ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.518.85+519.651

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

Р. А. Алиев, Ч. А. Гаджиева

Статья посвящена аппроксимации преобразования Гильберта $(Hu)(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_R \dfrac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$ функций $u \in L_2(R)$ операторами вида $(H_\delta u)(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{u(t+(k+1/2)\delta)}{-k-1/2}$, $\delta > 0$. Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого $\delta > 0$ операторы H_δ ограниченно действуют в пространстве $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, и имеет место неравенство*

$$\|H_\delta\|_{L_p(R)\to L_p(R)} \le \|\widetilde{h}\|_{l_p\to l_p},$$

где $\widetilde{h}$ — модифицированное дискретное преобразование Гильберта, определяемое равенством

$$\widetilde{h}(b) = \big\{(\widetilde{h}(b))_n\big\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \big(\widetilde{h}(b)\big)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{b_m}{n-m-1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1.$$

Теорема 2. *Для любого $\delta > 0$ и для любого $u \in L_p(R)$, $1 < p < \infty$, имеет место равенство*

$$H_\delta(H_\delta u)(t) = -u(t).$$

Теорема 3. *Для любого $\delta > 0$ последовательность операторов $\{H_{\delta/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сильно сходится к оператору H в пространстве $L_2(R)$, т. е. для любого $u \in L_2(R)$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|H_{\delta/n}u - Hu\|_{L_2(R)} = 0.$$

Ключевые слова: преобразование Гильберта, сингулярный интеграл, аппроксимация, дискретное преобразование Гильберта.

R. A. Aliev, Ch. A. Gadjieva. On the approximation of the Hilbert transform.

The article is devoted to the approximation of the Hilbert transform $(Hu)(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_R \dfrac{u(\tau)}{t-\tau}d\tau$ of functions $u \in L_2(R)$ by operators of the form $(H_\delta u)(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{u(t+(k+1/2)\delta)}{-k-1/2}$, $\delta > 0$. The main results are the following statements.

Theorem 1. For any $\delta > 0$ the operators H_δ are bounded in the space $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, and

$$\|H_\delta\|_{L_p(R)\to L_p(R)} \le \left\|\tilde{h}\right\|_{l_p\to l_p},$$

where $\tilde{h}$ is the modified discrete Hilbert transform defined by the equality

$$\tilde{h}(b) = \left\{\left(\tilde{h}(b)\right)_n\right\}_{n\in Z}, \quad \left(\tilde{h}(b)\right)_n = \sum_{m\in Z} \frac{b_m}{n-m-1/2}, \quad n \in Z, \quad b = \{b_n\}_{n\in Z} \in l_1.$$

Theorem 2. For any $\delta > 0$ and $u \in L_p(R)$, $1 < p < \infty$, the following inequality holds:

$$H_\delta(H_\delta u)(t) = -u(t).$$

Theorem 3. For any $\delta > 0$ the sequence of operators $\left\{H_{\delta/n}\right\}_{n\in N}$ strongly converges to the operator H in $L_2(R)$; i.e., the following inequality holds for any $u \in L_2(R)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|H_{\delta/n}u - Hu\right\|_{L_2(R)} = 0.$$

Keywords: Hilbert transform, singular integral, approximation, discrete Hilbert transform.

MSC: 44A15, 42A50, 41A35, 65D30

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-30-41

Введение

Пусть $L_p(R),\ 1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых на действительной оси R функций с конечной $L_p(R)$-нормой $\|u\|_{L_p(R)} = \Big(\int_R |u(\tau)|^p\,d\tau\Big)^{1/p}$.

Преобразованием Гильберта функции $u \in L_p(R),\ 1 \le p < \infty$, называется сингулярный интеграл

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_R \frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau, \quad t \in R.$$

Известно (см. [1] или [2, гл. III, § 2]), что преобразование Гильберта функции $u \in L_p(R),\ 1 \le p < \infty$, существует почти для всех значений $t \in R$. В случае $1 < p < \infty$ преобразование Гильберта является ограниченным оператором в пространстве $L_p(R)$ и удовлетворяет равенству $H^2 = -I$. В случае $p = 1$ преобразование Гильберта функции $u \in L_1(R)$, вообще говоря, не является интегрируемым в смысле Лебега на R. В этом случае имеет место неравенство слабого типа $m\{t \in R\colon |(Hu)(t)| > \lambda\} \le (c_0/\lambda)\|u\|_{L_1(R)},\ \lambda > 0$, где m-мера Лебега, c_0 — абсолютная постоянная (см. [3] или [2, гл. III, § 2]).

В случае ограниченных промежутков аппроксимациям сингулярных интегралов посвящено много работ (см. [4; 5] и библиографию там, а также [6–8]). Литературы, посвященной численному интегрированию сингулярных интегралов на неограниченных промежутках, значительно меньше. Аппроксимациям преобразования Гильберта посвящены работы [9–13].

В работе [9] для аналитической в полосе $\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < d\}$ функции u (при некоторых дополнительных ограничениях на u) доказано, что ряд $(2/\pi)\sum_{k=odd}\dfrac{u(t+k\delta)}{-k}$ равномерно сходится к $(Hu)(t)$ при $\delta \to 0$. В работе [10] установлено, что последнее утверждение остается в силе, если заменить указанный выше ряд на $(1/\pi)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{u(t+(k+1/2)\delta)}{-k-1/2}$. В работах [11–13] приведены аппроксимации преобразования Гильберта с помощью Sinc функций (так называемый Sinc метод), но во всех этих работах функция u является аналитической в некоторой полосе $\{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < d\}$.

Пусть $l_p,\ 1 \le p < \infty$, — пространство всех числовых последовательностей $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с конечной l_p-нормой

$$\|b\|_{l_p} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^p\Big)^{1/p}. \tag{0.1}$$

Последовательность $h(b) = \{(h(b))_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называется *дискретным преобразованием Гильберта* последовательности $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$, где $(h(b))_n = \sum_{m\ne n}\dfrac{b_m}{n-m},\ n \in \mathbb{Z}$.

Настоящая статья посвящена аппроксимации преобразования Гильберта произвольных функций из $L_2(R)$ операторами вида $(H_\delta u)(t) = (1/\pi)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{u(t+(k+1/2)\delta)}{-k-1/2}$, $\delta > 0$, которые введены в работе [10]. Доказано, что операторы H_δ ограниченно действуют в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, удовлетворяют равенству $H_\delta^2 = -I$ в $L_p(R)$ и для любого $\delta > 0$ последовательность операторов $\{H_{\delta/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сильно сходится к оператору H в $L_2(R)$. Отметим, что для конечного интервала аналогичный подход сделан в [8], результаты которой будут использоваться при доказательстве основных результатов настоящей статьи.

Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого $\delta > 0$ операторы H_δ ограниченно действуют в пространстве $L_p(R),\ 1 < p < \infty$, и имеет место неравенство*

$$\|H_\delta\|_{L_p(R)\to L_p(R)} \le \|\widetilde{h}\|_{l_p\to l_p}, \tag{0.2}$$

где $\widetilde{h}$ — модифицированное дискретное преобразование Гильберта, определяемое равенством

$$\widetilde{h}(b) = \{(\widetilde{h}(b))_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \big(\widetilde{h}(b)\big)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{b_m}{n-m-1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1.$$

Теорема 2. *Для любого $\delta > 0$ и для любого $u \in L_p(R)$, $1 < p < \infty$, имеет место равенство*

$$H_\delta(H_\delta u)(t) = -u(t). \tag{0.3}$$

Теорема 3. *Для любого $\delta > 0$ последовательность операторов $\{H_{\delta/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сильно сходится к оператору H в пространстве $L_2(R)$, т. е. для любого $u \in L_2(R)$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|H_{\delta/n}u - Hu\|_{L_2(R)} = 0.$$

1. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

М. Риссом [1] доказано, что если $b \in l_p$, $1 < p < \infty$, то $h(b) \in l_p$ и имеет место неравенство

$$\|h(b)\|_{l_p} \le C_p \|b\|_{l_p}, \tag{1.1}$$

где C_p — постоянная, зависящая только от p, а $\|b\|_{l_p}$ определена формулой (0.1). Если $b \in l_1$, то Р. Хантом, Б. Макенхауптом и Р. Виденом [14] доказано, что имеет место неравенство слабого типа $|(h(b))(\lambda)| \le (C_0/\lambda)\|b\|_{l_1}$, где $(h(b))(\lambda) = \sum_{\{n\in\mathbb{Z}:\ |(h(b))_n|>\lambda\}} 1$ — функция распределения дискретного преобразования Гильберта последовательности $b \in l_1$, C_0 — абсолютная постоянная. В работе [15] изучалось асимптотическое поведение функции распределения дискретного преобразования Гильберта последовательностей из l_1 и были найдены как необходимые условия, так и достаточные условия для суммируемости дискретного преобразования Гильберта последовательностей из l_1. Мы будем пользоваться модифицированным вариантом дискретного преобразования Гильберта

$$\big(\widetilde{h}(b)\big)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{b_m}{n-m-1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

К. Андерсеном [16] доказано, что неравенство (1.1) справедливо и для преобразования $\widetilde{h}$, т. е. имеет место неравенство

$$\big\|\widetilde{h}(b)\big\|_{l_p} \le \widetilde{C}_p \|b\|_{l_p}, \tag{1.2}$$

где $\widetilde{C}_p$ — постоянная, зависящая только от p.

Обозначим через $L_p(T)$, $1 \le p < \infty$, пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной нормой $\|\varphi\|_{L_p(T)} = \Big(\int_T |\varphi(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}$, где $T = [-\pi, \pi)$, а через $L_p([a,b])$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых на отрезке $[a,b] \subset R$ функций с конечной нормой $\|\varphi\|_{L_p([a,b])} = \Big(\int_a^b |\varphi(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}$.

Известно (см., например, [17, гл. IV, § 1]), что оператор

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t \in T,$$

ограниченно действует в пространстве $L_2(T)$ и $\|S\|_{L_2(T)\to L_2(T)} = 1$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(T)$ последовательность операторов

$$(S_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}\Big(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big),\quad n\in\mathbb{N}.$$

В работе [8] доказано, что операторы S_n ограниченно действуют в $L_2(T)$,

$$\|S_n\|_{L_2(T)\to L_2(T)}=1,$$

для любого тригонометрического полинома $P(t)$ порядка не выше $n-1$ выполняется равенство $(S_nP)(t)=(SP)(t)$ и последовательность $\{S_n\}$ сильно сходится к S в $L_2(T)$, при этом для любого $\varphi\in L_2(T)$ справедлива оценка

$$\|S\varphi-S_n\varphi\|_{L_2(T)}\le 2E^2_{n-1}(\varphi),\quad n\in\mathbb{N},$$

где $E^2_{n-1}(\varphi)$ — наилучшее в метрике $L_2(T)$ приближение функции φ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$, $n\in\mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим регулярный интегральный оператор

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad t\in T,$$

где ядро $K(t,\tau)$ — непрерывная на квадрате $[-\pi,\pi]^2$ функция, и последовательность операторов

$$(\mathrm{K}_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}K\Big(t,t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big),\quad t\in T,\quad n\in\mathbb{N},$$

где $K(t,\tau)=K(t,\tau-2\pi)$ для точек $(t,\tau)\in[-\pi,\pi]\times(\pi,3\pi)$.

Лемма 1. *Последовательность операторов* $\{\mathrm{K}_n\}$ *сильно сходится к оператору* K *в* $L_2(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала отметим, что если $K(t,\tau)$ является 2π-периодической по аргументу τ непрерывной функцией, то лемма доказана в [8, теорема 3].

Пусть $\varphi\in L_2(T)$ и $\varepsilon>0$. Обозначим

$$K^*(t,\tau)=K(t,\tau)\ \text{при}\ (t,\tau)\in[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi-\delta_\varepsilon],$$

$$K^*(t,\tau)=K(t,\pi-\delta_\varepsilon)+\frac{\tau-\pi+\delta_\varepsilon}{\delta_\varepsilon}[K(t,-\pi)-K(t,\pi-\delta_\varepsilon)]\ \text{при}\ (t,\tau)\in[-\pi,\pi]\times[\pi-\delta_\varepsilon,\pi],$$

$$K^*(t,\tau+2\pi)=K^*(t,\tau)\ \text{при всех}\ (t,\tau)\in[-\pi,\pi]\times R,$$

где $\delta_\varepsilon=\min\Big\{\dfrac{\varepsilon^2}{192\pi M_0^2\|\varphi\|^2_{L_2(T)}},\dfrac{\pi\varepsilon}{8M_0\|\varphi\|_{L_2(T)}},1\Big\}$, $M_0=\max\limits_{(t,\tau)\in[-\pi,\pi]^2}|K(t,\tau)|$. Тогда $K^*(t,\tau)$ — 2π-периодическая по аргументу τ непрерывная функция, и, значит, последовательность операторов

$$(\mathrm{K}^*_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}K^*\Big(t,t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big),\quad t\in T,\quad n\in\mathbb{N},$$

сильно сходится к оператору $(\mathrm{K}^*\varphi)(t)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K^*(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$. Поэтому при больших значениях n выполняется неравенство

$$\|\mathrm{K}^*_n\varphi-\mathrm{K}^*\varphi\|_{L_2(T)}<\varepsilon/2.$$

Поскольку

$$\|\mathrm{K}\varphi-\mathrm{K}^*\varphi\|_{L_2(T)}\le\Bigg[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\pi-\delta_\varepsilon}^{\pi}|K(t,\tau)-K^*(t,\tau)|^2\Bigg]^{1/2}\cdot\|\varphi\|_{L_2(T)}\le\Bigg[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\pi-\delta_\varepsilon}^{\pi}(2M_0)^2\Bigg]^{1/2}\cdot\|\varphi\|_{L_2(T)}\le\frac{\varepsilon}{4}$$

и при $n\ge(1/\varepsilon)\cdot 16M_0\|\varphi\|_{L_2(T)}$ справедлива оценка

$$\|\mathrm{K}_n\varphi-\mathrm{K}_n^*\varphi\|_{L_2(T)}\le\frac{1}{n}\Big(\frac{n}{2\pi}\delta_\varepsilon+1\Big)\cdot 2M_0\|\varphi\|_{L_2(T)}\le\frac{\varepsilon}{4},$$

то при достаточно больших значениях n выполняется неравенство

$$\|\mathrm{K}_n\varphi-\mathrm{K}\varphi\|_{L_2(T)}\le\|\mathrm{K}_n\varphi-\mathrm{K}_n^*\varphi\|_{L_2(T)}+\|\mathrm{K}_n^*\varphi-\mathrm{K}^*\varphi\|_{L_2(T)}+\|\mathrm{K}^*\varphi-\mathrm{K}\varphi\|_{L_2(T)}<\varepsilon.$$

А это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{K}_n\varphi-\mathrm{K}\varphi\|_{L_2(T)}=0.$$

Лемма 1 доказана.

Если $\varphi\in L_2([-\pi,\pi])$, то для любого $t\in[-\pi,\pi]\backslash\{-\pi+\pi/n,\pi-\pi/n\}$ имеет место равенство

$$(\mathrm{K}_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\in[-\pi,\pi]\right\}}K\Big(t,t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big).$$

Отсюда вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Последовательность операторов*

$$\big(\widetilde{\mathrm{K}}_n\varphi\big)(t)=\frac{1}{n}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\in[-\pi,\pi]\right\}}K\Big(t,t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big),\quad t\in[-\pi,\pi],$$

сильно сходится к оператору K *в* $L_2([-\pi,\pi])$.

Следствие 2. *Если функция* $K(t,\tau)$ *непрерывна на прямоугольнике* $[\pi p,\pi p+2\pi q]\times[-\pi,\pi]$, *то последовательность операторов*

$$\big(\widetilde{\mathrm{K}}_n\varphi\big)(t)=\frac{1}{n}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\in[-\pi,\pi]\right\}}K\Big(t,t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\Big),\quad t\in[\pi p,\pi p+2\pi q],$$

сильно сходится к оператору

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad t\in[\pi p,\pi p+2\pi q],$$

в $L_2([\pi p,\pi p+2\pi q])$, *где* $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$.

Лемма 2. *Если функция* $K_0(\tau)$ *непрерывна на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *то последовательность операторов*

$$\big(\mathrm{K}_n^0\varphi\big)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1}K_0\Big(\frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big),\quad t\in T,\quad n\in\mathbb{N},$$

сильно сходится в $L_2(T)$ *к оператору*

$$\big(\mathrm{K}^0\varphi\big)(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_0(\tau)\varphi(t+\tau)\,d\tau,\quad t\in T.$$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1.

2. Доказательства теорем 1–3

Доказательство теоремы 1. Пусть $u \in L_p(R)$. Для любого $t \in R$ имеем

$$\widetilde{h}\Big(\Big\{u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}\Big) = \Big(\frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{u(t+\delta/2+m\delta)}{n-m-1/2}\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$= \Big(\frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{u(t+\delta/2+k\delta+n\delta)}{-k-1/2}\Big)_{n\in\mathbb{Z}} = \big[(H_\delta u)(t+n\delta)\big]_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Тогда в силу неравенства (1.2) почти для всех $t \in R$ имеет место неравенство

$$\big\|\{(H_\delta u)(t+n\delta)\}_{n\in\mathbb{Z}}\big\|_{l_p} = \Big\|\widetilde{h}\Big(\Big\{u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}\Big)\Big\|_{l_p} \le \big\|\widetilde{h}\big\|_{l_p\to l_p}\cdot\Big\|\Big\{u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l_p}. \quad (2.1)$$

Из неравенства (2.1) получим

$$\|H_\delta u\|^p_{L_p(R)} = \int\limits_R |(H_\delta u)(t)|^p\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{(-n-1/2)\delta}^{(-n+1/2)\delta}|(H_\delta u)(t)|^p\,dt$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}|(H_\delta u)(t+n\delta)|^p\,dt = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|(H_\delta u)(t+n\delta)|^p\,dt = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\|\{(H_\delta u)(t+n\delta)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|^p_{l_p}\,dt$$

$$\le \|\widetilde{h}\|^p_{l_p\to l_p}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\Big\|\Big\{u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}\Big\|^p_{l_p}\,dt$$

$$= \|\widetilde{h}\|^p_{l_p\to l_p}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big|^p\,dt = \|\widetilde{h}\|^p_{l_p\to l_p}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\Big|u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big|^p\,dt$$

$$= \|\widetilde{h}\|^p_{l_p\to l_p}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{-(n+1)\delta}^{-n\delta}\Big|u\Big(t+\frac{\delta}{2}+n\delta\Big)\Big|^p\,dt = \|\widetilde{h}\|^p_{l_p\to l_p}\cdot\|u\|^p_{L_p(R)}.$$

Отсюда следует неравенство (0.2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для любого $u \in L_p(R)$ имеем

$$H_\delta(H_\delta u)(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(H_\delta u)(t+(k+1/2)\delta)}{k+1/2} = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{k+1/2}\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{u(t+(k+m+1)\delta)}{m+1/2}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{u(t+(k+m+1)\delta)}{(k+1/2)(m+1/2)} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{u(t+n\delta)}{(k+1/2)(n-k-1/2)}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(k+1/2)(n-k-1/2)}\Big)u(t+n\delta). \quad (2.2)$$

Так как при $n = 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(k+1/2)(n-k-1/2)} = -4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\pi^2,$$

а при $n \neq 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(k+1/2)(n-k-1/2)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{k+1/2} + \frac{1}{n-k-1/2}\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\le\mathbb{N}}\Big(\frac{1}{k+1/2} + \frac{1}{n-k-1/2}\Big) = 0,$$

то из (2.2) следует равенство (0.3). Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Для удобства изложения доказательство проведем в три этапа.

Первый этап. Докажем, что оператор

$$(H^*\varphi)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$$

ограниченно действует в пространстве $L_2(T)$. Действительно, для любого $\varphi \in L_2(T)$ имеем

$$(H^*\varphi)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\Big(\frac{1}{t-\tau} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}\Big)\varphi(\tau)\,d\tau + (S\varphi)(t)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} - \frac{2}{\tau}\Big)\varphi(t+\tau)\,d\tau + (S\varphi)(t). \tag{2.3}$$

Так как функция $K_0(\tau) = \operatorname{ctg}\dfrac{\tau}{2} - \dfrac{2}{\tau}$ при $\tau \neq 0$, $K_0(0) = 0$, непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то из (2.3) следует ограниченность оператора H^* в $L_2(T)$.

Рассмотрим последовательность операторов

$$(H_n^*\varphi)(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n-1}\frac{1}{-k-1/2}\varphi\Big(t + \frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big), \quad t\in T, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку

$$(H_n^*\varphi)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1}\Big[\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi(2k+1)}{4n}\Big) - \frac{4n}{\pi(2k+1)}\Big]\varphi\Big(t + \frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big) + (S_{2n}\varphi)(t)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1} K_0\Big(\frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big)\varphi\Big(t + \frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big) + (S_{2n}\varphi)(t),$$

то из [8, теорема 2] и леммы 2 следует, что последовательность операторов H_n^* сильно сходится к оператору H^* в $L_2(T)$.

Второй этап. Докажем, что последовательность операторов

$$(H_{\pi/(4n)}u)(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{-k-1/2}u\Big(t + \frac{\pi(k+1/2)}{4n}\Big), \quad t\in R, \quad n\in\mathbb{N},$$

сильно сходится к оператору H в $L_2(R)$. Сначала предположим, что $\operatorname{supp} u \subset [-\pi/4,\pi/4]$. Через φ обозначим 2π-периодическую функцию, совпадающую с функцией u на отрезке $[-\pi/4,\pi/4]$ и равную нулю в $T\backslash[-\pi/4,\pi/4]$. Так как

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = (H^*\varphi)(t), \tag{2.4}$$

$$(H_{\pi/n}u)(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n-1}\frac{1}{-k-1/2}u\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n-1}\frac{1}{-k-1/2}\varphi\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big) = (H_n^*\varphi)(t), \tag{2.5}$$

и последовательность операторов H_n^* сильно сходится к оператору H^* в $L_2(T)$, то из равенств (2.4), (2.5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при больших значениях n выполняется неравенство

$$\|H_{\pi/n}u - Hu\|_{L_2([-\pi/2,\pi/2])} = \|H_n^*\varphi - H^*\varphi\|_{L_2([-\pi/2,\pi/2])} \le \|H_n^*\varphi - H^*\varphi\|_{L_2(T)} < \varepsilon. \tag{2.6}$$

В силу неравенств

$$|(Hu)(t)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big|\frac{u(\tau)}{\tau-t}\Big|\,d\tau \le \frac{\|u\|_{L_1([-\pi/4,\pi/4])}}{\pi(|t|-\pi/4)}, \quad |t| > \pi/4,$$

$$|(H_{\pi/n}u)(t)| \le \frac{1}{\pi}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}\colon\, t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\frac{1}{|k+1/2|}\Big|u\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)\Big|$$

$$\le \frac{1}{n(|t|-\pi/4)}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}\colon\, t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\Big|u\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)\Big|, \quad |t| > \frac{\pi}{4},$$

получим, что для любого $M \ge 2\pi$ имеют место неравенства

$$\|Hu\|_{L_2([M,\infty])} \le \frac{\|u\|_{L_1([-\pi/4,\pi/4])}}{\pi}\Big(\int\limits_M^\infty\frac{dt}{(t-\pi/4)^2}\Big)^{1/2} = \frac{\|u\|_{L_1([-\pi/4,\pi/4])}}{\pi\sqrt{M-\pi/4}},$$

$$\|H_{\pi/n}u\|_{L_2([M,\infty])} \le \frac{1}{n}\Big[\int\limits_M^\infty\frac{1}{(t-\pi/4)^2}\Big(\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}\colon\, t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\Big|u\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)\Big|\Big)^2dt\Big]^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\int\limits_M^\infty\frac{1}{(t-\pi/4)^2}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}\colon\, t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\Big|u\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)\Big|^2dt\Big]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{p=0}^\infty\int\limits_{M+\frac{\pi p}{n}}^{M+\frac{\pi(p+1)}{n}}\frac{1}{(t-\pi/4)^2}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}\colon\, t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\Big|u(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)\Big|^2dt\Big]^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{(M+\pi p/n-\pi/4)^2}\int\limits_{M+\frac{\pi p}{n}}^{M+\frac{\pi(p+1)}{n}}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}\colon\, t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\Big|u\Big(t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\Big)\Big|^2dt\Big]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{(M+\pi p/n-\pi/4)^2}\|u\|^2_{L_2([-\pi/4,\pi/4])}\Big]^{1/2}$$

$$\le \frac{\|u\|_{L_2([-\pi/4,\pi/4])}}{\sqrt{n}}\Big(\frac{n/\pi}{M-\pi/4-\pi/n}\Big)^{1/2} = \frac{\|u\|_{L_2([-\pi/4,\pi/4])}}{\sqrt{\pi}\sqrt{M-\pi/4-\pi/n}}.$$

Аналогичные неравенства выполняются для $\|Hu\|_{L_2([-\infty,-M])}$ и $\|H_{\pi/n}u\|_{L_2([-\infty,-M])}$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $m_0\ge 4$ такое, что

$$\|Hu\|_{L_2(R\setminus[-\pi m_0/2,\pi m_0/2])}<\varepsilon,\quad \|H_{\pi/n}u\|_{L_2(R\setminus[-\pi m_0/2,\pi m_0/2])}<\varepsilon. \tag{2.7}$$

Так как функция $1/(t-\tau)$ непрерывна на прямоугольнике $[2\pi,2\pi m_0]\times[-\pi,\pi]$, то в силу следствия 2 последовательность операторов

$$\big(\widetilde{\mathrm{K}}_n\varphi\big)(t)=\frac{2}{n}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\in[-\pi,\pi]\right\}}\frac{\varphi(t+\pi(2k+1)/n)}{-\pi(2k+1)/n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\in[-\pi,\pi]\right\}}\frac{\varphi(t+\pi(2k+1)/n)}{-k-1/2}$$

сильно сходится к оператору

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$$

в пространстве $L_2([2\pi,2\pi m_0])$. Обозначим через ψ функцию, определенную на отрезке $[-\pi,\pi]$ равенством $\psi(\tau)=u(\tau/4)$. Тогда для любого $t\in[\pi/2,\pi m_0/2]$ в силу равенств

$$(Hu)(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(\tau/4)}{4t-\tau}\,d\tau=(\mathrm{K}\psi)(4t),$$

$$\big(H_{\pi/(4n)}u\big)(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(k+1/2)}{4n}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}}\frac{u(t+\pi(k+1/2)/4n)}{-k-1/2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ 4t+\frac{\pi(k+1/2)}{n}\in[-\pi,\pi]\right\}}\frac{\psi(4t+\pi(k+1/2)/n)}{-k-1/2}=\big(\widetilde{\mathrm{K}}_n\psi\big)(4t)$$

получим, что последовательность операторов $H_{\pi/4n}$ сильно сходится к оператору H в $L_2([\pi/2,\pi m_0/2])$. Следовательно, при больших значениях n имеет место неравенство

$$\|H_{\pi/(4n)}u-Hu\|_{L_2([\pi/2,\pi m_0/2])}<\varepsilon. \tag{2.8}$$

Аналогично доказывается, что при больших значениях n имеет место неравенство

$$\|H_{\pi/(4n)}u-Hu\|_{L_2([-m_0\pi/2,\pi/2])}<\varepsilon. \tag{2.9}$$

Из неравенств (2.6)–(2.9) следует, что если $\operatorname{supp} u\subset[-\pi/4,\pi/4]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\|H_{\pi/(4n)}u-Hu\|_{L_2(R)}=0. \tag{2.10}$$

Теперь предположим, что $\operatorname{supp} u\subset[-\pi p/4,\pi p/4]$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$. Обозначим через u_0 функцию, определенную на отрезке $[-\pi/4,\pi/4]$ равенством $u_0(\tau)=u(p\tau)$. Тогда для любого $t\in R$ имеем

$$(Hu)(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi p/4}^{\pi p/4}\frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{u(p\tau)}{t-p\tau}\,p d\tau=(Hu_0)\Big(\frac{t}{p}\Big),$$

$$\big(H_{\pi/(4n)}u\big)(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ t+\frac{\pi(k+1/2)}{4n}\in\left[-\frac{\pi p}{4},\frac{\pi p}{4}\right]\right\}}\frac{u(t+\pi(k+1/2)/4n)}{-k-1/2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{\left\{k\in\mathbb{Z}:\ \frac{t}{p}+\frac{\pi(k+1/2)}{4pn}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right\}} \frac{u_0(t/p+\pi(k+1/2)/4pn)}{-k-1/2} = \left(H_{\pi/(4pn)}u_0\right)\left(\frac{t}{p}\right).$$

Так как равенство (2.10) выполняется для функции u_0, то отсюда получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\|H_{\pi/(4n)}u - Hu\right\|_{L_2(R)} = \sqrt{p} \lim_{n\to\infty} \left\|H_{\pi/(4pn)}u_0 - Hu_0\right\|_{L_2(R)} = 0.$$

Наконец, рассмотрим общий случай, т. е. докажем, что равенство (2.10) выполняется для любого $u \in L_2(R)$. Для любого $u \in L_2(R)$ и $\varepsilon > 0$ существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|u - u_p\|_{L_2(R)} < \varepsilon, \tag{2.11}$$

где через u_p обозначено сужение функции u на отрезок $[-\pi p/4, \pi p/4]$. Так как для функции u_p выполняется равенство (2.10) и из неравенств (0.2), (2.11) следует оценка

$$\left\|H_{\pi/(4n)}(u-u_p) - H(u-u_p)\right\|_{L_2(R)} \le \left[\left\|H_{\pi/(4n)}\right\|_{L_2(R)\to L_2(R)} + \|H\|_{L_2(R)\to L_2(R)}\right]\|u-u_p\|_{L_2(R)}$$

$$< \varepsilon\left[\left\|\widetilde{h}\right\|_{l_p\to l_p}\|H\|_{L_2(R)\to L_2(R)}\right],$$

то получим, что равенство (2.10) выполняется и для функции u.

Третий этап. Докажем, что для любого $\delta > 0$ последовательность операторов $\{H_{\delta/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сильно сходится к оператору H в $L_2(R)$. Для любого $u \in L_2(R)$ через u^* обозначим функцию, определенную равенством $u^*(t) = u(4\delta t/\pi)$. Тогда для любого $t \in R$ имеем

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_R \frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_R \frac{u^*(\pi\tau/(4\delta))}{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_R \frac{u^*(\tau)}{\pi t/(4\delta)-\tau}\,d\tau = (Hu^*)\left(\frac{\pi t}{4\delta}\right), \tag{2.12}$$

$$\left(H_{\delta/n}u\right)(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{u(t+\delta(k+1/2)/n)}{-k-1/2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{u^*(\pi t/(4\delta)+\pi(k+1/2)/(4n))}{-k-1/2} = \left(H_{\pi/(4n)}u^*\right)\left(\frac{\pi t}{4\delta}\right). \tag{2.13}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\|H_{\pi/(4n)}u^* - Hu^*\|_{L_2(R)} = 0$, то из равенств (2.12), (2.13) получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\|H_{\delta/n}u - Hu\|_{L_2(R)} = 0.$$

Теорема 3 доказана.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность Н. А. Ильясову за полезное обсуждение и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Riesz M.** Sur les fonctions conjuguées. *Math. Zeit.*, 1928, vol. 27, no. 1, pp. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
2. **Гарнетт Дж.** Ограниченные аналитические функции. М.: Мир. 1984. 469 с.
3. **Kolmogoroff A.** Sur les fonctions harmoniques conjuguees et les series de Fourier // Fund. Math. 1925. Vol. 7, iss. 1. P. 24–29.
4. **Лифанов И.К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус. 1995. 520 с.
5. **Бойков И.В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза. Пензенский Государственный Университет. 2004. 297 с.
6. **Алиев Р.А.** Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 6. С. 803–824.

7. **Ермолаева Л.Б.** Решение сингулярных интегральных уравнений методом осциллирующих функций // Изв. вузов. Математика. 2009. Vol. 12. С. 28–35.
8. **Алиев Р.А., Амрахова А.Ф.** Конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 14–25.
9. **Kress V.R., Martensen E.** Anwendung der rechteckregel auf die reelle Hilbert transformation mit unendlichem interval // Z. Angew. Math. Mech. 1970. Vol. 50. P. 61–64. doi: 10.1002/zamm.19700500125 .
10. **Bialecki B.** Sinc quadratures for Cauchy principal value integrals // Numerical Integration, Recent Developments, Software and Applications / eds. T. O. Espelid and A. Genz. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. (NATO ASI Ser., Ser. C: Math. Phys. Sci.; vol. 357.) doi: 10.1007/978-94-011-2646-5_7 .
11. **Stenger F.** Approximations via Whittaker's cardinal function // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 17, no. 3. P. 222–240. doi: 10.1016/0021-9045(76)90086-1 .
12. **Stenger F.** Numerical methods based on Whittaker cardinal or Sinc functions // SIAM Review. 1981. Vol. 23, no. 2. P. 165-224.
13. **Stenger F.** Numerical methods based on Sinc and analytic functions. Springer, N Y: Springer–Verlag, 1993. 565 p. (Springer Ser. in Comput. Math.; vol. 20.) doi: 10.1007/978-1-4612-2706-9 .
14. **Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R.** Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 176, no. 2. P. 227–251. doi: 10.2307/1996205 .
15. **Aliev R.A., Amrahova A.F.** On the summability of the discrete Hilbert transform // Ural Math. J. 2018. Vol. 4, no. 2. P. 6–12. doi: 10.15826/umj.2018.2.002 .
16. **Andersen K.F.** Inequalities with weights for discrete Hilbert transforms // Canad. Math. Bull. 1977. Vol. 20, no. 1. P. 9–16. doi: 10.4153/CMB-1977-002-2 .
17. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1, 616 с.; Т. 2, 538 с.

Поступила 8.04.2019
После доработки 6.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Алиев Рашид Авязага оглы
д-р мат. наук, доцент
Бакинский государственный университет;
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики НАН Азербайджана
г. Баку, Азербайджан
e-mail: aliyevrashid@mail.ru

Гаджиева Чинара Ариф кызы
аспирант
Бакинский инженерный университет
г. Баку, Азербайджан
e-mail: hacizade.chinara@gmail.com

REFERENCES

1. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées. *Math. Zeit.*, 1928, vol. 27, no. 1, pp. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
2. Garnett J. *Bounded analytic functions.* N Y: Acad. Press, 1981, 466 p. ISBN: 0-122-76150-2 . Translated to Russian under the title *Ogranichennye analiticheskie funktsii*, Moscow: Mir Publ., 1984, 469 p.
3. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fundamenta Mathematicae*, 1925, vol. 7, no. 1, pp. 24–29.
4. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyi eksperiment* [The method of singular equations and numerical experiments]. Moscow: Yanus Publ., 1995, 520 p. ISBN: 5-88929-003-7 .
5. Boikov I.V. *Priblizhennye metody resheniya singulyarnykh integral'nykh uravnenii* [Approximate methods for solving singular integral equations]. Penza: Penz. Gos. Univ. Publ., 2004, 297 p. ISBN: 5-94170-059-8/hbk .

6. Aliyev R.A. A new constructive method for solving singular integral equations. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 6, pp. 749–770. doi: 10.1007/s11006-006-0088-5 .
7. Ermolaeva L.B. Solution of singular integral equations by the method of oscillating functions. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 2009, vol. 53, no. 12, pp. 23–29. doi: 10.3103/S1066369X09120044 .
8. Aliev R.A., Amrakhova A.F. A constructive method for the solution of singular integral equations with Hilbert kernel. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 14–25 (in Russian).
9. Kress V.R., Martensen E. Anwendung der rechteckregel auf die reelle Hilbert transformation mit unendlichem interval. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1970, vol. 50, pp. 61–64. doi: 10.1002/zamm.19700500125 .
10. Bialecki B. Sinc quadratures for Cauchy principal value integrals. In: T.O. Espelid and A. Genz (eds.), *Numerical Integration, Recent Developments, Software and Applications*, NATO ASI Series, Series C: Math. Phys. Sci., vol. 357. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992, pp. 81–92. doi: 10.1007/978-94-011-2646-5_7 .
11. Stenger F. Approximations via Whittaker's cardinal function. *J. Approx. Theory*, 1976, vol. 17, no. 3, pp. 222–240. doi: 10.1016/0021-9045(76)90086-1 .
12. Stenger F. Numerical methods based on Whittaker cardinal or Sinc functions. *SIAM Review*, 1981, vol. 23, no. 2, pp. 165–224. doi: 10.1137/1023037 .
13. Stenger F. *Numerical methods based on Sinc and analytic functions*. Springer Ser. in Comput. Math., vol. 20, N Y: Springer-Verlag, 1993, 565 p. doi: 10.1007/978-1-4612-2706-9 .
14. Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973, vol. 176, no. 2, pp. 227–251. doi: 10.2307/1996205 .
15. Aliev R.A., Amrahova A.F. On the summability of the discrete Hilbert transform. *Ural Math. J.*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 6–12. doi: 10.15826/umj.2018.2.002 .
16. Andersen K.F. Inequalities with weights for discrete Hilbert transforms. *Canad. Math. Bull.*, 1977, vol. 20, no. 1, pp. 9-16. doi: 10.4153/CMB-1977-002-2 .
17. Zygmund A. *Trigonometric series,* 2nd ed. N Y: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie rjady*, Moscow: Mir Publ., 1965, vol. I, 615 p.; vol. II, 537 p.

Received April 8, 2019
Revised May 6, 2019
Accepted May 13, 2019

Rashid Avyazaga oglu Aliev, Dr. Math. Sci., Baku State University, Baku, AZ1148 Azerbaijan; Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, AZ1141 Azerbaijan,
e-mail: aliyevrashid@mail.ru .

Chinara Arif kizi Gadjieva, doctoral student, Baku Engineering University, Baku, AZ0102 Azerbaijan,
e-mail: hacizade.chinara@gmail.com .

Cite this article as: R. A. Aliev, Ch. A. Gadjieva. On the approximation of the Hilbert transform, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 30–41 .