ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.518.224

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ОТРЕЗКЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВАРИАЦИЮ[1]

А. А. Васильева

В работе исследуется задача о колмогоровских поперечниках в пространстве $L_q[0,\,1]$ классов Липшица на отрезке с фиксированными значениями в нескольких точках: $\tilde M = \{f \in AC[0,\,1],\ \|\dot f\|_\infty \le 1,\ f(j/s) = y_j,\ 0 \le j \le s\}$. Из известных результатов о поперечниках классов Соболева легко получить порядковые оценки с точностью до констант, зависящих от q и $y_1, \ldots, y_n$. Здесь получены порядковые оценки с точностью до констант, зависящих только от q. Задача сводится к оценке поперечников пересечения двух конечномерных множеств: куба и произведения октаэдров с некоторыми весами. Если заменить куб на шар пространства l_p^n, то получается дискретизация задачи о поперечнике пересечения класса Соболева и класса функций с ограничениями на вариацию: $M = \{f \in AC[0,\,1] \colon \|\dot f\|_{L_p[0,\,1]} \le 1, \|\dot f\|_{L_1[(j-1)/s,\ j/s]} \le \varepsilon_j/s,\ \ 1 \le j \le s\}$. Для достаточно больших n получены порядковые оценки поперечников этих классов с точностью до констант, зависящих только от p и q. Оказывается, что если $p > q$ или $p > 2$, то эти оценки имеют вид $\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)n^{-1}$, где $\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \to 0$ при $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \to 0$ (явные формулы для φ приведены в тексте статьи). Если $p \le 2$ и $p \le q$, то оценки имеют вид n^{-1} (то есть ограничения на вариацию оценку поперечников при больших n не улучшают). Для доказательства оценок сверху используется результат Э. М. Галеева о пересечении конечномерных шаров. Для доказательства оценок снизу обобщается результат Е.Д. Глускина о поперечнике пересечения куба и октаэдра.

Ключевые слова: поперечники по Колмогорову, классы Соболева, интерполяционные классы.

A. A. Vasil'eva. Kolmogorov widths of Sobolev classes on a closed interval with constraints on the variation.

We study the problem of estimating Kolmogorov widths in $L_q[0,\,1]$ for the Lipschitz classes of functions with fixed values at several points: $\tilde M = \{f \in AC[0,\,1],\ \|\dot f\|_\infty \le 1,\ f(j/s) = y_j,\ 0 \le j \le s\}$. Applying well-known results about the widths of Sobolev classes, it is easy to obtain order estimates up to constants depending on q and $y_1, \ldots, y_n$. Here we obtain order estimates up to constants depending only on q. To this end, we estimate the widths of the intersection of two finite-dimensional sets: a cube and a weighted Cartesian product of octahedra. If we take the unit ball of l_p^n instead of the cube, we get a discretization of the problem on estimating the widths of the intersection of the Sobolev class and the class of functions with constraints on their variation: $M = \{f \in AC[0,\,1] :\ \|\dot f\|_{L_p[0,\,1]} \le 1,\ \|\dot f\|_{L_1[(j-1)/s,\, j/s]} \le \varepsilon_j/s,\ 1 \le j \le s\}$. For sufficiently large n, order estimates are obtained for the widths of these classes up to constants depending only on p and q. If $p > q$ or $p > 2$, then these estimates have the form $\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)n^{-1}$, where $\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \to 0$ as $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \to 0$ (explicit formulas for φ are given in the paper). If $p \le q$ and $p \le 2$, then the estimates have the form n^{-1} (hence, the constraints on the variation do not improve the estimate for the widths). The upper estimates are proved with the use of Galeev's result on the intersection of finite-dimensional balls, whereas the proof of the lower estimates is based on a generalization of Gluskin's result on the width of the intersection of a cube and an octahedron.

Keywords: Kolmogorov widths, Sobolev classes, interpolation classes.

MSC: 41A46

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-48-66

Введение

В работе [1] изучалась задача о непустоте множества функций $M_0 = \{f \in C^1[a,\,b] \colon f_1(t) \le f(t) \le f_2(t),\ \ g_1(t) \le \dot f(t) \le g_2(t)\}$, где $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2 : [a,\,b] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Позже И. Г. Царьковым была поставлена задача об оценках колмогоровских поперечников таких классов функций в пространстве Лебега. Здесь эта задача будет исследоваться в частном случае:

$$M_0 = \left\{ f \in C^1[0,\,1] \colon \forall t \in [0,\,1]\ \ |\dot f(t)| \le 1,\ \ f\left(\frac{j}{s}\right) = y_j,\ \ 0 \le j \le s \right\},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332).

где $y_0, \ldots, y_s$ — заданные числа. Напомним, что колмогоровский поперечник порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ подмножества в линейном нормированном пространстве X определяется как

$$d_n(C,\, X) = \inf_{L\in\mathcal{L}_n(X)} \sup_{x\in C} \inf_{y\in L} \|x-y\|,$$

где $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность подпространств в X размерности не выше n (см. [2–4]).

Если класс M_0 непуст и не состоит из одной функции, то из оценок поперечников классов липшицевых функций следует, что

$$Cn^{-1} \le d_n(M_0,\, L_q[0,\,1]) \le n^{-1},$$

где $C > 0$ зависит от $y_0, \ldots, y_s$. Здесь будут получены при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ порядковые оценки поперечников $d_n(M_0,\, L_q[0,\,1])$ с точностью до констант, не зависящих от $y_0, \ldots, y_s$.

Отметим, что у множества

$$\tilde{M} = \left\{f \in AC[0,\,1]\colon |\dot f(t)| \le 1 \text{ п.в.},\quad f\left(\frac{j}{s}\right) = y_j,\quad 0 \le j \le s\right\} \tag{0.1}$$

поперечники будут такими же, как у M_0.

С помощью метода дискретизации задача сводится к оценке поперечников пересечения конечномерных шаров: шара в l_∞^N с некоторым весом и декартова произведения многомерных октаэдров разных размеров (подробнее об этом будет сказано в следующем разделе). Задача об оценке поперечников пересечений и произведений конечномерных шаров изучалась в работах Э. М. Галеева [5–8], Е. Д. Глускина [9], А. Д. Изаака [10; 11], Ю. В. Малыхина, К. С. Рютина [12] и др.

Если вместо шара в весовом l_∞^N рассмотреть шар в весовом l_p^N, то получится задача, возникающая при дискретизации задачи об оценке поперечника класса

$$M = \left\{f \in AC[0,\,1]\colon \|\dot f\|_{L_p[0,\,1]} \le 1,\quad \|\dot f\|_{L_1[\frac{j-1}{s},\ \frac{j}{s}]} \le \frac{\varepsilon_j}{s},\quad 1 \le j \le s\right\}, \tag{0.2}$$

где $\varepsilon_j \in [0,\,1]$, $1 \le j \le n$, — некоторые заданные числа.

В данной работе будут получены при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ порядковые оценки колмогоровских поперечников классов M и $\tilde{M}$ в пространстве $L_q[0,\,1]$ с точностью до мультипликативных констант, зависящих только от p и q.

Мы будем использовать следующее обозначение для порядковых неравенств. Пусть X, Y — множества, $f_1,\, f_2\colon X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Обозначим $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$ (или $f_2(x,\, y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x,\, y)$), если для любого $y \in Y$ существует $c(y) > 0$ такое, что $f_1(x,\, y) \le c(y) f_2(x,\, y)$ для любого $x \in X$; $f_1(x,\, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x,\, y)$, если $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$ и $f_2(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x,\, y)$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_j \in [0,\,1]$, $1 \le j \le s$.*

1. *Пусть $p > 2$, $q \ge 2$. Положим $\theta = \frac{q+2}{q}\frac{p-1}{p-2}$. Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$*

$$d_n(M,\, L_q[0,\,1]) \underset{p,q}{\asymp} n^{-1}\Bigl(\sum_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-2}{2(p-1)}}.$$

Пусть $p > q$, $q < 2$. Положим $\theta = \frac{q(p-1)}{p-q}$. Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(M,\, L_q[0,\,1]) \underset{p,q}{\asymp} n^{-1}\Bigl(\sum_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-q}{q(p-1)}}.$$

2. *Пусть* $p \le q$, $p \le 2$. *Тогда при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(M,\, L_q[0,\,1]) \underset{p,q}{\asymp} n^{-\max\left\{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p},\, 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right\}}.$$

Теперь рассмотрим класс $\tilde{M}$. Его непустота равносильна условию $|y_j - y_{j-1}| \le \dfrac{1}{s}$, $1 \le j \le s$. Положим

$$\varepsilon_j = 1 - s|y_j - y_{j-1}|. \tag{0.3}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_j \in [0,\,1]$ *заданы формулой* (0.3), $1 \le j \le s$. *Положим* $\theta = \dfrac{q+2}{q}$ *при* $q \ge 2$, $\theta = q$ *при* $q < 2$. *Тогда*

$$d_n(\tilde{M},\, L_q[0,\,1]) \underset{q}{\asymp} \begin{cases} n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{\frac{\theta+1}{2}}, & q \ge 2, \\ n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{\frac{\theta+1}{q}}, & q < 2. \end{cases}$$

В разд. 2 задачи о поперечниках классов M и $\tilde{M}$ с помощью метода дискретизации сводятся к оценкам поперечников конечномерных множеств. В разд. 3 доказываются оценки сверху поперечников этих множеств. В разд. 4 доказываются оценки снизу.

1. Дискретизация задач

Через l_p^ν обозначаем пространство $\mathbb{R}^\nu$ с нормой

$$\|(x_1,\, \dots,\, x_\nu)\|_{l_p^\nu}^p = \sum_{i=1}^{\nu} |x_i|^p.$$

Сначала рассмотрим задачу об оценке поперечников класса M.

Пусть $\nu_j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le s$ (их мы подберем позже), $m \in \mathbb{Z}_+$. Разобьем каждый из отрезков $\big[\frac{j-1}{s},\, \frac{j}{s}\big]$ на $2^m\nu_j$ одинаковых отрезков $\Delta_{j,i}^m = [t_{i-1,j}^m,\, t_{i,j}^m]$, $1 \le i \le 2^m\nu_j$. Определим функции $\varphi_{i,j}^m$ по формуле

$$\varphi_{i,j}^m = \varkappa_j^m \max\Big\{\frac{t_{i,j}^m - t_{i-1,j}^m}{2} - \Big|t - \frac{t_{i-1,j}^m + t_{i,j}^m}{2}\Big|,\, 0\Big\},$$

где $\varkappa_j^m > 0$ выбирается так, что $\|\varphi_{i,j}^m\|_{L_q[0,\,1]} = 1$. Тогда

$$\varphi_{i,j}^m\Big(\frac{t_{i-1,j}^m + t_{i,j}^m}{2}\Big) \underset{q}{\asymp} (2^m s\nu_j)^{1/q}, \tag{1.1}$$

и для любых $c_{j,i} \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le s$, $1 \le i \le 2^m\nu_j$, выполнено

$$\Big\|\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} c_{j,i}\varphi_{i,j}^m\Big\|_{L_q[0,\,1]} = \Big(\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c_{j,i}|^q\Big)^{1/q}. \tag{1.2}$$

Дискретизация для оценки сверху. Отметим, что достаточно рассмотреть случаи 1 и 2 в теореме 1, так как при $p \le q$, $p \le 2$ оценка сверху следует из оценок поперечников классов Соболева в $L_q[0,\,1]$, полученных в [13; 14]. Пусть $f \in M$. Через $P_m f$ обозначим кусочно-линейную функцию такую, что $P_m f(t_{i,j}^m) = f(t_{i,j}^m)$, $1 \le j \le s$, $0 \le i \le 2^m\nu_j$. Тогда

$$f = P_0 f + \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} (P_{m+1}f - P_m f) \tag{1.3}$$

(ряд сходится равномерно). Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j s)^p \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} \|P_{m+1}f-P_mf\|^p_{L_p(\Delta^m_{j,i})} \underset{p}{\lesssim} 1, \quad f\in M. \tag{1.4}$$

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}\int\limits_{\Delta^m_{j,i}} |P_{m+1}f(t)-P_mf(t)|^p\,dt \underset{p}{\lesssim} \sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|\Delta^m_{j,i}|^p\|\dot f\|^p_{L_p(\Delta^m_{j,i})} = \frac{1}{(2^m\nu_j s)^p}\int\limits_{(j-1)/s}^{j/s}|\dot f|^p\,dt.$$

Умножим эти неравенства на $(2^m\nu_j s)^p$ и просуммируем по j; так как $\int_0^1 |\dot f|^p\,dt \overset{(0.2)}{\le} 1$, то получим (1.4).

Отметим, что существуют числа $c^m_{j,i}$ такие, что

$$P_{m+1}f-P_mf=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} c^m_{j,i}\varphi^m_{i,j}. \tag{1.5}$$

Так как у функций $\varphi^m_{i,j}$ носители не перекрываются, то из (1.4), (1.5) следует, что

$$\sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j s)^p \sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|c^m_{j,i}|^p\|\varphi^m_{i,j}\|^p_{L_p(\Delta^m_{j,i})} \underset{p}{\lesssim} 1.$$

Так как $\|\varphi^m_{i,j}\|_{L_p(\Delta^m_{j,i})} \underset{p}{\asymp} |\Delta^m_{j,i}|^{1/p}\|\varphi^m_{i,j}\|_{C(\Delta^m_{j,i})} \underset{p,q}{\overset{(1.1)}{\asymp}} (2^m s\nu_j)^{\frac1q-\frac1p}$, то для $f\in M$ выполнено

$$\sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j s)^{\left(1+\frac1q-\frac1p\right)p}\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|c^m_{j,i}|^p \underset{p,q}{\lesssim} 1. \tag{1.6}$$

Положим $\tau^m_{i,j}=\dfrac{t^m_{i-1,j}+t^m_{i,j}}{2}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}\left(|f(t^m_{i-1,j})-f(\tau^m_{i,j})|+|f(\tau^m_{i,j})-f(t^m_{i,j})|\right) \le \sum_{i=1}^{2^m\nu_j}\int\limits_{t^m_{i-1,j}}^{t^m_{i,j}}|\dot f(t)|\,dt \overset{(0.2)}{\le} \frac{\varepsilon_j}{s}.$$

Для $t\in\Delta^m_{j,i}$ выполнено $P_{m+1}f(t) \overset{(1.5)}{=} P_mf(t)+c^m_{j,i}\varphi^m_{i,j}(t)$. Поэтому

$$|c^m_{j,i}\varphi^m_{i,j}(\tau^m_{i,j})| = |P_{m+1}f(\tau^m_{i,j})-P_mf(\tau^m_{i,j})| = \left|P_{m+1}f(\tau^m_{i,j})-\frac{P_mf(t^m_{i-1,j})+P_mf(t^m_{i,j})}{2}\right|$$
$$\le |f(t^m_{i-1,j})-f(\tau^m_{i,j})|+|f(\tau^m_{i,j})-f(t^m_{i,j})|.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|c^m_{j,i}|\cdot|\varphi^m_{i,j}(\tau^m_{i,j})| \le \frac{\varepsilon_j}{s}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|c^m_{j,i}| \underset{q}{\overset{(1.1)}{\lesssim}} \frac{\varepsilon_j}{s}\frac{1}{(2^m\nu_j s)^{1/q}}. \tag{1.7}$$

Пусть $N_m = \sum_{j=1}^s 2^m\nu_j$, $V_m \subset \mathbb{R}^{N_m}$ — множество последовательностей $(c^m_{j,i})_{1\le j\le s, 1\le i\le 2^m\nu_j}$, удовлетворяющих

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^s (2^m\nu_j s)^{\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)p} \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}|^p \le 1,\\ \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}| \le \frac{\varepsilon_j}{s}\,\frac{1}{(2^m\nu_j s)^{1/q}}, \quad 1\le j\le s.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Пусть $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$. Применяя аналог метода дискретизации В. Е. Майорова [16] и учитывая (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7), получаем

$$d_{2n+1}(M,\, L_q[0,\,1]) \underset{p,q}{\lesssim} \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m,\, l_q^{N_m}),$$

где $k(m)\in\mathbb{Z}_+$, $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} k(m)\le n$. Тем самым, для оценки сверху в теореме 1 достаточно подобрать числа ν_j и $k(m)$ так, чтобы $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$, $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} k(m)\le n$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m,\, l_q^{N_m}) \underset{p,q}{\lesssim} \begin{cases} n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-2}{2(p-1)}}, & p>2,\ q\ge 2,\\ n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-q}{q(p-1)}}, & p>q,\ q<2,\end{cases} \tag{1.9}$$

где

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{q+2}{q}\,\dfrac{p-1}{p-2}, & p>2,\ q\ge 2,\\ \dfrac{q(p-1)}{p-q}, & p>q,\ q<2.\end{cases} \tag{1.10}$$

Это будет сделано в разд. 3.

Дискретизация для оценки снизу. Пусть $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$, $V\subset\mathbb{R}^n$ — пространство последовательностей $(c_{j,i})_{1\le j\le s,1\le i\le \nu_j}$ таких, что

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^s (\nu_j s)^{\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)p} \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}|^p \le 1,\\ \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}| \le \frac{\varepsilon_j}{s}\,\frac{1}{(\nu_j s)^{1/q}}, \quad 1\le j\le s.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Пусть $f = \sum_{j=1}^s\sum_{i=1}^{\nu_j} c_{j,i}\varphi^0_{i,j}$, $(c_{j,i})_{1\le j\le s,1\le i\le\nu_j}\in V$. Отметим, что при п.в. $t\in\Delta^0_{i,j}$ выполнено $|\dot\varphi^0_{i,j}(t)| \overset{(1.1)}{\underset{q}{\asymp}} (s\nu_j)^{1+\frac{1}{q}}$. Значит,

$$\|\dot f\|^p_{L_p[0,\,1]} = \sum_{j=1}^s\sum_{i=1}^{\nu_j}\int\limits_{\Delta^0_{i,j}} |c_{j,i}|^p|\dot\varphi^0_{i,j}(t)|^p\,dt \underset{p,q}{\asymp} \sum_{j=1}^s\sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}|^p(s\nu_j)^{\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)p} \overset{(1.11)}{\le} 1,$$

$$\|\dot f\|_{L_1\left[\frac{j-1}{s},\,\frac{j}{s}\right]} = \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}| \int\limits_{\Delta^0_{i,j}} |\dot\varphi^0_{i,j}(t)|\,dt \underset{q}{\asymp} \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}|(s\nu_j)^{1/q} \overset{(1.11)}{\le} \frac{\varepsilon_j}{s}, \quad 1\le j\le s.$$

Следовательно, существует $a(p,q)>0$ такое, что $a(p,q)f \overset{(0.2)}{\in} M$.

В силу (1.2)

$$\Big\|\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{\nu_j} c_{j,i}\varphi^0_{i,j}\Big\|_{L_q[0,1]} = \|(c_{i,j})_{1\le j\le s,\,1\le i\le \nu_j}\|_{l_q^n}.$$

Рассуждая так же, как в [16], получаем, что $d_{[n/2]}(M,\, L_q[0,\,1]) \underset{p,q}{\gtrsim} d_{[n/2]}(V,\, l_q^n)$. Поэтому достаточно показать, что

$$d_{[n/2]}(V,\, l_q^n) \underset{p,q}{\gtrsim} \begin{cases} n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-2}{2(p-1)}}, & p>2,\ q\ge 2,\\ n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-q}{q(p-1)}}, & p>q,\ q\le 2,\\ n^{-\max\{1+1/q-1/p,\ 1+1/2-1/p\}}, & p\le q,\ p\le 2,\end{cases} \tag{1.12}$$

где θ задано формулой (1.10). Это будет сделано в разд. 4.

Теперь рассмотрим класс $\tilde M$.

Дискретизация для оценки сверху. Операторы P_m определяем так же, как и раньше. Аналогично соотношению (1.4) доказывается, что для $f\in \tilde M$

$$\max_{1\le j\le s} 2^m\nu_j s\|P_{m+1}f-P_mf\|_{L_\infty(\Delta^m_{j,i})} \lesssim 1.$$

Формула (1.5) в этом случае тоже верна, откуда получаем аналог (1.6)

$$\max_{1\le j\le s}(2^m\nu_j s)^{1+\frac1q}\max_{1\le i\le 2^m\nu_j}|c^m_{j,i}| \underset{q}{\lesssim} 1. \tag{1.13}$$

Напомним, что ε_j заданы формулой (0.3).

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|c^m_{j,i}| \underset{q}{\lesssim} \frac{\varepsilon_j}{s}\,\frac{1}{(2^m\nu_j s)^{1/q}}. \tag{1.14}$$

Пусть $|f(t^m_{i,j})-f(t^m_{i-1,j})| = \dfrac{1-\alpha^m_{i,j}}{2^m\nu_j s}$, $\alpha^m_{i,j}\in[0,\,1]$. Тогда

$$|c^m_{j,i}|\cdot|\varphi^m(\tau^m_{i,j})| = |P_{m+1}f(\tau^m_{i,j})-P_mf(\tau^m_{i,j})| = \Big|f(\tau^m_{i,j}) - \frac{f(t^m_{i,j})+f(t^m_{i-1,j})}{2}\Big| \lesssim \frac{\alpha^m_{i,j}}{2^m\nu_j s}.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|c^m_{j,i}|\cdot|\varphi^m_{i,j}(\tau^m_{i,j})| \underset{q}{\lesssim} \sum_{i=1}^{2^m\nu_j}\frac{\alpha^m_{i,j}}{2^m\nu_j s}. \tag{1.15}$$

Далее,

$$\frac1s(1-\varepsilon_j) \overset{(0.3)}{=} |y_j-y_{j-1}| \le \sum_{i=1}^{2^m\nu_j}|f(t^m_{i,j})-f(t^m_{i-1,j})| = \sum_{i=1}^{2^m\nu_j}(2^m\nu_j s)^{-1}(1-\alpha^m_{i,j}) = \frac1s - (2^m\nu_j s)^{-1}\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}\alpha^m_{i,j},$$

поэтому $\sum_{i=1}^{2^m\nu_j}(2^m\nu_j s)^{-1}\alpha^m_{i,j} \le \dfrac{\varepsilon_j}{s}$. Отсюда и из (1.1), (1.15) получаем (1.14).

Пусть V_m — множество последовательностей $(c^m_{j,i})_{1\le j\le s,\,1\le i\le 2^m\nu_j}$ таких, что

$$\max_{1\le j\le s}(2^m\nu_j s)^{1+\frac1q}\max_{1\le i\le 2^m\nu_j}|c^m_{j,i}| \le 1,$$

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}| \underset{q}{\lesssim} \frac{\varepsilon_j}{s}\,\frac{1}{(2^m\nu_j s)^{1/q}}, \quad 1\le j\le s.$$

Рассуждая, как в [16], получаем, что достаточно показать, что найдутся числа $\nu_j\in\mathbb{N}$, $k(m)\in\mathbb{Z}_+$ такие, что $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$, $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} k(m) = n$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m,\, l_q^{2^m n}) \underset{q}{\lesssim} \begin{cases} n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{\frac{\theta+1}{2}}, & q\ge 2,\\ n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{\frac{\theta+1}{q}}, & q<2,\end{cases}$$

где

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{q+2}{q}, & q\ge 2,\\ q, & q<2.\end{cases} \tag{1.16}$$

Эта оценка будет получена в разд. 3.

Дискретизация для оценки снизу. Пусть Λ — пространство непрерывных кусочно-линейных функций с узлами в $t^0_{i,j}$, $1\le j\le s$, $1\le i\le \nu_j$. Тогда $\dim\Lambda = n+1$ и

$$d_{2n+1}(\tilde M+\Lambda,\, L_q[0,\,1]) \le d_n(\tilde M,\, L_q[0,\,1]).$$

Оценим снизу левую часть этого неравенства.

Положим $k_j = [\varepsilon_j\nu_j]$, $1\le j\le s$, $I_j\subset\{1,\,\dots,\,\nu_j\}$ — подмножество мощности k_j,

$$\mathcal{N}_{i,j} = \{\lambda\in\overline{1,\,4\nu_j}\colon \Delta^2_{\lambda,j}\subset\Delta^0_{i,j}\}.$$

Покажем, что существует $a(q)>0$ такое, что для любых $z_{\lambda,i,j}\in\{1,\,-1\}$, $\lambda\in\mathcal{N}_{i,j}$, выполнено

$$\varphi = a(q)\sum_{j=1}^s\sum_{i\in I_j}\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_{i,j}} \frac{z_{\lambda,i,j}}{(4s\nu_j)^{1+\frac1q}}\varphi^2_{\lambda,j} \in \tilde M+\Lambda. \tag{1.17}$$

В самом деле, $\Big|\dfrac{\dot\varphi^2_{\lambda,j}(t)}{(4s\nu_j)^{1+\frac1q}}\Big| \overset{(1.1)}{\underset{q}{\lesssim}} 1$ п.в., поэтому найдется такое $a(q)>0$, что $|\dot\varphi(t)|\le 1$ п.в. Пусть f — кусочно-линейная непрерывная функция, $f(0)=y_0$, $\dot f|_{[t^0_{i-1,j},\,t^0_{i,j}]} = 0$, $i\in I_j$,

$$\dot f|_{[t^0_{i-1,j},\,t^0_{i,j}]} = \frac{y_j-y_{j-1}}{\nu_j-k_j}\,\nu_j s, \quad i\notin I_j.$$

Тогда $f\in\Lambda$. Далее, $|\dot f(t)| \overset{(0.3)}{\le} 1$ и $f(t_j)=y_j$, $1\le j\le s$. Наконец, носители у $\dot\varphi$ и $\dot f$ не перекрываются. Значит, $f+\varphi\in\tilde M$, откуда $\varphi = (f+\varphi)-f\in\tilde M+\Lambda$.

В $\mathbb{R}^{4n}$ координаты занумеруем двойными индексами $(j,\,\lambda)$, где $1\le j\le s$, $1\le\lambda\le 4\nu_j$. Пусть $e_{j,\lambda}$ — вектор, у которого на месте $(j,\,\lambda)$ стоит 1, а на остальных местах нули,

$$V = \operatorname{conv}\Big\{\sum_{j=1}^s\sum_{i\in I_j}\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_{i,j}} \frac{z_{\lambda,i,j}}{(4s\nu_j)^{1+\frac1q}}e_{j,\lambda}\colon z_{\lambda,i,j}=\pm1,\quad I_j\subset\overline{1,\,\nu_j},\quad |I_j|=k_j\Big\},$$

где conv обозначает выпуклую оболочку. Достаточно показать, что существуют $\nu_j\in\mathbb{N}$ такие, что $\sum_{j=1}^s\nu_j = n$,

$$d_{2n+1}(V,\, l_q^{4n}) \underset{q}{\gtrsim} \begin{cases} n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{\frac{\theta+1}{2}}, & q\ge 2,\\ n^{-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{\frac{\theta+1}{q}}, & q<2,\end{cases}$$

где θ задано формулой (1.16).

2. Оценки сверху поперечников конечномерных множеств

Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_j > 0$, $1 \le j \le s$.

Через B_p^ν обозначим единичный шар в пространстве l_p^ν.

Для чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 \le p \le \infty$ положим $Bl^\nu(1/p,\, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^\nu \colon \|x\|_{l_p^\nu} \le \nu^{-\alpha}\}$. Пусть $K \subset [0,\, 1] \times \mathbb{R}$ — компакт. Положим $Bl^\nu(K) = \cap_{(1/p,\,\alpha) \in K} Bl^\nu(1/p,\, \alpha)$, $G(K) = \operatorname{conv} K + \operatorname{cone}\{(-1,\, 0),\, (1,\, -1)\}$, где cone обозначает коническую оболочку. Э. М. Галеевым [5, теорема 2] был получен следующий результат. *Пусть K_1, $K_2 \subset [0,\, 1] \times \mathbb{R}$ — компакты. Тогда $Bl^\nu(K_1) \subset Bl^\nu(K_2)$ тогда и только тогда, когда $G(K_2) \subset G(K_1)$.*

Из этой теоремы следует, что если $(1/q,\, \beta) \in [(1/p,\, \gamma),\, (1,\, \alpha)]$, то $Bl^\nu(1/p,\, \gamma) \cap Bl^\nu(1,\, \alpha) \subset Bl^\nu(1/q,\, \beta)$.

Следствие 1. *Пусть $p > 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Положим*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^\nu \colon \|x\|_{l_p^\nu} \le \nu^{-\gamma},\ \|x\|_{l_1^\nu} \le \varepsilon\nu\}.$$

1. *Пусть $p > 2$. Тогда $E \subset \nu^{\frac{p-2}{2(p-1)} - \gamma\frac{p}{2(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-2}{2(p-1)}} B_2^\nu$.*

2. *Пусть $1 < q \le 2$, $p > q$. Тогда $E \subset \nu^{\frac{p-q}{q(p-1)} - \gamma\frac{p(q-1)}{q(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-q}{q(p-1)}} B_q^\nu$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon\nu = \nu^{-\alpha}$. В случае $p > 2$ выполнено включение $E \subset \nu^{-\beta} B_2^\nu$, где β находится из условий

$$\frac{\lambda}{p} + 1 - \lambda = \frac{1}{2}, \quad \lambda\gamma + (1-\lambda)\alpha = \beta.$$

Тогда $\lambda = \dfrac{p}{2(p-1)}$, $1 - \lambda = \dfrac{p-2}{2(p-1)}$,

$$\nu^{-\beta} = \nu^{-\lambda\gamma - (1-\lambda)\alpha} = \nu^{1-\lambda-\lambda\gamma}\varepsilon^{1-\lambda} = \nu^{\frac{p-2}{2(p-1)} - \gamma\frac{p}{2(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-2}{2(p-1)}}.$$

В случае $1 < q \le 2$, $p > q$ имеем $E \subset \nu^{-\beta} B_q^\nu$, где β находится из условий

$$\frac{\lambda}{p} + 1 - \lambda = \frac{1}{q}, \quad \lambda\gamma + (1-\lambda)\alpha = \beta.$$

Тогда $\lambda = \dfrac{1 - 1/q}{1 - 1/p}$, $1 - \lambda = \dfrac{1/q - 1/p}{1 - 1/p}$,

$$\nu^{-\beta} = \nu^{-\frac{1-\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{p}}\gamma} (\varepsilon\nu)^{\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}} = \varepsilon^{\frac{p-q}{q(p-1)}} \nu^{-\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\gamma + \frac{p-q}{q(p-1)}}.$$

Следствие доказано.

Перейдем к задаче оценки поперечников множеств V_m, определенных в предыдущем разделе.

Случай $p > 2$, $q \ge 2$. Оценим сверху по порядку радиус евклидова шара, содержащего V_m. Полученную величину минимизируем по $(\nu_j)_{j=1}^s$ (задача минимизации окажется одной и той же для всех m). Считаем, что $\nu_j \ge 2$.

Сначала рассмотрим задачу для множества M.

Перепишем условие (1.8) в виде

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^s (2^m\nu_j s)^{(1+\frac{1}{q})p} (2^m\nu_j s)^{-1} \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c_{j,i}^m|^p \le 1, \\ \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c_{j,i}^m| \le \frac{\varepsilon_j}{(2^m\nu_j s)^{1+\frac{1}{q}}}\, 2^m\nu_j, \quad 1 \le j \le s. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Фиксируем $1 \le j \le s$. Пусть $\gamma_j \in \mathbb{R}$ таково, что

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}|^p = (2^m\nu_j)^{-\gamma_j p}\,(2^m\nu_j s)^{-(1+\frac{1}{q})p},\\ \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}| \le \varepsilon_j\, 2^m\nu_j\,(2^m\nu_j s)^{-(1+\frac{1}{q})}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Применяя следствие 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}|^2 \le \frac{1}{(2^m\nu_j s)^{2(1+\frac{1}{q})}}(2^m\nu_j)^{\frac{1}{p-1}(p-2-\gamma_j p)}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{p-1}} =: E_j. \tag{2.3}$$

Подставим первое равенство (2.2) в (2.1) и получим

$$\sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j)^{-1-\gamma_j p} \le s. \tag{2.4}$$

Чтобы найти минимальный радиус евклидова шара, содержащего V_m, максимизируем по $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ величину

$$L = L(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) = \sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(2^m\nu_j s)^{2(1+\frac{1}{q})}}(2^m\nu_j)^{\frac{1}{p-1}(p-2-\gamma_j p)}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{p-1}}$$

при условии, что выполнено (2.4).

Положив $\sigma_j = (2^m\nu_j)^{-1-\gamma_j p}$, получаем

$$L = \sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j s)^{-2\left(1+\frac{1}{q}\right)+1}\sigma_j^{\frac{1}{p-1}}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{p-1}}\cdot\frac{1}{s} = \sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j s)^{-1-\frac{2}{q}}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{p-1}}\sigma_j^{\frac{1}{p-1}}\cdot\frac{1}{s}.$$

Пусть $\tau_j = \sigma_j^{\frac{1}{p-1}}$, $a_j = (2^m\nu_j s)^{-1-\frac{2}{q}}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{p-1}}\,\frac{1}{s}$. Тогда задача минимизации $L(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ при условии (2.4) эквивалентна следующей:

$$\sum_{j=1}^{s} a_j\tau_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{s}\tau_j^{p-1} \le s. \tag{2.5}$$

Так как $p > 2$, то в силу неравенства Гёльдера

$$\sum_{j=1}^{s} a_j\tau_j \le \Big(\sum_{j=1}^{s} a_j^{\frac{p-1}{p-2}}\Big)^{\frac{p-2}{p-1}} s^{\frac{1}{p-1}}.$$

Подставив выражения для a_j, получаем, что для радиуса R описанного евклидова шара выполнено

$$R^2 \le \Big(\sum_{j=1}^{s}(2^m\nu_j s)^{-\frac{q+2}{q}\cdot\frac{p-1}{p-2}}\varepsilon_j\Big)^{\frac{p-2}{p-1}} s^{\frac{1}{p-1}-1}. \tag{2.6}$$

Отметим также, что в точке максимума выполнено

$$\tau_j = s^{\frac{1}{p-1}}\frac{a_j^{\frac{1}{p-2}}}{\left(\sum_{k=1}^{s} a_k^{\frac{p-1}{p-2}}\right)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \tau_j = (2^m\nu_j)^{-\frac{1+\gamma_j p}{p-1}}, \quad a_j = (2^m\nu_j s)^{-1-\frac{2}{q}}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{p-1}}\,\frac{1}{s}, \tag{2.7}$$

откуда

$$E_j = a_j\tau_j = s^{\frac{1}{p-1}} \frac{a_j^{\frac{p-1}{p-2}}}{\left(\sum_{k=1}^s a_k^{\frac{p-1}{p-2}}\right)^{\frac{1}{p-1}}} = s^{\frac{1}{p-1}-1-\frac{q+2}{q}} \frac{(2^m\nu_j)^{-\frac{q+2}{q}\cdot\frac{p-1}{p-2}}\varepsilon_j}{\left(\sum_{k=1}^s (2^m\nu_k)^{-\frac{q+2}{q}\cdot\frac{p-1}{p-2}}\varepsilon_k\right)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{2.8}$$

Итак, при фиксированных $\nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathbb{N}$ таких, что $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$, множество V_m содержится в евклидовом шаре радиуса R, удовлетворяющего (2.6). Минимизируем правую часть (2.6) по ν_j (отметим, что точка минимума будет одна и та же при всех $m \in \mathbb{Z}_+$). Получаем задачу

$$\sum_{j=1}^s (\nu_j s)^{-\frac{q+2}{q}\cdot\frac{p-1}{p-2}}\varepsilon_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^s \nu_j = n, \quad \nu_j \in \mathbb{N}, \quad \nu_j \ge 2. \tag{2.9}$$

Положим

$$\theta = \frac{q+2}{q}\,\frac{p-1}{p-2}. \tag{2.10}$$

Тогда (2.9) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^s \varepsilon_j\nu_j^{-\theta} \to \min, \quad \sum_{j=1}^s \nu_j = n, \quad \nu_j \in \mathbb{N}, \quad \nu_j \ge 2. \tag{2.11}$$

Сначала найдем точку минимума на множестве $\nu_j > 0$ $(1 \le j \le s)$, $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$. Применяя принцип Лагранжа и учитывая, что минимизируется выпуклая функция на выпуклом множестве, получаем, что минимум достигается в точке $(\hat\nu_1, \ldots, \hat\nu_s)$, для которой выполняется $\varepsilon_j\hat\nu_j^{-\theta-1} = \mathrm{const}$. Значит,

$$\hat\nu_j = n\,\frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{\sum_{i=1}^s \varepsilon_i^{\frac{1}{\theta+1}}}. \tag{2.12}$$

Если n достаточно велико, то выбираем $\nu_j \in \mathbb{N}$ такие, что $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$, $\nu_j \ge 2$,

$$\frac{\hat\nu_j}{2} \le \nu_j \le 2\hat\nu_j, \tag{2.13}$$

и получаем

$$\sum_{j=1}^s (2^m s)^{-\theta}\nu_j^{-\theta}\varepsilon_j \underset{p,q}{\asymp} (2^m ns)^{-\theta}\Big(\sum_{j=1}^s \varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}\Big)^{\theta+1}.$$

Таким образом, при больших n оценка для радиуса описанной сферы имеет вид

$$R \underset{p,q}{\lesssim} (2^m n)^{-\frac{q+2}{2q}}\Big(\sum_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-2}{2(p-1)}}.$$

Перейдем к доказательству неравенства (1.9). При выбранных ν_j имеем

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m, l_q^{N_m}) \underset{p,q}{\lesssim} \Big(\sum_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-2}{2(p-1)}} \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} (2^m n)^{-\frac{q+2}{2q}} d_{k(m)}(B_2^{2^m n}, l_q^{2^m n}).$$

Числа $k(m) \in \mathbb{Z}_+$ подбираем так, чтобы $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} k(m) \lesssim n$. Напомним, что $q \ge 2$. Рассуждая так же, как при оценке поперечников классов Соболева [16], получаем, что при достаточно больших n выполнено

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m, l_q^{N_m}) \underset{p,q}{\lesssim} n^{-1}\Big(\sum_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Big)^{(\theta+1)\frac{p-2}{2(p-1)}}.$$

Случай $p = \infty$, $q \geq 2$. Снова оцениваем по порядку радиус евклидова шара, содержащего V_m. Вместо условия (2.1) имеем

$$\max_{1 \leq j \leq s} (2^m \nu_j s)^{(1+\frac{1}{q})} \max_{1 \leq i \leq 2^m \nu_j} |c_{j,i}^m| \leq 1,$$
$$\sum_{i=1}^{2^m \nu_j} |c_{j,i}^m| \leq \frac{\varepsilon_j}{(2^m \nu_j s)^{1+\frac{1}{q}}} \, 2^m \nu_j, \quad 1 \leq j \leq s; \tag{2.14}$$

выражение (2.2) заменяется на

$$\max_{1 \leq i \leq 2^m \nu_j} |c_{j,i}^m| = (2^m \nu_j)^{-\gamma_j} \, (2^m \nu_j s)^{-(1+\frac{1}{q})},$$
$$\sum_{i=1}^{2^m \nu_j} |c_{j,i}^m| \leq \varepsilon_j \, 2^m \nu_j \, (2^m \nu_j s)^{-(1+\frac{1}{q})}. \tag{2.15}$$

Применяя следствие 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{2^m \nu_j} |c_{j,i}^m|^2 \leq \frac{1}{(2^m \nu_j s)^{2(1+\frac{1}{q})}} (2^m \nu_j)^{1-\gamma_j} \varepsilon_j. \tag{2.16}$$

Рассуждаем так же, как в предыдущем случае. Для того чтобы найти радиус евклидова шара, содержащего V_m, максимизируем функцию

$$L(\gamma_1, \, \ldots, \, \gamma_s) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(2^m \nu_j s)^{2(1+\frac{1}{q})}} (2^m \nu_j)^{1-\gamma_j} \varepsilon_j$$

при условии, что $\max_{1 \leq j \leq s} (2^m \nu_j)^{-\gamma_j} \leq 1$. Полученное выражение минимизируем по $\nu_j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющим условию $\sum_{j=1}^{s} \nu_j = n$. В итоге получаем

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m, \, l_q^{N_m}) \underset{q}{\lesssim} n^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{s} \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s} \Big)^{\frac{\theta+1}{2}},$$

где $\theta = \dfrac{q+2}{q}$.

Случай $p > q$, $q \leq 2$. Найдем радиус шара в $l_q^{2^m n}$, содержащего множество последовательностей $(c_{j,i})_{1 \leq j \leq s, \, 1 \leq i \leq 2^m \nu_j}$, удовлетворяющих (2.1), и минимизируем его за счет выбора ν_j (снова точка минимума не будет зависеть от m).

Для фиксированного j рассмотрим множество последовательностей, удовлетворяющих условиям (2.2). Применяя следствие 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{2^m \nu_j} |c_{j,i}^m|^q \leq \varepsilon_j^{\frac{p-q}{p-1}} (2^m \nu_j)^{-\frac{p(q-1)}{p-1}\gamma_j + \frac{p-q}{p-1} - q - 1} \, s^{-q-1} =: E_j. \tag{2.17}$$

Для нахождения радиуса описанного l_q-шара решаем задачу на максимум

$$\sum_{j=1}^{s} s^{-q-1} \varepsilon_j^{\frac{p-q}{p-1}} (2^m \nu_j)^{\frac{p-q}{p-1} - q - 1 - \frac{p(q-1)}{p-1}\gamma_j} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{s} (2^m \nu_j)^{-1-\gamma_j p} \leq s. \tag{2.18}$$

Положим $\sigma_j = (2^m \nu_j)^{-1-\gamma_j p}$. Тогда (2.18) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{s} s^{-q-1} \varepsilon_j^{\frac{p-q}{p-1}} (2^m \nu_j)^{-q} \sigma_j^{\frac{q-1}{p-1}} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \leq s. \tag{2.19}$$

Положим $\tau_j = \sigma_j^{\frac{q-1}{p-1}}$, $a_j = s^{-q-1}\varepsilon_j^{\frac{p-q}{p-1}}(2^m\nu_j)^{-q}$. Применив неравенство Гельдера и учитывая неравенство $\sum_{j=1}^s \tau_j^{\frac{p-1}{q-1}} \le s$, получим

$$\sum_{j=1}^s a_j\tau_j \le s^{\frac{q-1}{p-1}}\Bigl(\sum_{j=1}^s a_j^{\frac{p-1}{p-q}}\Bigr)^{\frac{p-q}{p-1}} = s^{-q-1+\frac{q-1}{p-1}}\Bigl(\sum_{j=1}^s \varepsilon_j(2^m\nu_j)^{-\frac{q(p-1)}{p-q}}\Bigr)^{\frac{p-q}{p-1}}.$$

Отметим, что в точке максимума выполнено

$$\tau_j = \frac{a_j^{\frac{q-1}{p-q}}}{\Bigl(\sum_{k=1}^s a_k^{\frac{p-1}{p-q}}\Bigr)^{\frac{q-1}{p-1}}}\, s^{\frac{q-1}{p-1}}, \quad \tau_j = (2^m\nu_j)^{-\frac{(1+\gamma_j p)(q-1)}{p-1}}, \quad a_j = s^{-q-1}\varepsilon_j^{\frac{p-q}{p-1}}(2^m\nu_j)^{-q}, \tag{2.20}$$

откуда

$$E_j = a_j\tau_j = \frac{a_j^{\frac{p-1}{p-q}}}{\Bigl(\sum_{k=1}^s a_k^{\frac{p-1}{p-q}}\Bigr)^{\frac{q-1}{p-1}}}\, s^{\frac{q-1}{p-1}} = \frac{(2^m\nu_j)^{-\frac{q(p-1)}{p-q}}\varepsilon_j}{\Bigl(\sum_{k=1}^s (2^m\nu_k)^{-\frac{q(p-1)}{p-q}}\varepsilon_k\Bigr)^{\frac{q-1}{p-1}}}\, s^{\frac{q-1}{p-1}-q-1}. \tag{2.21}$$

Теперь минимизируем радиус описанного шара по $\nu_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$ (заметим, что точка минимума не зависит от $m \in \mathbb{Z}_+$). Получаем задачу

$$\sum_{j=1}^s \varepsilon_j \nu_j^{-\frac{q(p-1)}{p-q}} \to \min, \quad \sum_{j=1}^s \nu_j = n, \quad \nu_j \in \mathbb{N}, \quad \nu_j \ge 2. \tag{2.22}$$

Положим $\theta = \dfrac{q(p-1)}{p-q}$. Сначала рассмотрим ту же задачу, заменив условия $\nu_j \in \mathbb{N}$, $\nu_j \ge 2$, на неравенства $\nu_j > 0$. Применяя принцип Лагранжа и учитывая, что минимизируется выпуклая функция на выпуклом множестве, получаем, что минимум достигается в точке $(\hat\nu_1, \ldots, \hat\nu_s)$, где

$$\hat\nu_j = n\,\frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{\sum_{i=1}^s \varepsilon_i^{\frac{1}{\theta+1}}}. \tag{2.23}$$

Если $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, то найдутся $\nu_j \in \mathbb{N}$ такие, что $\sum_{j=1}^s \nu_j = n$ и $\hat\nu_j/2 \le \nu_j \le 2\hat\nu_j$, при этом $\nu_j \ge 2$. Тогда

$$\sum_{j=1}^s \varepsilon_j(2^m\nu_j)^{-\theta} \underset{p,q}{\asymp} 2^{-m\theta}n^{-\theta}\Bigl(\sum_{j=1}^s \varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{\theta+1}.$$

В итоге получаем, что если $(c^m_{j,i})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le \nu_j} \in V_m$, то

$$\Bigl(\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}|^q\Bigr)^{1/q} \lesssim (2^m n)^{-1}\Bigl(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^s \varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-q}{q(p-1)}}.$$

Положим $k(m) = 0$ при $m \ge 1$, $k(0) = n$. Тогда

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m, l_q^{N_m}) \underset{p,q}{\lesssim} \sum_{m\in\mathbb{N}} (2^m n)^{-1}\Bigl(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^s \varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-q}{q(p-1)}} \underset{p,q}{\lesssim} n^{-1}\Bigl(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^s \varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-q}{q(p-1)}}.$$

Случай $p = \infty$, $q \le 2$. Найдем радиус шара в $l_q^{N_m}$, содержащего множество последовательностей $(c^m_{j,i})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le \nu_j}$, удовлетворяющих (2.14), и минимизируем его за счет выбора ν_j. Для фиксированного j рассматриваем множество последовательностей, удовлетворяющих (2.15). Применяя следствие 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{2^m\nu_j} |c^m_{j,i}|^q \le \varepsilon_j (2^m\nu_j)^{-(q-1)\gamma_j - q}\, s^{-q-1}.$$

Рассуждая так же, как в предыдущих случаях, имеем

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} d_{k(m)}(V_m,\, l_q^{N_m}) \underset{q}{\lesssim} n^{-1}\Bigl(\sum_{j=1}^s \frac{\varepsilon_j^{\frac{1}{\theta+1}}}{s}\Bigr)^{\frac{\theta+1}{q}},$$

где $\theta = q$.

З а м е ч а н и е. Во всех случаях γ_j, максимизирующее длину вектора, строго больше -1 при $m = 0$ и достаточно больших n. В самом деле, в силу (2.7), (2.12), (2.20), (2.23) получаем, что $\tau_j = n^{-\frac{(1+\gamma_j p)(\min\{q,\,2\}-1)}{p-1}}$ и $\tau_j \asymp 1$. Значит, $\gamma_j = \gamma_j(n) \to -\frac{1}{p}$, $n \to \infty$.

3. Оценка снизу поперечников конечномерных множеств

Случаи $p > 2$, $q > 2$ **и** $p > q$, $q \le 2$. Доказательство является обобщением рассуждений из работы Е. Д. Глускина [9].

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ таковы, что $\varepsilon\nu^{1+\gamma} \ge 1$, $1 < p \le \infty$.*

1. *Пусть $p > 2$. Тогда существуют $k \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что для вектора $(c_i)_{i=1}^\nu$,*

$$c_i = \begin{cases} c, & 1 \le i \le k, \\ 0, & k+1 \le i \le \nu, \end{cases}$$

выполнено

$$\|(c_i)_{i=1}^\nu\|_{l_p^\nu} \le \nu^{-\gamma}, \quad \|(c_i)_{i=1}^\nu\|_{l_1^\nu} \le \varepsilon\nu, \quad \|(c_i)_{i=1}^\nu\|_{l_2^\nu} \asymp \nu^{-\gamma\frac{p}{2(p-1)} + \frac{p-2}{2(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-2}{2(p-1)}}.$$

2. *Пусть $p > q$, $q \le 2$. Тогда существуют $k \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что для вектора $(c_i)_{i=1}^\nu$,*

$$c_i = \begin{cases} c, & 1 \le i \le k, \\ 0, & k+1 \le i \le \nu, \end{cases}$$

выполнено

$$\|(c_i)_{i=1}^\nu\|_{l_p^\nu} \le \nu^{-\gamma}, \quad \|(c_i)_{i=1}^\nu\|_{l_1^\nu} \le \varepsilon\nu, \quad \|(c_i)_{i=1}^\nu\|_{l_q^\nu} \asymp \nu^{-\gamma\frac{p(q-1)}{q(p-1)} + \frac{p-q}{q(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-q}{q(p-1)}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем числа $\hat{k} > 0$ и $c > 0$ из соотношений $\hat{k}^{1/p}c = \nu^{-\gamma}$, $\hat{k}c = \varepsilon\nu$. Тогда $\hat{k}^{1-\frac{1}{p}} = \varepsilon\nu^{1+\gamma} \ge 1$, $\hat{k}^{1/2}c = \nu^{-\gamma\frac{p}{2(p-1)} + \frac{p-2}{2(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-2}{2(p-1)}}$, $\hat{k}^{1/q}c = \nu^{-\gamma\frac{p(q-1)}{q(p-1)} + \frac{p-q}{q(p-1)}} \varepsilon^{\frac{p-q}{q(p-1)}}$. Число $k = [\hat{k}]$ будет искомым.

Выберем числа ν_j и γ_j в соответствии с (2.7), (2.12), (2.13) в случае $p > 2$, $q > 2$ и в соответствии с (2.20), (2.23), (2.13) — в случае $p > q$, $q \le 2$. Положим

$$\hat{c}_{j,i} = \begin{cases} \hat{c}_j, & 1 \le i \le k_j, \\ 0, & k_j + 1 \le i \le \nu_j. \end{cases}$$

Числа k_j и $\hat{c}_j$ определим в соответствии с леммой 1 так, чтобы

$$\|(\hat{c}_{j,i})_{i=1}^{\nu_j}\|_{l_p^{\nu_j}} \le (\nu_j)^{-\gamma_j}(\nu_j s)^{-1-\frac{1}{q}}, \quad \|(\hat{c}_{j,i})_{i=1}^{\nu_j}\|_{l_1^{\nu_j}} \le \nu_j\varepsilon_j(\nu_j s)^{-1-\frac{1}{q}}, \tag{3.1}$$

при этом в случае $p > 2$, $q > 2$

$$\|(\hat c_{j,i})_{i=1}^{\nu_j}\|_{l_2^{\nu_j}} \asymp \nu_j^{-\gamma_j\frac{p}{2(p-1)}+\frac{p-2}{2(p-1)}}\varepsilon_j^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(\nu_j s)^{-1-\frac{1}{q}}, \tag{3.2}$$

а при $p > q$, $q \le 2$

$$\|(\hat c_{j,i})_{i=1}^{\nu_j}\|_{l_q^{\nu_j}} \asymp \nu_j^{-\gamma_j\frac{p(q-1)}{q(p-1)}+\frac{p-q}{q(p-1)}}\varepsilon_j^{\frac{p-q}{q(p-1)}}(\nu_j s)^{-1-\frac{1}{q}}. \tag{3.3}$$

Это можно сделать при достаточно больших n, поскольку $\gamma_j > -1$ при больших n (см. замечание в конце предыдущего раздела) и $\nu_j \to \infty$ при $n \to \infty$ для фиксированных $\varepsilon_j > 0$ в силу (2.12), (2.23) и неравенства $\nu_j \ge \hat\nu_j/2$.

Из определения E_j (см. (2.3) и (2.17)), (2.8), (2.12), (2.21), (2.23) получаем, что при $p > 2$, $q \ge 2$

$$\sum_{i=1}^{\nu_j}\hat c_{j,i}^2 \underset{p,q}{\asymp} s^{\frac{1}{p-1}-\frac{q+2}{q}-1}\frac{\nu_j^{-\theta}\varepsilon_j}{\left(\sum_{k=1}^s \nu_k^{-\theta}\varepsilon_k\right)^{\frac{1}{p-1}}} \underset{p,q}{\asymp} n^{-\frac{q+2}{q}}\Bigl(\frac{1}{s}\sum_{k=1}^s \varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-2}{p-1}}\frac{\nu_j^{-\theta}\varepsilon_j}{\sum_{k=1}^s \nu_k^{-\theta}\varepsilon_k}, \tag{3.4}$$

а при $p > q$, $q \le 2$

$$\sum_{i=1}^{\nu_j}|\hat c_{j,i}|^q \underset{p,q}{\asymp} s^{\frac{q-1}{p-1}-q-1}\frac{\nu_j^{-\theta}\varepsilon_j}{\left(\sum_{k=1}^s \varepsilon_k\nu_k^{-\theta}\right)^{\frac{q-1}{p-1}}} \underset{p,q}{\asymp} n^{-q}\Bigl(\frac{1}{s}\sum_{k=1}^s \varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-q}{p-1}}\frac{\nu_j^{-\theta}\varepsilon_j}{\sum_{k=1}^s \nu_k^{-\theta}\varepsilon_k}. \tag{3.5}$$

В силу формул (2.12), (2.23) и неравенств $\frac{\hat\nu_j}{2} \le \nu_j \le 2\hat\nu_j$ получаем $\nu_j^{-\theta-1}\varepsilon_j \underset{p,q}{\asymp} \mathrm{const}$ (константа не зависит от j). Поэтому существуют числа $c_{j,i} \ge 0$ такие, что

$$\begin{cases} c_{j,i} \underset{p,q}{\asymp} \hat c_{j,i}, \\ \nu_j^{-1}\sum\limits_{i=1}^{\nu_j} c_{j,i}^2 \text{ не зависит от } j \text{ при } q \ge 2, \\ \nu_j^{-1}\sum\limits_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}|^q \text{ не зависит от } j \text{ при } q < 2, \end{cases} \tag{3.6}$$

и вектор $\hat x = (c_{j,i})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le \nu_j} \in V$. В самом деле, по определению множество V состоит из последовательностей, удовлетворяющих условию (1.11), совпадающему с (2.1) при $m = 0$. Второе соотношение (2.1) следует из (3.1), а первое — из (2.7), (2.20) и (3.1).

Положим

$$A = \begin{cases} n^{-\frac{q+2}{q}}\Bigl(\frac{1}{s}\sum\limits_{k=1}^s \varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-2}{p-1}}, & p > 2,\ q \ge 2, \\ n^{-q}\Bigl(\frac{1}{s}\sum\limits_{k=1}^s \varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\Bigr)^{(\theta+1)\frac{p-q}{p-1}}, & p > q,\ q \le 2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Обозначим через $\mathcal{S}_l$ группу перестановок из l элементов. Положим $G_j = \mathcal{S}_{\nu_j} \times \{-1, 1\}^{\nu_j}$, $G = \prod_{j=1}^s G_j$. Пусть $g \in G$, $g = (\pi_j, \varepsilon_{j,1}, \dots, \varepsilon_{j,\nu_j})_{1\le j\le s}$, $\varepsilon_{j,i} \in \{1, -1\}$, $\pi_j \in \mathcal{S}_{\nu_j}$. Для $x = (x_{j,i})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le \nu_j} \in \mathbb{R}^n$ полагаем $gx = (y_{j,i})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le\nu_j} \in \mathbb{R}^n$, $y_{j,i} = \varepsilon_{j,i}x_{j,\pi_j(i)}$.

Для любого $g \in G$ выполнено $g\hat x \in V$. Обозначим

$$\tilde V = \mathrm{conv}\,\{g\hat x\colon g \in G\} \subset V$$

и оценим снизу $d_l(\tilde V, l_q^n)$, $l = [n/2]$. В случае $q > 2$ будем пользоваться неравенством $d_l(\tilde V, l_q^n) \ge n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}d_l(\tilde V, l_2^n)$ и оценивать снизу $d_l(\tilde V, l_2^n)$.

Обозначим $q_* = \min\{q, 2\}$. Пусть $\hat y = (\hat y_{j,i})_{1\le j\le s,\, 1\le i\le\nu_j}$,

$$\hat y_{j,i}^{q_*'} = c_{j,i}^{q_*}, \quad \hat y_{j,i} \ge 0. \tag{3.8}$$

(При $q \ge 2$ получаем $\hat{y} = \hat{x}$.)

Пусть L — экстремальное подпространство для $d_l(\tilde{V}, l^n_{q_*})$ (на нем достигается точная нижняя грань уклонений в определении колмогоровского поперечника), $\dim L = l$, $Z = L^\perp$, P — ортогональный проектор на Z. В силу двойственности [18, с. 101]

$$\big(d_l(\tilde{V}, l^n_{q_*})\big)^{q'_*} \ge \sup_{z\in Z\cap B^n_{q'_*}} \sup_{x\in\tilde{V}} |\langle z, x\rangle|^{q'_*} \ge \sup_{g\in G}\sup_{x\in\tilde{V}} \frac{|\langle Pg\hat{y}, x\rangle|^{q'_*}}{\|Pg\hat{y}\|^{q'_*}_{q'_*}} \ge \frac{(1/|G|)\sum_{g\in G}|\langle Pg\hat{y}, g\hat{x}\rangle|^{q'_*}}{(1/|G|)\sum_{g\in G}\|Pg\hat{y}\|^{q'_*}_{q'_*}}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим линейные операторы $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{|G|}$, $\tilde{S}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{|G|}$, заданные по формулам

$$(Sy)(g) = \langle y, g\hat{x}\rangle, \quad (\tilde{S}y)(g) = \langle y, g\hat{y}\rangle, \quad y\in\mathbb{R}^n,\ g\in G; \tag{3.10}$$

через $(S_{gk})_{g\in G, 1\le k\le n}$ и $(\tilde{S}_{gk})_{g\in G,1\le k\le n}$ обозначим их матрицы. Покажем, что

$$\operatorname{tr}(\tilde{S}PS^*) = \sum_{g\in G}\langle Pg\hat{y}, g\hat{x}\rangle. \tag{3.11}$$

В самом деле, пусть $T:\mathbb{R}^{|G|}\to\mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $(T_{kg})_{1\le k\le n, g\in G}$ — его матрица. Тогда $\operatorname{tr}(\tilde{S}T) = \sum_{g\in G}\sum_{k=1}^n \tilde{S}_{gk}T_{kg}$. Далее, $\tilde{S}_{gk} \overset{(3.10)}{=} \langle e_k, g\hat{y}\rangle$. Пусть φ_g — вектор в $\mathbb{R}^{|G|}$, у которого на месте g стоит 1, а на остальных местах нули. Для $T = PS^*$ имеем $T_{kg} = \langle e_k, PS^*\varphi_g\rangle = \langle SPe_k, \varphi_g\rangle = (SPe_k)(g) \overset{(3.10)}{=} \langle Pe_k, g\hat{x}\rangle$. Значит,

$$\sum_{k=1}^n \tilde{S}_{gk}T_{kg} = \sum_{k=1}^n\langle e_k, g\hat{y}\rangle\langle Pe_k, g\hat{x}\rangle = \sum_{k=1}^n \langle e_k, g\hat{y}\rangle\langle e_k, Pg\hat{x}\rangle = \langle g\hat{y}, Pg\hat{x}\rangle.$$

Отсюда и из самосопряженности оператора P следует (3.11).

Итак,

$$\sum_{g\in G}\langle Pg\hat{y}, g\hat{x}\rangle = \operatorname{tr}(\tilde{S}PS^*) = \operatorname{tr}(S^*\tilde{S}P). \tag{3.12}$$

Вычислим элементы матрицы $S^*\tilde{S}$. Имеем

$$(S^*\tilde{S})_{ij} = \langle e_i, S^*\tilde{S}e_j\rangle = \langle Se_i, \tilde{S}e_j\rangle \overset{(3.10)}{=} \sum_{g\in G}\langle e_i, g\hat{x}\rangle\langle e_j, g\hat{y}\rangle.$$

Если $i\ne j$, то эта сумма равна 0 (для каждого $(g\hat{x})_i(g\hat{y})_j \ne 0$ найдется элемент $\tilde{g}\in G$ такой, что $(\tilde{g}\hat{x})_i(\tilde{g}\hat{y})_j = -(g\hat{x})_i(g\hat{y})_j$, причем между g и $\tilde{g}$ можно построить биекцию). Пусть $i=j$, при этом у e_i единственная ненулевая координата на номере (m, t). Оценим по порядку сумму $\sum_{g\in G}\langle e_i, g\hat{x}\rangle\langle e_i, g\hat{y}\rangle$. Сначала отметим, что в силу (2.12), (2.23) и условия $\hat{\nu}_m/2 \le \nu_m \le 2\hat{\nu}_m$ выполнено

$$\frac{\nu_m^{-\theta-1}\varepsilon_m}{\sum_{k=1}^s \nu_k^{-\theta}\varepsilon_k} \underset{p,q}{\asymp} \frac{n^{-\theta-1}}{\big(\sum_{k=1}^s \varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\big)^{-\theta-1}\sum_{k=1}^s n^{-\theta}\varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\big(\sum_{k=1}^s\varepsilon_k^{\frac{1}{\theta+1}}\big)^{\theta}} = n^{-1}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим случай $q\ge 2$. Напомним, что тогда $\hat{y} = \hat{x}$. Имеем

$$\sum_{g\in G}\langle g\hat{x}, e_i\rangle^2 = \frac{|G|}{|G_m|}\sum_{g_m\in G_m}\langle g_m\hat{x}, e_i\rangle^2 = \frac{|G|}{|G_m|}(\nu_m-1)!2^{\nu_m}\sum_{k=1}^{\nu_m}c^2_{m,k}$$

$$= \frac{|G|}{\nu_m}\sum_{k=1}^{\nu_m}c^2_{m,k} \underset{p,q}{\overset{(3.4),(3.6),(3.7)}{\asymp}} \frac{|G|}{\nu_m}A\frac{\nu_m^{-\theta}\varepsilon_m}{\sum_{k=1}^s\nu_k^{-\theta}\varepsilon_k} \underset{p,q}{\overset{(3.13)}{\asymp}} An^{-1}|G|.$$

Учитывая (3.6), получаем, что матрица $S^*\tilde{S}$ пропорциональна единичной. Значит,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle Pg\hat{y},\, g\hat{x}\rangle \overset{(3.12)}{\underset{p,q}{\asymp}} An^{-1}\mathrm{tr}\, P \asymp A \tag{3.14}$$

(так как $\dim \mathrm{Im}\, P \ge n/2$). В силу неравенства Гельдера получаем оценку снизу для числителя в (3.9):

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\langle Pg\hat{y},\, g\hat{x}\rangle|^2 \ge \Bigl(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle Pg\hat{y},\, g\hat{x}\rangle\Bigr)^2 \underset{p,q}{\asymp} A^2. \tag{3.15}$$

Пусть теперь $q \le 2$. Тогда

$$\sum_{g\in G}\langle g\hat{x},\, e_i\rangle\langle g\hat{y},\, e_i\rangle = \frac{|G|}{|G_m|}\sum_{g_m\in G_m}\langle g_m\hat{x},\, e_i\rangle\langle g_m\hat{y},\, e_i\rangle \overset{(3.8)}{=} \frac{|G|}{|G_m|}(\nu_m-1)!2^{\nu_m}\sum_{k=1}^{\nu_m}|c_{m,k}|^q$$

$$= \frac{|G|}{\nu_m}\sum_{k=1}^{\nu_m}|c_{m,k}|^q \overset{(3.5)-(3.7)}{\underset{p,q}{\asymp}} \frac{|G|}{\nu_m}A\frac{\nu_m^{-\theta}\varepsilon_m}{\sum_{k=1}^s \nu_k^{-\theta}\varepsilon_k} \overset{(3.13)}{\underset{p,q}{\asymp}} An^{-1}|G|.$$

Учитывая (3.6), снова получаем (3.14); в силу неравенства Гельдера, для числителя в (3.9) выполнена оценка $(1/|G|)\sum_{g\in G}|\langle Pg\hat{y},\, g\hat{x}\rangle|^{q'_*} \underset{p,q}{\gtrsim} A^{q'}$.

Теперь получим оценку сверху для знаменателя в (3.9). Имеем

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\|Pg\hat{y}\|_{q'_*}^{q'_*} = \sum_{i=1}^n\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\langle g\hat{y},\, Pe_i\rangle|^{q'_*}.$$

Далее рассуждаем так же, как в лемме из [9, с. 37–38]. Оценим сверху наименьшую константу в неравенстве

$$\Bigl(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\langle g\hat{y},\, y\rangle|^{q'_*}\Bigr)^{1/q'_*} \le C\|y\|_2.$$

Из неравенства Хинчина

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\delta_k=\pm 1}\Bigl|\sum_{k=1}^n\delta_k a_k\Bigr|^{q'_*} \underset{q_*}{\lesssim} \Bigl(\sum_{k=1}^n a_k^2\Bigr)^{q'_*/2}$$

(см., например, [19, с. 178]) выводится соотношение

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\langle g\hat{y},\, y\rangle|^{q'_*} \underset{q_*}{\lesssim} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Bigl(\sum_{1\le i\le n}|y_i(g\hat{y})_i|^2\Bigr)^{q'_*/2}.$$

Поэтому достаточно получить оценку на константу в неравенстве

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Bigl(\sum_{1\le i\le n}|y_i(g\hat{y})_i|^2\Bigr)^{q'_*/2} \le C^{q'_*}\|y\|_2^{q'_*}.$$

Пользуясь соображениями выпуклости (здесь учитывается условие $q_* \le 2$), получаем, что достаточно подставить $y = e_i$. Если у e_i единственная ненулевая координата находится на месте $(j,\, t)$, то

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|(g\hat{y})_i|^{q'_*} \overset{(3.8)}{=} \frac{1}{|G|}|G|\frac{1}{\nu_j}\sum_{k=1}^{\nu_j}|c_{j,k}|^{q_*} \overset{(3.4)-(3.7)}{\underset{p,q}{\asymp}} \frac{1}{\nu_j}\frac{\nu_j^{-\theta}\varepsilon_j}{\sum_{k=1}^s \nu_k^{-\theta}\varepsilon_k}A \overset{(3.13)}{\underset{p,q}{\asymp}} An^{-1}.$$

Значит, $C^{q'_*} \underset{p,q}{\lesssim} An^{-1}$. Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\langle g\hat{y}, \, Pe_i\rangle|^{q'_*} \underset{p,q}{\lesssim} C^{q'_*} \sum_{i=1}^{n} \|Pe_i\|_2^{q'_*} \le C^{q'_*} n \underset{p,q}{\lesssim} A.$$

Поэтому $(d_l(V, \, l_{q_*}^n))^{q'_*} \overset{(3.9)}{\underset{p,q}{\gtrsim}} \dfrac{A^{q'_*}}{A} = A^{q'_*-1}$, т. е.

$$d_l(V, \, l_{q_*}^n) \underset{p,q}{\gtrsim} A^{\frac{q'_*-1}{q'_*}} = A^{1/q_*},$$

что дает правильную по порядку оценку снизу.

Случай $p \le q$**,** $p \le 2$**.** Возьмем $\nu_j \asymp n/s$. Достаточно получить оценку снизу для множества V последовательностей $(c_{j,i})_{1\le j\le s, \, 1\le i\le \nu_j}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{j=1}^{s} n^{(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})p} \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}|^p \le 1, \quad \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}| \le \frac{\varepsilon_j}{s} \frac{1}{n^{1/q}}, \quad 1 \le j \le s$$

(см. (1.11)). Если

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}| \le n^{-1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}},$$

то для любого $1 \le j \le s$ выполнено $\sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}| \le n^{-1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}$, и поэтому при достаточно больших n (так как $p > 1$)

$$\sum_{i=1}^{\nu_j} |c_{j,i}| \le \frac{\varepsilon_j}{sn^{1/q}}.$$

Значит,

$$V \supset c(p,q) n^{-1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} B_1^n$$

для некоторого $c(p,q) > 0$. Остается применить оценки для $d_l(n^{-1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} B_1^n, \, l_q^n)$, полученные в [15; 17].

Поперечники множества V, возникающего в задаче об оценке $d_n(\tilde{M}, \, L_q[0, \, 1])$, оцениваются снизу аналогичным образом. В качестве группы G берется

$$\prod_{j=1}^{s} G_j, \quad G_j = \{\pm 1\}^{4\nu_j} \times \tilde{S}_{4\nu_j},$$

где $\tilde{S}_{4\nu_j}$ — множество перестановок вида $4k + i \mapsto 4\pi(k) + i$, $\pi \in S_{\nu_j}$, $0 \le k \le \nu_j - 1$, $1 \le i \le 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильева А.А.** Критерий существования гладкой функции при ограничениях // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 3. С. 335–346.
2. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 p.
3. **Тихомиров В.М.** Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). Москва, 1987. С. 103–260.
4. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory. Berlin: Springer, 1985. 294 p. doi: 10.1007/978-3-642-69894-1 .
5. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову пересечения классов периодических функций и конечномерных множеств // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 5. С. 749–760.

6. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову некоторых конечномерных множеств в смешанной норме. // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 1. С. 144–148.
7. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, № 2. С. 418–430.
8. **Галеев Э.М.** Поперечники функциональных классов и конечномерных множеств // Владикавказский мат. журн. 2011. Т. 13, № 2. С. 3–14.
9. **Глускин Е.Д.** Пересечения куба с октаэдром плохо аппроксимируются подпространствами малой размерности // Приближение функций специальными классами операторов: межвуз. сб. научн. тр. / Мин. прос. РСФСР; Вологодский гос. пед. ин-т. Вологда, 1987. С. 35–41.
10. **Изаак А.Д.** Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. 1994. Т. 55, № 1. С. 43–52.
11. **Изаак А.Д.** Поперечники классов Гёльдера — Никольского и конечномерных множеств в пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 3. С. 459–461.
12. **Малыхин Ю.В., Рютин К.С.** Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $l_{2,1}$ // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 85–90.
13. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, №3. С. 161–178.
14. **Кашин Б.С.** Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1977. Т. 41, №2. С. 334–351.
15. **Глускин Е.Д.** Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сборник. 1983. Т. 120 (162), №. 2. С. 180–189.
16. **Майоров В.Е.** Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 6. С. 179–180.
17. **Глускин Е.Д.** О некоторых конечномерных задачах теории поперечников // Вестн. ЛГУ. 1981. Т. 13. С. 5–10.
18. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 6. С. 51–116.
19. **Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos Santalucia V., Pelant J., Zizler V.** Functional analysis and infinite-dimensional geometry. N Y: Springer, 2001. 451 p. (Ser. CMS Books in Math.) doi: 10.1007/978-1-4757-3480-5 .

Поступила 15.03.2019
После доработки 17.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Васильева Анастасия Андреевна
д-р физ.-мат. наук, доцент
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва
e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

REFERENCES

1. Vasil'eva A.A. An existence criterion for a smooth function under constraints. *Math Notes*, 2007, vol. 82, no. 3-4, pp. 295-308. doi: 10.1134/S0001434607090027 .
2. Tikhomirov V.M. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii* [Some questions in approximation theory]. Moscow: Izdat. Moskov. Gos. Univ., 1976, 304 p.
3. Tikhomirov V.M. Theory of approximations. *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya*, 1987, vol. 14, pp. 103–260.
4. Pinkus A. n-widths in approximation theory. Berlin: Springer, 1985, 294 p. doi: 10.1007/978-3-642-69894-1 .
5. Galeev E.M. The Kolmogorov diameter of the intersection of classes of periodic functions and of finite-dimensional sets. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 5, pp. 382–388. doi: 10.1007/BF01158363 .
6. Galeev E.M. Kolmogorov n-width of some finite-dimensional sets in a mixed measure. *Math. Notes*, 1995, vol. 58, no. 1, pp. 774–778. doi: 10.1007/BF02306188 .

7. Galeev E.M. Kolmogorov widths of classes of periodic functions of one and several variables. *Math. USSR-Izv.*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 435–448. doi: 10.1070/IM1991v036n02ABEH002029 .
8. Galeev E.M. Kolmogorov and linear diameters of functional classes and finite dimensional sets. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 3–14 (in Russian).
9. Gluskin E.D. Intersections of a cube with an octahedron are poorly approximated by subspaces of small dimension. *Approximation of functions by special classes of operators, Interuniv. Collect. Sci. Works*, Vologda, 1987, pp. 35–41 (in Russian).
10. Izaak A.D. Kolmogorov widths in finite-dimensional spaces with mixed norms. *Math. Notes*, 1994, vol. 55, no. 1, pp. 30–36. doi: 10.1007/BF02110761 .
11. Izaak A.D. Widths of Hölder–Nikol'skij classes and finite-dimensional subsets in spaces with mixed norm. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 3, pp. 328–330. doi: 10.1007/BF02308549 .
12. Malykhin Yu.V., Ryutin K.S. The product of octahedra is badly approximated in the $\ell_{2,1}$-metric. *Math. Notes*, 2017, vol. 101, no. 1, pp. 94–99. doi: 10.1134/S0001434617010096 .
13. Ismagilov R.S. Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials. *Russian Math. Surveys*, 1974, vol. 29, no. 3, pp. 169–186. doi: 10.1070/RM1974v029n03ABEH001287 .
14. Kashin B.S. Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions. *Math. USSR-Izv.*, 1977, vol. 11, no. 2, pp. 317–333. doi: 10.1070/IM1977v011n02ABEH001719 .
15. Gluskin E.D. Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets. *Math. USSR-Sb.*, 1984, vol. 48, no. 1, pp. 173–182. doi: 10.1070/SM1984v048n01ABEH002667 .
16. Maiorov V.E. Discretization of the problem of diameters. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1975, vol. 30, no. 6 (186), pp. 179–180 (in Russian).
17. Gluskin E.D. On some finite-dimensional problems of the theory of diameters. *Vestn. Leningr. Univ.*, 1981, vol. 13, no. 3, pp. 5–10 (in Russian).
18. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Duality of convex functions and extremum problems. *Russian Math. Surveys*, 1968, vol. 23, no. 6, pp. 53–124. doi: 10.1070/RM1968v023n06ABEH001251 .
19. Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos Santalucia V., Pelant J., Zizler V. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* Ser. CMS Books in Math. N Y: Springer, 2001, 451 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3480-5 .

Received March 15, 2019
Revised May 17, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00332).

Anastasia Andreevna Vasil'eva, Dr. Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., Lomonosov Moscow State University, faculty on mechanics and mathematics, Moscow, Vorobyovy gory, 1, Main Building of MSU, 119991 Russia, e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru .

Cite this article as: A. A. Vasil'eva. Kolmogorov widths of Sobolev classes on a closed interval with constraints on the variation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 48–66 .