ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.929

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ И ОЦЕНКАХ МАТРИЦЫ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

В. П. Максимов

Рассматривается линейная функционально-дифференциальная система с последействием общего вида. Приводятся основные соотношения, определяющие матрицу Коши — ядро интегрального представления решения задачи Коши. Отмечается роль матрицы Коши в исследовании широкого круга задач теории функционально-дифференциальных систем, в том числе задач управления относительно заданной системы целевых функционалов и краевых задач с общими краевыми условиями. Эффективность решения этих задач существенно зависит от возможности построения достаточно точного приближения матрицы Коши исследуемой системы. Предлагается подход к приближенному построению матрицы Коши, сочетающий итерационные процедуры и алгоритмы построения достаточно точного начального приближения, основанные на специальной аппроксимации параметров исходной системы. Установлены оценки точности получаемых приближений.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, представление решений, матрица Коши.

V. P. Maksimov. On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect.

A linear functional differential system with aftereffect of general form is considered. Basic relations that define the Cauchy matrix — the kernel of integral representation to solutions of the Cauchy problem — are presented. The role of the Cauchy matrix in the study of a wide range of problems in the theory of functional differential systems, including control problems with respect to a given system of objective functionals and boundary value problems with general boundary conditions, is indicated. The efficiency of solving these problems depends essentially on the possibility of constructing a sufficiently exact approximation to the Cauchy matrix of the system. We propose an approach to the approximate construction of the Cauchy matrix that combines iterative procedures and algorithms for the construction of a rather accurate initial approximation based on a special approximation of parameters of the system. Error estimates are established for the resulting approximations.

Keywords: linear systems with aftereffect, representation of solutions, Cauchy matrix.

MSC: 34K10, 34K34, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-153-162

Введение

Матрица Коши $C(t,s)$ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) - P(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0,T],$$

дает представление ее общего решения

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

и выражается через фундаментальную матрицу однородной системы: $C(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$. В исследовании задач управления [1] и краевых задач [2] для линейных систем с последействием матрица Коши, как и ее аналоги, играет существенную роль, она входит в конструкцию

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00332).

программных и позиционных управлений и в конструкцию матриц Грина линейных краевых задач. Аналог приведенной формулы имеет место для широкого класса функционально-дифференциальных систем [2, с. 84; 3, с. 68; 4; 5, с. 67], включая системы с импульсным воздействием и непрерывно-дискретные (гибридные) системы [6], однако матрица Коши в общем случае имеет более сложную структуру. В частности, она теряет так называемое полугрупповое свойство $C(t,s) = C(t,\tau)C(\tau,s)$. В [5] показано, что в классе линейных систем требование наличия полугруппового свойства с распределенным запаздыванием сужает этот класс до обыкновенной системы. Отметим, что одна из модификаций полугруппового свойства для систем с запаздыванием предложена в [7].

В задачах управления, в том числе в случае, когда цель управления задается конечной системой целевых функционалов [8], матрица Коши позволяет дать полное описание реакции системы на всевозможные управляющие воздействия, что придает естественный характер ее использованию при поиске управлений, позволяющих достичь цели управления. При этом эффективность применения матрицы Коши существенно зависит от возможности построения ее достаточно точного приближения. Один из подходов к приближенному построению матрицы Коши с гарантированной оценкой точности представлен в [9]. Этот подход основан на кусочно-постоянной аппроксимации параметров исследуемой системы, позволяющей точно строить матрицу Коши для аппроксимирующей системы. В настоящей работе предлагается существенное расширение класса аппроксимирующих систем и обсуждаются детали подхода, сочетающего итерационные процедуры построения приближения для матрицы Коши с построением достаточно точного начального приближения.

1. Предварительные сведения

Приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения из [2; 3]. Обозначим через $L^n = L^n[0,\,T]$ пространство суммируемых по Лебегу функций $v : [0,\,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|v\|_{L^n} = \int\limits_0^T |v(s)|_n \, ds,$$

где $|\cdot|_n$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать; для любого элемента $a \in \mathbb{R}^n$ (n-вектор-столбца) запись $(a)_i$ означает его i-й элемент. Пусть $D^n = D^n[0,\,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,\,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{D^n} = |x(0)|_n + \|\dot{x}\|_{L^n}$. Через V обозначим оператор интегрирования: $(Vv)(t) = \int_0^t v(s)\,ds$, I — тождественный оператор.

Рассмотрим в пространстве D^n уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \int\limits_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A(t)x(0) = f(t), \quad t \in [0,\,T]. \tag{1.1}$$

Здесь ядро $K(t,s)$ интегрального оператора $K : L^n \to L^n$ удовлетворяет *условию* $(\mathcal{K})$:

$(\mathcal{K})$ элементы $k^{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и имеют общую суммируемую на $[0,\,T]$ мажоранту $\kappa(t)$:

$$\left|k^{ij}(t,s)\right| \leqslant \kappa(t), \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad t \in [0,T],$$

а $(n \times n)$-матрица A имеет суммируемые на $[0,\,T]$ элементы.

Уравнение (1.1) охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. В частности, для оператора

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int\limits_0^t d_s\mathcal{R}(t,s)x(s)$$

с распределенным запаздыванием, где без ограничения общности можно считать $R(t,t) = 0$, имеем $K(t,s) = -\mathcal{R}(t,s),\ A(t) = \mathcal{R}(t,0)$.

Оператор $Q = \mathcal{L}V : L^n \to L^n$ называют главной частью оператора $\mathcal{L}$, в уравнении (1.1) оператор $Q = I - K$ является вольтерровым:

$$(Qv)(t) = v(t) - \int\limits_0^t K(t,\, s)\, v(s)\, ds,$$

и обратимым. Условимся ниже обозначать интегральный оператор той же буквой, что и ядро. Обратный оператор Q^{-1} имеет представление

$$(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t,\, s)\, f(s)\, ds,$$

где $R(t,\, s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,\, s)$.

Приведем представление решения уравнения (1.1). Для этого определим столбцы $y_i(t)$ $(n \times n)$-матрицы $Y(t)$ как абсолютно непрерывные решения задачи Коши

$$\dot{y}(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\, \dot{y}(s)\, ds - a_i(t), \quad y(0) = 0, \quad t \in [0,\, T],$$

где $a_i(t)$ — i-й столбец матрицы A.

Матрица $X(t) = E_n + Y(t)$, где E_n — единичная $(n\times n)$-матрица, является фундаментальной матрицей однородного уравнения (1.1) $(f(t) = 0,\ t \in [0,\, T])$.

Общее решение (1.1) имеет представление

$$x(t) = X(t)\, \alpha + \int\limits_0^t C(t,\, s) f(s)\, ds,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, $C(t,\, s)$ — матрица Коши [4; 5, с. 52–58]. Эта матрица является решением матричного уравнения

$$C'_t(t,\, s) = \int\limits_s^t K(t,\, \tau)\, C'_\tau(\tau,\, s)\, d\tau + K(t,\, s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

с условием $C(s,\, s) = E_n$ $\big($здесь и всюду ниже $C'_\tau(\tau,\, s) = \dfrac{\partial}{\partial\tau} C(\tau,\, s)\big)$ и уравнения

$$C(t,\, s) = E_n + \int\limits_s^t C(t,\, \tau) K(\tau,\, s)\, d\tau, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Матрица $C(t,\, s)$ выражается через резольвентное ядро $R(t,\, s)$: $C(t,\, s) = E_n + \int_s^t R(\tau,\, s)\, d\tau$.

2. Один класс аппроксимаций вольтеррова оператора с сохранением вольтерровости

Здесь дается описание класса ядер $\widetilde{K}(t,\,s)$, для которого система (1.1) с оператором $\widetilde{Q} = I - \widetilde{K}$ допускает точное построение матрицы Коши. Разобьем отрезок $[0,\,T]$ на N равных частей точками t_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1 \,:\, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$. Обозначим через $\eta_i(t)$, $i = 1, \ldots, N-1$, характеристическую функцию промежутка $[t_{i-1}, t_i)$, через $\eta_N(t)$ — характеристическую функцию отрезка $[t_{N-1}, t_N]$. Определим ядро $\widetilde{K}(t,\,s)$ равенством

$$\widetilde{K}(t,\,s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} \eta_i(t)\, P_i(t)\, Q_{ij}(s)\, \eta_j(s). \tag{2.1}$$

Здесь матрица $P_1(t) = 0$, матрицы P_i, $i = 2, \ldots, N$, с суммируемыми элементами и матрицы Q_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$ ($Q_{ij} = 0$, $j \geqslant i$), с измеримыми и ограниченными элементами используются для локальной аппроксимации матричного ядра $K(t,s)$.

Для формулировки утверждения о резольвентном ядре $\widetilde{R}(t,\,s)$ ядра $\widetilde{K}(t,\,s)$ введем следующие обозначения:

$$U_i(t) = \eta_i(t)\, P_i(t); \quad V_i(s) = \sum_{j=1}^{i} Q_{ij}(s)\, \eta_j(s); \quad B_{ki} = \int\limits_0^T V_k(t)\, U_i(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Заметим, что из определения матриц B_{ki} следует, что $B_{ki} = 0$ при $i \geqslant k$. Блочная $(Nn \times Nn)$-матрица $\Gamma = \{\Gamma_{ki}\}_{k,i=1,\ldots,N}$, $\Gamma_{kk} = E_n, k = 1, \ldots, N;$ $\Gamma_{ki} = -B_{ki}$, $k = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, N$, является нижнетреугольной и имеет на главной диагонали единичные матрицы E_n.

Обозначим через $H = \{H_{ki}\}_{k,i=1,\ldots,N}$ $(Nn \times Nn)$-матрицу обратную к матрице Γ с $(n \times n)$-блоками H_{ki}, $k, i = 1, \ldots, N$:

$$\Gamma^{-1} = H = \{H_{ki}\}_{k,i=1,\ldots,N}. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Пусть ядро $\widetilde{K}(t,\,s)$ интегрального оператора Вольтерра определено равенством* (2.1)*, а матрицы $U_i(t)$, $V_k(s)$, B_{ki}, H_{ki} — равенствами* (2.2), (2.3)*. Тогда резольвентное ядро $\widetilde{R}(t,\,s)$ имеет представление*

$$\widetilde{R}(t,\,s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} U_i(t)\, H_{ik}\, V_k(s). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t) = \int\limits_0^t \widetilde{K}(t,\,s)\, z(s) \,+\, f(t), \quad t \in [0,\,T]. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы сводится к получению представления решения этого уравнения для любого $f \in L^n$. Используя представление ядра $\widetilde{K}(t,\,s)$, с учетом обозначений (2.2) запишем уравнение (2.5) в виде

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N} U_i(t) \int\limits_0^T V_i(s)\, z(s)\, ds \,+\, f(t). \tag{2.6}$$

Умножая обе части этого уравнения слева на матрицу $V_k(t)$ и интегрируя по t от 0 до T, получаем

$$\int\limits_0^T V_k(t) z(t)\, dt \,=\, \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^T V_k(t)\, U_i(t)\, dt\, \gamma_i, + \int\limits_0^T V_k(t)\, f(t)\, dt,$$

где $\gamma_i = \int_0^T V_i(s)\, z(s)\, ds$. Вводя обозначение $b_k = \int_0^T V_k(t)\, f(t)\, dt$, получаем для $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, N$, линейную алгебраическую систему

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{N} B_{ki}\, \gamma_i \;+\; b_k, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Записывая компоненты решения этой системы с использованием матрицы H: $\gamma_i = \sum_{k=1}^{N} H_{ik}\, b_k$ и подставляя это решение в равенство

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N} U_i(t)\, \gamma_i \;+\; f(t)$$

(см. (2.6)), получаем представление решения уравнения (2.5) в виде

$$z(t) = \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} U_i(t)\, H_{ik}\, V_k(s)\; f(s)\, ds + \; f(t) \;=\; \int_0^t \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} U_i(t)\, H_{ik}\, V_k(s)\; f(s)\, ds \;+\; f(t),$$

что завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е 1. Структура матрицы Γ, используемой в доказательстве теоремы, позволяет фактически обходиться без ее обращения: алгебраическая система (2.7) является рекуррентной.

З а м е ч а н и е 2. Матрица H, описываемая равенством (2.3), позволяет выразить резольвентное ядро $\widetilde{R}(t,s)$ через матрицы $P_i(t)$ и $Q_{ij}(s)$, определяющие ядро $\widetilde{K}(t,s)$. При этом равенство (2.4) принимает вид

$$\widetilde{R}(t,\, s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} \eta_i(t)\, P_i(t)\, H_{ik}\, Q_{kj}(s)\, \eta_j(s). \tag{2.8}$$

З а м е ч а н и е 3. При использовании кусочно-полиномиальных приближений $P_i(t)$ и $Q_{ij}(s)$ с рациональными коэффициентами и рациональных значений t_i элементы резольвентного ядра (2.8) строятся точно.

З а м е ч а н и е 4. Функционально-дифференциальные системы с ядром интегрального оператора вида (2.1) включают неавтономные системы с кусочно-постоянным запаздыванием, которые находят широкое применение при моделировании процессов экономической динамики в макро- и микроэкономике, где случай запаздывания $h(t) = [t]$ ($[t]$ — целая часть числа t) является естественным и весьма распространенным. Обзор таких моделей с их подробным описанием и ссылками на первоисточники представлен в [10].

Используя ядро $\widetilde{K}(t,s)$ в качестве аппроксимации ядра $K(t,s)$ в исходном уравнении, мы получаем соответствующую аппроксимацию матрицы Коши:

$$\widetilde{C}'_t(t,\, s) = \widetilde{R}(t,\, s); \quad \widetilde{C}(t,\, s) = E_n + \int_s^t \widetilde{R}(\tau,\, s)\, d\tau.$$

Оценка точности полученного приближения $\widetilde{R}(t,s)$ может быть получена стандартным образом в условиях теоремы об обратном операторе [11, с. 99]. В операторной форме такая оценка имеет следующий вид:

если $\|(I + \widetilde{R})\,(\widetilde{K} - K)\|_{L^n \to L^n} \leqslant q \,<\, 1$, то $\|(\widetilde{R} - R)\,\|_{L^n \to L^n} \leqslant \dfrac{q}{1-q}\, \|I + \widetilde{R}\|_{L^n \to L^n}$.

Для записи такого рода оценок в терминах элементов ядер интегральных операторов условимся эти элементы обозначать соответствующими строчными буквами с верхними индексами. Так, например, $\widetilde{k}^{ij}$ — элементы матричного ядра $\widetilde{K}(t,s)$.

Если точность аппроксимации $\widetilde{K}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ определяется неравенством

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T\left[|k^{ij}(t,s)-\widetilde{k}^{ij}(t,s)|+\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_0^T|k^{i\nu}(t,\tau)-\widetilde{k}^{i\nu}(t,\tau)|\cdot|\widetilde{r}^{\nu j}(\tau,s)|d\tau\right]dt\right)\leqslant\delta<1,$$

то имеет место оценка

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T|r^{ij}(t,s)-\widetilde{r}^{ij}(t,s)|\,dt\ \leqslant\ \frac{\delta}{1-\delta}\left(1+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,T]}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T|\widetilde{r}^{ij}(t,s)|\,dt\right).$$

3. Итерационное уточнение начальной аппросимации

Напомним одну известную (см, например, [12, с. 25]) оценку точности k-го приближения решения операторного уравнения $x = Ax + f$ с линейным оператором A, действующим в банаховом пространстве X с постоянной сжатия $q < 1$. При использовании стандартных приближений $x_k = Ax_{k-1}+f$ с произвольным начальным приближением x_0 имеет место оценка

$$\|x_k - x\| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\,\|x_0 - Ax_0 - f\|.$$

Заметим, что такой оценкой можно воспользоваться в более общей ситуации, когда сжимающим оператором является некоторая степень оператора A. Действительно, пусть q — постоянная сжатия оператора A^m. Уравнение $x = Ax + f$ эквивалентно уравнению

$$x = A^m x + \Big(\sum_{i=0}^{m-1} A^i f\Big).$$

В таком случае упомянутая оценка принимает вид

$$\|x_k - x\| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\Big\|x_0 - A^m x_0 - \Big(\sum_{i=0}^{m-1} A^i f\Big)\Big\|. \tag{3.1}$$

Уточнение полученного приближения $\widetilde{R}(t,s)$ резольвентного ядра $R(t,s)$ может быть получено с помощью итераций

$$R_k(t,\,s) = \int\limits_s^t K(t,\,\tau)\,R_{k-1}(\tau,\,s)\,d\tau + K(t,\,s), \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \quad k=1,2,\dots . \tag{3.2}$$

Для формулировки теоремы об оценке точности приближения резольвентного ядра и, таким образом, приближения для производной матрицы Коши $C_t'(t,\,s)$ определим норму оператора $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ равенством $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big\}$. Обозначим $d=\displaystyle\int_0^T \kappa(t)\,dt$ (см. *условие* $\mathcal{K}$).

Теорема 2. *Пусть m выбрано так, что*

$$\frac{(n\cdot d)^m}{(m-1)!} < 1.$$

Тогда для k-го приближения $R_k(t,s)$ интегрального вольтеррова оператора с ядром $R(t,s)$, получаемого по правилу (3.2) *с* $R_0(t,s) = \widetilde{R}(t,s)$, *имеет место неравенство*

$$\|R - R_k\|_{L^n\to L^n} \leqslant \frac{q^k}{(1-q)}\,\|\,\Delta_{\widetilde{R}}\|_{L^n\to L^n},$$

где

$$\Delta_{\widetilde{R}} = \widetilde{R} - K^m\,\widetilde{R} - \Big(\sum_{i=1}^{m} K^i\Big).$$

Доказательство. Получим сначала оценку нормы m-й степени оператора $K: L^n \to L^n$ — с ядром $K(t,s)$, удовлетворяющим *условию* $\mathcal{K}$. Как известно, K^m — интегральный оператор Вольтерра с ядром $K_m(t,s)$, которое определяется рекуррентным соотношением

$$K_i(t,s) = \int\limits_s^t K(t,\tau)\,K_{i-1}(\tau,s)\,d\tau,\ i=2,\ldots,m,$$

где $K_1(t,s) \equiv K(t,s)$. Из *условия* $\mathcal{K}$ следует оценка

$$\|K_2(t,s)\| \leqslant \int\limits_s^t \|K(t,\tau)\|\,\|K(\tau,s)\|\,d\tau \leqslant u(t)\int\limits_s^t u(\tau)\,d\tau,$$

где $u(t) = n\cdot\kappa(t)$. По индукции получаем

$$\|K_m(t,s)\| \leqslant u(t)\,\frac{\Big[\int_s^t u(\tau)\,d\tau\Big]^{m-1}}{(m-1)!},$$

откуда следует оценка

$$\|\,K^m\,\|_{L^n\to L^n} \leqslant \frac{(n\cdot d)^m}{(m-1)!}.$$

Для завершения доказательства остается сослаться на оценку (3.1). □

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример. Рассмотрим задачу Коши $\dot{x}(t) = p(t)x[h(t)] + 1,\ t\in[0,1],\ \ x(0)=0$.

Здесь $p(t) = \sin(t)$, $h(t) = t^2\,\chi_{[0,\,0.6]}(t) + 0.4\,\chi_{(0.6,\,0.8]}(t) + t^2\,\chi_{(0.8,\,1]}(t), \chi_S(t)$ — характеристическая функция множества $S\subset R$. Запишем уравнение в форме (1.1):

$$\dot{x}(t) - \int\limits_0^t p(t)\chi^h(t,s)\,\dot{x}(s)\,ds + \chi(t,0)x(0) = 1,\quad t\in[0,\,1],$$

где $\chi^h(t,s)$ — характеристическая функция множества $\{(t,s)\in[0,1]\times[0,\,1] : 0\leqslant s\leqslant h(t)\leqslant 1\}$. Разбивая отрезок $[0,\,1]$ на 10 равных частей и аппроксимируя функцию $h(t)$ кусочно-постоянной функцией

$$\widetilde{h}(t) = 0\cdot\eta_1(t) + 0\cdot\eta_2(t) + 0\cdot\eta_3(t) + 0.1\cdot\eta_4(t) + 0.2\cdot\eta_5(t) + 0.3\cdot\eta_6(t)$$

$$+\,0.4\cdot\eta_7(t) + 0.4\cdot\eta_8(t) + 0.7\cdot\eta_9(t) + 0.9\cdot\eta_{10}(t),$$

получаем для ядра $\widetilde{K}(t,s) = p(t)\chi^{\widetilde{h}}(t,s)$ представление (2.1). Далее описанным способом находится резольвентное ядро (2.8). При этом матрица H, определяющая конструкцию резольвентного ядра по элементам исходного ядра (2.1), имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
.004996 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
.004996 & .014938 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
.004996 & .014938 & .024730 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
.005167 & .014938 & .024730 & .034275 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\
.005167 & .014937 & .024730 & .034275 & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\
.005958 & .017271 & .027518 & .036349 & .043478 & .052247 & .060493 & 0. & 1. & 0. \\
.006757 & .019586 & .0312697 & .041414 & .046743 & .056170 & .065036 & .068135 & .075097 & 1.
\end{pmatrix}.$$

Численные значения приведены с точностью до 10^{-6}. Используя это ядро, находим приближение производной решения рассматриваемой задачи. Для характеристики точности этого приближения приведем оценку невязки, возникающей при подстановке приближения в уравнение, по норме пространства L^1: она не превосходит значения 0.03447. Следующее приближение получаем, используя итерационную процедуру. Для него та же характеристика не превосходит значения 0.00163. Для сравнения заметим, что стандартное начальное приближение (свободный член уравнения) дает невязку с оценкой по норме пространства L^1 со значением 0.19444, а для следующего приближения такая оценка составляет 0.02192.

В заключение отметим, что полученные соотношения для приближенного построения матрицы Коши могут быть использованы для описанного в [13] класса функционально-дифференциальных систем с непрерывным и дискретным временем (гибридных систем). Предложенный в этой работе способ сведения гибридной системы к системе с непрерывным временем позволяет получать представление решений гибридной системы с использованием матрицы Коши функционально-дифференциальной системы вида (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М: Наука, 1985. 520 с.
2. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
3. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2002. 384 с.
4. **Максимов В.П.** О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.
5. **Максимов В.П.** Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. 306 с.
6. **Chadov A.L., Maksimov V.P.** Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 49–62.
7. **Тышкевич В.А.** Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1981. 80 с.
8. **Maksimov V.P.** On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16, no. 3. P. 517–527.
9. **Maksimov V.P., Munembe J.S.P.** On the question of enclosing solutions of linear functional differential systems // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1997. Vol. 12. P. 149–156.

10. **Симонов П.М.** Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. 2014. № 1. С. 14–27.
11. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов. М: Мир, 1983. 432 с.
12. **Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.** Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
13. **Maksimov V.P.** On a class of optimal control problems for functional differential systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. Vol. 305, suppl. 1. P. 114–124. doi: 10.1134/S0081543819040126 .

Поступила 23.04.2019
После доработки 4.06.2019
Принята к публикации 10.06.2019

Максимов Владимир Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Пермский государственный национальный исследовательский университет
г. Пермь
e-mail: maksimov@econ.psu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* Advanced Ser. in Mathematical Science and Engineering, 3. Atlanta: World Federation Publ., 1995, 172 p. ISBN: 1-885978-02-2 . Original Russian text published in Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Nauka Publ., 1991, 280 p.
3. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya.* [Elements of the contemporary theory of functional differential equations. Methods and applications]. Moscow: Institute of Computer Science, 2002, 384 p. ISBN: 5-93972-112-5 .
4. Maksimov V.P. The Cauchy formula for a functional–differential equation. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 405–409.
5. Maksimov V.P. *Voprosy obshchei teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [Questions of the general theory of functional differential equations]. Perm: Perm State University, 2003, 306 p.
6. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times. *Functional Differential Equations*, 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 49–62.
7. Tyshkevich V.A. *Nekotorye voprosy teorii ustoichivosti funktsional'no–differentsial'nykh uravnenii.* [Some questions of the theory of stability of functional–differential equations]. Kiev: Naukova Dumka, 1981, 80 p.
8. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functionals. *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 517–527.
9. Maksimov V.P., Munembe J.S.P. On the question of enclosing solutions of linear functional differential systems. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 1997, vol. 12, pp. 149–156.
10. Simonov P.M. On a research method of dynamic models of macroeconomics. *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Ekonomika.*, 2014, no. 1, pp. 14–27 (in Russian).
11. Hutson V., Pym J.S. *Applications of functional analysis and operator theory.* Mathematics in Science and Engineering, vol. 146. London etc.: Academic Press, 1980, 389 p. ISBN: 978-0-12-363260-9 . Translated to Russian under the title *Prilozheniya funktsional'nogo analiza i teorii operatorov.* Moscow: Mir Publ., 1983, 432 p.
12. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Approximate solution of operator equations.* Dordrecht: Springer, 1972, 484 p. doi: 10.1007/978-94-010-2715-1 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii.* Moscow: Nauka Publ., 1969, 456 p.

13. Maksimov V.P. On a class of optimal control problems for functional differential systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. 114–124. doi: 10.1134/S0081543819040126 .

Received April 23, 2019
Revised June 4, 2019
Accepted June 10, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332).

Vladimir Petrovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Perm State University, Perm, 614990 Russia, e-mail: maksimov@econ.psu.ru .

Cite this article as: V. P. Maksimov. On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 153–162 .