2007. Vol. 11. P. 111–124.
13. **Sofronov G.** An optimal sequential procedure for a multiple selling problem with independent observations // European J. Oper. Research. 2013. Vol. 225, no. 2. P. 332–336. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.042 .
14. **Solan E., Vieille N.** Quitting games // Math. Oper. Research. 2001. Vol. 2, no. 26, P. 265–285.
15. **Szajowski K., Tamaki M.** Shelf life of candidates in the generalized secretary problem // Oper. Research Letters. 2016. Vol. 44, no. 4. P. 498–502. doi: 10.1016/j.orl.2016.05.002 .
16. **Tenorio R., Cason T.N.** To spin or not to spin? Natural and laboratory experiments from “The Price is Right” // The Economic J. 2002. Vol. 112, iss. 476. P. 170–195. doi: 10.1111/1468-0297.0j678 .
17. **Tijms H.C.** Understanding probability: 2 edn. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 452 p.

Поступила 6.08.2019
После доработки 15.08.2019
Принята к публикации 19.08.2019

Серёгина Татьяна Валерьевна
канд. наук в области информатики и автоматики
Французская Национальная школа гражданской авиации;
Тулузская бизнес-школа
г. Тулуза, Франция
e-mail: ts.tseregina@gmail.com

Ивашко Анна Антоновна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН;
Петрозаводский государственный университет
г. Петрозаводск
e-mail: aivashko@krc.karelia.ru

Мазалов Владимир Викторович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
г. Петрозаводск;
Школа математики и статистики, Университет Циндао, Институт прикладной математики
Циндао, 266071, Китай
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Alpern S., Katrantzi I., Ramsey D. Partnership formation with age-dependent preferences. *European J. Operational Research*, 2013, vol. 225, iss. 1, pp. 91–99. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.012 .

2. Bennett R.W., Hickman K.A. Rationality and the “Price is Right”. *J. Economic Behavior & Organization*, 1993, vol. 21, iss. 1, pp. 99–105. doi: 10.1016/0167- 2681(93)90042-N .
3. Berk J., Hughson E., Vandezande K. The Price is Right, but are the bids? An investigation of rational decision theory. *The American Economic Review*, 1996, vol. 86, no. 4, pp. 954–970.
4. Bruss F.T., Ferguson T.S. Multiple buying or selling with vector offers. *J. Appl. Probability*, 1997, vol. 34, no. 4, pp. 959–973. doi: 10.2307/3215010 .
5. Chow Y.S., Robbins H., Siegmund D. *Great expectations: The theory of optimal stopping.* Boston: Houghton Mifflin, 1971, 139 p.
6. Coe P.R., Butterworth W. Optimal stopping in “The Showcase Showdown”. *The American Statistician*, 1995, vol. 49, no. 3, pp. 271–275. doi: 10.2307/2684199 .
7. Kaynar B. Optimal stopping in a stochastic game. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2009, vol. 23, pp. 51–60. doi: 10.1017/S0269964809000059 .
8. Krasnosielska-Kobos A. Construction of Nash equilibrium based on multiple stopping problem in multi-person game. *Math. Methods Oper. Research*, 2016, vol. 83, no. 1, pp. 53–70. doi: 10.1007/s00186-015-0519-8 .
9. Mazalov V.V., Ivashko A.A. Equilibrium in n-person game of showcase showdown. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2010, vol. 24, no. 3, pp. 397–403. doi: 10.1017/S0269964810000045 .
10. Ramsey D.M. A model of a 2-player stopping game with priority and asynchronous observation. *Math. Methods Oper. Research*, 2007, vol. 66, no. 1, pp. 149–164. doi: 10.1007/s00186-006-0136-7/.
11. Sakaguchi M. Equilibrium in two-player games of “Showcase Showdown”. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 2005, vol. 61, pp. 145–151.
12. Sakaguchi M. Players information in two-player games of “Score Showdown”. *Game Theory Appl.*, 2007, vol. 11, pp. 111–124.
13. Sofronov G. An optimal sequential procedure for a multiple selling problem with independent observations // European J. Oper. Research. 2013. Vol. 225, no. 2. P. 332–336. doi: 10.1016/j.ejor.2012.09.042 .
14. Solan E., Vieille N. Quitting games. *Math. Oper. Research*, 2001, vol. 2, no. 26, pp. 265–285.
15. Szajowski K., Tamaki M. Shelf life of candidates in the generalized secretary problem. *Oper. Research Letters*, 2016, vol. 44, no. 4, pp. 498–502. doi: 10.1016/j.orl.2016.05.002 .
16. Tenorio R., Cason T.N. To spin or not to spin? Natural and laboratory experiments from “The Price is Right” . *The Economic J.*, 2002, vol. 112, iss. 476, pp. 170–195. doi: 10.1111/1468-0297.0j678 .
17. Tijms H.C. *Understanding probability.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 452 p.

Received August 6, 2019
Revised August 15, 2019
Accepted August 19, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Shandong Province “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009).

Tatiana Valerievna Seregina, PhD in Computer Science and Automation, École Nationale de l’Aviation Civile - Université de Toulouse, 31055 Toulouse Cedex 4, France, Toulouse Business School - Université Toulouse I, 31068 Toulouse Cedex 7, France, e-mail: ts.tseregina@gmail.com .

Anna Antonovna Ivashko, Cand. Phys.-Math. Sci., Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia; Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, 185910 Russia, e-mail: aivashko@krc.karelia.ru .

Vladimir Viktorovich Mazalov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics, Qingdao, 266071, China; Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia, e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru .

Cite this article as: T. V. Seregina, A. A. Ivashko, V. V. Mazalov. Optimal stopping strategies in the game “The Price Is Right”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 217–231 .