ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.518.832

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТОМ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ВСПЛЕСКОВ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе представлен численный метод восстановления бигармонических функций в круге по непрерывным граничным значениям самих функций и их нормальных производных с помощью гармонических в круге всплесков, интерполяционных на границе круга, по двоично-рациональным сеткам. При этом разложения решений краевых задач в громоздкие интерполяционные ряды по базису всплесков свернуты в последовательности их частичных сумм, компактно представимых по базисам подпространств соответствующего кратномасштабного анализа (КМА) пространств Харди $h_\infty(K)$ гармонических в круге функций. Получены эффективные оценки аппроксимации решений частичными суммами любого порядка через наилучшие приближения граничных функций тригонометрическими полиномами чуть меньшего порядка. Это позволяет для практического обеспечения требуемой точности представления искомых бигармонических функций заранее выбрать масштабирующий параметр соответствующего подпространства КМА. Интерполяционная проекция на это подпространство кроме точности определяет простое аналитическое представление соотвествующих частичных сумм через подходящие сжатия и сдвиги масштабирующей функции, минуя сложные итерационные процедуры численного построения коэффициентов разложения граничных функций в ряды по интерполяционным всплескам. В работе выписаны решения с помощью интерполяционных и интерполяционно-ортогональных всплесков, построенных на базе всплесков Мейера. Вторые из них выгоднее использовать в случае, если граничные значения краевой задачи известны приближенно, например, получены экспериментально. Тогда можно будет использовать обычные хорошо известные процедуры дискретных ортогональных всплеск-преобразований для анализа и уточнения (корректировки) граничных значений. Для численной реализации предлагаемый метод значительно проще решения краевых задач с помощью ортогональных всплесков.

Ключевые слова: бигармонические функции, краевые задачи, интерполяционные всплески, кратномасштабный анализ (КМА).

Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A numerical method for the solution of boundary value problems for a homogeneous equation with the squared Laplace operator with the use of interpolation wavelets.

We present an effective numerical method for the recovery of biharmonic functions in a disk from continuous boundary values of these functions and of their normal derivatives using wavelets that are harmonic in the disk and interpolating on its boundary on dyadic rational grids. The expansions of solutions of boundary value problems into cumbersome interpolation series in the wavelet basis are folded into sequences of their partial sums that are compactly presentable in the subspace bases of the corresponding multiresolution analysis (MRA) of Hardy spaces $h_\infty(K)$ of functions harmonic in the disk. Effective estimates are obtained for the approximation of solutions by partial sums of any order in terms of the best approximation of the boundary functions by trigonometric polynomials of a slightly smaller order. As a result, to provide the required accuracy of the representation of the unknown biharmonic functions, one can choose in advance the scaling parameter of the corresponding MRA subspace such that the interpolation projection to this space defines a simple analytic representation of the corresponding partial sums of interpolation series in terms of appropriate compressions and shifts of the scaling functions, skipping complicated iterative procedures for the numerical construction of the coefficients of expansion of the boundary functions into series in interpolation wavelets. We write solutions using interpolation and interpolation-orthogonal wavelets based on modified Meyer wavelets, the last are convenient to apply if the boundary values of the boundary value problem are given approximately, for example, are found experimentally. In this case, one can employ the usual, well-known procedures of discrete orthogonal wavelet transformations for the analysis and refinement (correction) of the boundary values.

Keywords: biharmonic function, boundary value problems, interpolation wavelets, multiresolution analysis (MRA).

MSC: 42A10, 41A17, 41A25, 41A27

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-198-204

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Интерполяционные свойства интерполяционных и интерполяционно-ортогональных периодических всплесков, построенных в [1] на базе классических всплесков Мейера (в редакции К. И. Осколкова и Д. Оффина из [2]) были уже применены авторами в работе “Интерполяционные всплески в краевых задачах” (см. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2016, Т. 22, № 4, С. 257–268) для решения в круге краевой задачи Дирихле. Разработанная там методика достаточно просто распространяется на краевые задачи для бигармонических функций. В помощь читателям напомним кратко необходимые для дальнейшего определения и формулы из тех работ.

Элементы интерполяционных 2π-периодических базисов $\big\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\big\}$ ($s=1,2$ или 3) подпространств V_s^j ($j\in\mathbb{Z}_+$) после продолжения с окружности $z=e^{ix}$ в круг $K=\{z=re^{ix}\colon 0\le r<1\}$ определяются так:

$$\Phi_3^{j,k}(r,x)=2^{-j}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon}\widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)r^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}=2^{-j+1}\bigg(\frac12+\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^+}\widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)r^{\nu}\cos\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg),$$

$$\Phi_2^{j,k}(r,x)=\Phi_3^{j,k}(r,x)+2^{-j}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon}(i\,\mathrm{Sign}\,\nu)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\Big(\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}-1\Big)+\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}+1\Big)\Big)r^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}$$

$$=\Phi_3^{j,k}(r,x)-2^{-j+1}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^1}\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}-1\Big)r^{\nu}\sin\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big).$$

Здесь ε — любое фиксированное число из промежутка $(0,1/3]$; $\Delta_\varepsilon=\{\omega\colon|\omega|<(1+\varepsilon)/2\}$, $\Delta_\varepsilon^+=\Delta_\varepsilon\cap(0,(1+\varepsilon)/2)$, $\Delta_\varepsilon^1=((1-\varepsilon)/2,(1+\varepsilon)/2)$; определенная на $\mathbb{R}$ вещественная, четная, непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ сосредоточена на Δ_ε, тождественна единице при $|\omega|\le(1-\varepsilon)/2$, обладает следующими свойствами:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega+n)\equiv 1,$$

имеет центр симметрии графика функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ на промежутке Δ_ε^1 в точке $\omega=1/2$ и ограниченную вариацию производной $(\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega))'_\omega$. Функции $\Phi_2^{j,k}(x)$ превращаются в $\Phi_1^{j,k}(x)$, если в выписанной выше для них формуле функцию $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ заменить на функцию $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$ — тоже мейеровского типа, полагая

$$\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)=\frac{1}{\sqrt2}\big(1+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)-\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)-\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)\big)^{1/2}.$$

Поэтому доказательства полученных ниже результатов достаточно проводить при $s=2$ и 3.

При $r=1$ и каждом $s=1,2$ или 3, $j\in\mathbb{Z}_+$ эти функции интерполяционные на периоде $[0,2\pi)$ на сетке $(2\pi l)/2^j$:

$$\Phi_s^{0,0}(r,x)\equiv 1,\quad \Phi_s^{j,k}\Big(1,\frac{2\pi l}{2^j}\Big)=\delta_{kl}\quad (k,l=0,1,\dots 2^j-1).$$

В работе мы используем также соответствующие интерполяционные всплески $\Psi_s^{j,k}(1,x)=\Phi_s^{j+1,2k+1}(1,x)$ ($k=\overline{0,2^j-1}$), которые при каждом $j\in\mathbb{Z}_+$ и $s=1,2$ или 3 образуют интерполяционный базис подпространств W_s^j — прямых дополнений $V_s^j\subset V_s^{j+1}$ до V_s^{j+1}, а совокупность этих функций по всем $j\in\mathbb{Z}_+$ и $k=\overline{0,2^j-1}$ вместе с $\Phi_s^{0,0}(1,x)\equiv 1$ образуют интерполяционный базис пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Продолженные внутрь круга K до гармонических полиномов, функции $\equiv 1$ и $\Psi_s^{j,k}(r,x)$ образуют базис пространств Харди $h_\infty(\overline{K})$ гармонических в K и непрерывных в $\overline{K}$ функций.

Краевая задача для бигармонических функций $u(r,x)$ в круге K в классической постановке (см. [3, гл. 4]) выглядит так:

$$\Big\{\Delta^2u=0 \text{ в } K,\ u\Big|_{\partial K}=g(x),\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\partial K}=g_1(x)\Big\},\tag{1}$$

где $g(x)$ и $g_1(x) \in C_{2\pi}$, $g'(x) \in C_{2\pi}$. Требуется найти четырежды непрерывно дифференцируемую в K функцию $u(r,x)$, непрерывную в $\overline{K}$ вместе с первыми частными производными, удовлетворяющую выписанным в (1) условиям. Известно (см., например, [3, гл. 4]), что решение задачи в единичном круге можно представить в виде

$$u(r,x) = (r^2-1)u_1(r,x) + u_2(r,x), \tag{2}$$

где u_1 и u_2 — гармонические в K функции, непрерывные в $\overline{K}$. Отсюда и из постановки задачи (1) следует, что функции u_1 и u_2 должны удовлетворять следующим граничным условиям: u_1, u_2 и $\partial u_2/\partial r$ непрерывны в $\overline{K}$ и

$$u_2(1,x) = g(x), \quad 2u_1(1,x) + \frac{\partial u_2}{\partial r}(1,x) = g_1(x). \tag{3}$$

Первым условием из (3) функция $u_2(r,x)$ однозначно определяется и вместе с функцией $g_1(x)$ определяет граничное условие для $u_1(r,x)$. Перепишем вначале второе условие (3) в следующей форме:

$$u_1(1,x) = \frac{1}{2}\Big(g_1(r,x)\Big|_{r=1} - \Big(r\frac{\partial u_2(r,x)}{\partial r}\Big)\Big|_{r=1}\Big), \tag{4}$$

где $g_1(r,x)$ — гармоническая в K функция с граничным значением $g_1(x) \in C_{2\pi}$. По доказанному ранее (см. работу, указанную в начале этой статьи) при решении краевых задач Дирихле с применением интерполяционных всплесков имеет место равенство

$$g_1(r,x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} g_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(r,x) := \lim_{j\to\infty} S_{2^j,s}(r,x;g_1)$$

с равномерно сходящимся по x и по r в $\overline{K}$ пределом. Аналогично

$$u_2(r,x) = g(r,x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(r,x) := \lim_{j\to\infty} S_{2^j,s}(r,x;g). \tag{5}$$

Обратим внимание, что в предшествующей (5) формуле и в (5) под знаком предела стоят интерполяционные проекции $P^{\mathrm{int}}_{V_s^j} g_1$ и $P^{\mathrm{int}}_{V_s^j} g$ функций $g_1(x)$ и $g(x)$, а обозначать их через $S_{2^j,s}(1,x;g_1)$ и $S_{2^j,s}(1,x;g)$ оправдано тем, что (как нетрудно проверить) для любой функции $f(x) \in C_{2\pi}$ проекция $P^{\mathrm{int}}_{V_s^j} f(x)$ совпадает с частичной суммой порядка 2^j разложения $f(x)$ в интерполяционный ряд по системе $\{1, \Phi_s^{j+1,2k+1} \colon k = \overline{0, 2^j-1},\ j \in \mathbb{Z}_+\}$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(f\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}\Big) - S_{2^j,s}\Big(1, \frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}; f\Big)\Big)\Phi_s^{j+1,2k+1}(1,x)$$

Поскольку из работы [1] известно, что при $j \to \infty$

$$\Big\|u_2(1,x) - \sum_{k=0}^{2^j-1} g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_1^{j,k}(x)\Big\|_{c_{2\pi}} = O(E_{N_{\varepsilon,j}}(g)_{C_{2\pi}}) \quad (N_{\varepsilon,j} = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]),$$

где $E_n(f)_{c_{2\pi}}$ — наилучшее равномерное приближение функций $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n, то в силу принципа максимума модуля для гармонических функций такая же оценка заведомо будет верна и при любом $0 \le r < 1$:

$$\|u_2(r,x) - S_{2^j,s}(r,x;g)\|_{C_{2\pi}} = O\big(E_{N_{\varepsilon,j}}(g)_{C_{2\pi}}\big).$$

У гармонической в K функции

$$r\frac{\partial u_2(r,x)}{\partial r} = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big) r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_s^{j,k}(r,x)$$

значения на границе круга K совпадают с $(\partial u_2(r,x))/\partial r\Big|_{r=1}$. Отсюда и из (4) получаем

$$u_1(r,x) = \frac{1}{2}\Big(g_1(r,x) - r\frac{\partial u_2(r,x)}{\partial r}\Big) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big[g_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(r,x) - g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big) r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_s^{j,k}(r,x)\Big]. \quad (6)$$

Объединяя эту формулу с (2) и (5), получаем решение задачи (1)

$$u(r,x) = \Big(\frac{1}{2}g_1(r,x) - \frac{1}{2}r\frac{\partial u_2(r,x)}{\partial r}\Big)(r^2-1) + g(r,x)$$

$$= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(\frac{1}{2}(r^2-1)g_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big) + g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big)\Phi_s^{j,k}(r,x) - \frac{1}{2}(r^2-1)\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big) r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_s^{j,k}(r,x). \quad (7)$$

Чтобы воспользоваться полученными оценками уклонения $\|f(r,x) - S_{2^j}(r,x;f(1,\cdot))\|_{C_{2\pi}}$ из цитированной ранее работы авторов, полезно представить последнюю сумму из (7) через интерполяционную проекцию на V_s^j. Для этого заметим, что если $u_2(r,x)$ и $v_2(r,x)$ — сопряженные гармонические функции, т. е. такие, что $f(z) = f(re^{ix}) = u_2(r,x) + iv_2(r,x)$ — аналитическая функция, то в силу уравнений Эйлера — Даламбера в полярных координатах имеем

$$r\frac{\partial u_2(r,x)}{\partial r} = \frac{\partial v_2(r,x)}{\partial x}. \quad (8)$$

Поскольку

$$u_2(1,x) = g(x) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(1,x),$$

то тригонометрически сопряженная к ней функция $\widetilde{g}(x)$, если она непрерывно дифференцируема, определяет в силу (8) граничные значения гармонической (как показано выше) функции $r\partial u_2(r,x)/\partial r$

$$r\frac{\partial u_2(r,x)}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial v_2(r,x)}{\partial x}\Big|_{r=1} = \frac{d}{dx}\widetilde{g}(x) := \widetilde{g}'(x).$$

Поэтому при дополнительном ограничении на $g(x)$, согласно которому производная $\widetilde{g}'(x)$ ее сопряженной функции непрерывна, в дополнение к (7) получаем

$$u(r,x) = \Big(\frac{1}{2}g_1(r,x) - \frac{1}{2}\widetilde{g}'(r,x)\Big)(r^2-1) + g(r,x), \quad (9)$$

где

$$\widetilde{g}'(r,x) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\widetilde{g}'\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(r,x). \quad (10)$$

Полученные результаты сформулируем как следующее утверждение.

Теорема. *Если функции $g(x)$ и $g_1(x)$, определяющие граничные условия на бигармоническую в круге K функцию $u(r,x)$, непрерывные 2π-периодические, то решение задачи* (1) *внутри K определяется формулой* (7). *Если у тригонометрически сопряженной к $g(x)$ функции $\widetilde{g}(x)$ производная $\widetilde{g}'(x)$ непрерывна, то $u(r,x)$ представима равномерным в $\overline{K}$ пределом*

$$u(r,x)=\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big[\frac{1}{2}(r^2-1)\Big(g_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)-\widetilde{g}'\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big)+g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big]\Phi_s^{j,k}(r,x). \qquad (11)$$

Последняя формула является результатом объединения формул (9) и (10).

Отметим, что для проверки условия на $\widetilde{g}'(x)$ необязательно исследовать предел второй суммы в (7) при $r=1$ и $j\to\infty$. Например, если последовательность $\{C_n(\widetilde{g}')\}$ коэффициентов Фурье ряда $\widetilde{g}'(x)\sim\sum C_n(\widetilde{g}')e^{inx}$ принадлежит $l_1(\mathbb{Z})$, то, очевидно, $\widetilde{g}'(x)\in C_{2\pi}$.

Так как суммы, стоящие под знаком пределов в (7) и (11), получены за счет интерполяционного проектирования на V_s^j функций $g_1(x)$, $g(x)$, $\widetilde{g}'(x)$ и гармонического продолжения проекций с единичной окружности в K, то далее можно воспользоваться замечанием, сформулированным сразу после формулы (5) о совпадении интерполяционной проекции непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ на подпространство V_s^J с частичной суммой $S_{2^j,s}(1,x;f)$ разложения $f(x)$ в ряд по интерполяционным всплескам

$$\Psi_s^{j,k}(x)=\Psi_s^{J,k}(1,x),$$

где

$$\Psi_s^{j,k}(r,x)=\Phi_s^{j+1,2k+1}(r,x)=2^{-j-1}\sum_{\nu\in 2^{j+1}\Delta_\varepsilon}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)r^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi(2k+1)/2^{j+1})}$$

и

$$\Psi_s^{j,k}\Big(\frac{l}{2^{j+1}}\Big)=\delta_{l,2k+1}.$$

Кроме того, воспользуемся оценками норм

$$\|S_{2^j,s}\|_{C_{2\pi}}^{C_{2\pi}}=\sup_{\|f\|_{C_{2\pi}\le 1}}\|S_{2^j,s}f(x)\|_{C_{2\pi}}$$

оператора интерполяционного проектирования на подпространство V_s^j и оценками уклонений $\|f(x)-(P_{V_J}^{\mathrm{int}}f)(x)\|_{C_{2\pi}}$ из приведенной в начале прежней работы авторов. По указанной схеме выводим из теоремы следующие три утверждения.

Следствие 1. *Если функции $g(x)$ и $g_1(x)$ непрерывные 2π-периодические, то решение задачи* (1) *можно представить в виде суммы двух рядов*

$$u(r,x)=\Big(\frac{1}{2}(r^2-1)g_1(0)+g(0)\Big)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big[\frac{1}{2}(r^2-1)\Big(g_1\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}\Big)$$

$$-S_{j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}};g_1\Big)\Big)+\Big(g\Big(\frac{2\pi k}{2^{j+1}}\Big)-S_{j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}};g\Big)\Big)\Big]\Psi_s^{j,k}(r,x)$$

$$-\frac{1}{2}(r^2-1)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(g\Big(\frac{2\pi k}{2^{j+1}}\Big)-S_{j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}};g\Big)\Big)r\frac{d}{dr}\Psi_s^{j,k}(r,x),$$

где $s=1,2$ или 3,

$$r\frac{\partial}{\partial r}\Psi_s^{j,k}(r,x)=r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_s^{j+1,2x+1}(r,x)=2^{-j-1}\sum_{\nu\in 2^{j+1}\Delta_\varepsilon}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)|\nu|r^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi(2k+1))/2^j},$$

причем первый ряд сходится равномерно в $\overline{K}$, а второй — внутри K.

Следствие 2. *Если* $g_1(x)$, $g(x)$ *и* $\widetilde{g}'(x)$ *— непрерывные* 2π*-периодические функции, то решение задачи* (1) *можно представить в виде равномерно сходящегося в* $\overline{K}_1$ *ряда*

$$u(r,x)=\frac{1}{2}(r^2-1)g_1(0)+g(0)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg\{g\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}\Big)-S_{2^j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}};g\Big)$$

$$+\frac{1}{2}(r^2-1)\bigg[g_1\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}\Big)-S_{2^j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}};g_1\Big)$$

$$-\Big(\widetilde{g}_1'\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}}\Big)-S_{2^j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{j+1}};\widetilde{g}'\Big)\Big)\bigg]\bigg\}\Psi_s^{j,k}(r,x),$$

где $s=1,2$ *или* 3.

Обозначим общую частичную сумму двух рядов из следствия 2 порядка j по их внешней сумме через $S^{[s]}_{2,j}(r,x;u)$, т. е. положим

$$S^{[s]}_{2,j}(r,x;u)=\frac{1}{2}(r^2-1)\big(S_{2^l,s}(r,x;g_1)-S_{2^l,s}(r,x;\widetilde{g}')\big)+S_{2^l,s}(r,x;g)$$

$$=\frac{1}{2}(r^2-1)g_1(0)+g(0)+\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=0}^{2^j}\bigg\{g\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{l+1}}\Big)-S_{2^j,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{l+1}};g\Big)$$

$$+\frac{1}{2}(r^2-1)\bigg[g_1\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{l+1}}\Big)-S_{2^l,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{l+1}};g_1\Big)$$

$$-\Big(\widetilde{g}_1'\Big(\frac{2\pi(2k+1)}{2^{l+1}}\Big)-S_{2^l,s}\Big(1,\frac{2\pi(2k+1)}{2^{l+1}};\widetilde{g}'\Big)\Big)\bigg]\bigg\}\Psi_s^{l,k}(r,x),$$

причем частные суммы $S_{2^j,s}(1,x;g)$, $S_{2^j,s}(1,x;g_1)$ и $S_{2^j,s}(1,x;\widetilde{g}')$ совпадают с интерполяционными проекциями на V_s^j соответствующих функций $g(x)$, $g_1(x)$ и $\widetilde{g}'(x)$.

Следствие 3. *Для погрешности аппроксимации решения* $u(r,x)$ *задачи* (1) *частичными суммами* $S^{[s]}_{2,j}(r,x;u)$ *справедливы оценки*:

$$\big\|u(r,x)-S^{[s]}_{2,j}(r,x;u)\big\|_{C_{2\pi}}\le\big(1+\|S_{2^j,s}\|^{C_{2\pi}}_{C_{2\pi}}\big)\big[\big(E_{N_{\varepsilon,j}}(g_1)_{C_{2\pi}}+E_{N_{\varepsilon,j}}(\widetilde{g}')_{C_{2\pi}}\big)(1-r^2)+E_{N_{\varepsilon,j}}(g)_{C_{2\pi}}\big],$$

где $N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, $E_n(f)_{C_{2\pi}}$ *— наилучшее приближение в* $C_{2\pi}$ *тригонометрическими полиномами порядка* $N_{j,\varepsilon}$ *функции* $f(x)$ *и*

$$\|S_{2^j,s}\|\le\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{d}{d\omega}\Big(\widehat{\varphi}^2_{\varepsilon,s}(\omega)+(\delta_{1,s}+\delta_{2,s})\big(\widehat{\varphi}_{\varepsilon,s}(\omega)\widehat{\varphi}_{\varepsilon,s}(\omega-1)\big)\Big)\Big(1+\varepsilon+\frac{4}{\pi^2}\Big)\quad(s=1,2\ \ \text{или}\ \ 3),$$

$$\widehat{\varphi}_{\varepsilon,s}(\omega)=\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(\omega)\ \ \text{при}\ \ s=2,3,\ \widehat{\varphi}_{\varepsilon,1}(\omega):=\sqrt{(1+\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(\omega)-\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(\omega-1)-\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(\omega+1))/2}\cdot\chi_{\Delta_\varepsilon}(\omega).$$

При практическом использовании полученных результатов нужно взять конкретную функцию $\widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega)$ на промежутке $[(1-\varepsilon)/2,(1+\varepsilon)/2]$, например, положив $\widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega)=((1+\varepsilon)/2-\omega)/\varepsilon$ или $\widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega)=\cos^2((\pi/2\varepsilon)(\omega-(1-\varepsilon)/2))$ при $\varepsilon\le1/3$ (или как-то иначе, в соответствии с описанными в начале статьи свойствами функции $\widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega)$). Далее, зная требуемую точность представления решения задачи (1) (с известной характеристикой гладкости граничных значений, например, принадлежность их классу Гельдера CH^α с известными C и α), определить по выписанным в следствии 3 оценкам значение параметра j. После этого останется выписать соответствующее $S^{[s]}_{2,j}(r,x)$ при каком-то $s=1,2,3$. Проще всего эти формулы и оценки определены при $s=3$. Однако, если граничные значения в задаче (1) определены экспериментально, то рекомендуем остановиться на $s=2$. Свойство ортогональности на периоде систем $\{\Phi_2^{j,k}(x)\}$ позволит применить обычное для ортогональных всплесков дискретное (прямое и обратное) всплеск-преобразование, чтобы скорректировать существенные неточности в граничных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
2. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 319–325.
3. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. 3 изд-е. М., 1966. 724 с.

Поступила 6.03.2019
После доработки 6.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Chernykh N.I., Subbotin Yu.N. *Interpolating orthogonal wavelet systems.* Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2008. Vol. 14, no. 3. pp. 153–161 (in Russian)
2. Offin D., Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets. *Constr. Approx.*, 1993, vol. 9, no. 2-3, pp. 319–325. doi: 10.1007/BF01198009 .
3. Tikhonov A.N. Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics.* Chap. 4. Repr. 1963 transl. Dover Publications, Inc., N Y, 1990, 765 p. ISBN: 0-486-66422-8 . Original Russian text (3rd ed.) published in Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki*, Moscow: Nauka Publ., 1966, 724 p.

Received March 6, 2019
Revised May 6, 2019
Accepted May 13, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00702).

Yurii Nikolaevich Subbotin, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

Nikolai Ivanovich Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: chernykh@imm.uran.ru .

Cite this article as: Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A numerical method for the solution of boundary value problems for a homogeneous equation with the squared Laplace operator with the use of interpolation wavelets, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 198–204 .