ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 519.174

О ПРЕДПИСАННОЙ (k,l)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ МУЛЬТИГРАФОВ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ НЕКОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЯХ k И l[1]

А. В. Пяткин

Исследуется задача предписанной (k,l)-раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа без петель, в которой множество допустимых цветов инциденторов каждой дуги образует целочисленный интервал. Известна гипотеза, что если длина этого интервала не меньше $2\Delta+2k-l-1$ для каждой дуги, где Δ — это максимальная степень мультиграфа, то инциденторы мультиграфа допускают (k,l)-раскраску с таким предписанием. В настоящей работе приводится доказательство этой гипотезы для мультиграфов четной максимальной степени Δ при следующих параметрах:

- $l \geq k+\Delta/2$;
- $l < k+\Delta/2, k$ или l нечетно;
- $l < k+\Delta/2, k=0$ или $l-k=2$;

Ключевые слова: предписанная раскраска, инциденторы, (k,l)-раскраска.

A. V. Pyatkin. On a list (k,l)-coloring of incidentors in multigraphs of even degree for some values of k and l.

The problem of a list (k,l)-coloring of incidentors of a directed multigraph without loops is studied in the case where the lists of admissible colors for incidentors of each arc are integer intervals. According to a known conjecture, if the lengths of these interval are at least $2\Delta+2k-l-1$ for every arc, where Δ is the maximum degree of the multigraph, then there exists a list (k,l)-coloring of incidentors. We prove this conjecture for multigraphs of even maximum degree Δ with the following parameters:

- $l \geq k+\Delta/2$;
- $l < k+\Delta/2$ and k or l is odd;
- $l < k+\Delta/2$ and $k=0$ or $l-k=2$.

Keywords: list coloring, incidentors, (k,l)-coloring.

MSC: 05C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-177-184

Введение

Все не определяемые в статье понятия из теории графов можно найти в [8; 12].

Целочисленным интервалом с шагом $\lambda>0$ длины s называется множество вида $\{a, a+\lambda, \ldots, a+(s-1)\lambda\}$, где a и λ — целые. В частности, при $\lambda=1$ имеем обычный целочисленный интервал, т. е. множество из s подряд идущих натуральных чисел, обозначаемый через $[a, a+s-1]$. *Инцидентором* в ориентированном мультиграфе $G=(V,E)$ называется упорядоченная пара (v,e), состоящая из вершины v и инцидентной ей дуги e. Такую пару удобно трактовать как половину дуги e, примыкающую к вершине v. Два инцидентора *смежны*, если они примыкают к одной и той же вершине. Если $e=uv$, то инциденторы (u,e) и (v,e) называются соответственно *начальным* и *конечным* инциденторами дуги e. Также говорим, что эти инциденторы являются *сопряженными* по отношению друг к другу. Раскраской инциденторов называется произвольное отображение f из множества инциденторов графа во множество

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект 0314-2019-0014) и РФФИ (проект 17-01-00170).

цветов Z_+. Иногда удобно задавать раскраску инциденторов как раскраску дуг парой цветов; а именно, запись $f(e) = (a, b)$ означает, что начальный инцидентор дуги e окрашен цветом a, а конечный — цветом b. Раскраска инциденторов называется *правильной*, если смежные инциденторы раскрашены в различные цвета. Пусть $k \leq l$. Правильная раскраска называется (k, l)-раскраской, если разность цветов начального и конечного инцидентора каждой дуги лежит в интервале $[k, l]$, т.е. для любой дуги e с $f(e) = (a, b)$ выполняется $k \leq b - a \leq l$. В частности, $(0, 0)$-раскраска инциденторов — это обычная раскраска ребер мультиграфа. Пусть для каждой дуги e задано подмножество допустимых цветов $L(e)$. Если (k, l)-раскраска удовлетворяет дополнительному условию $a, b \in L(e)$ для каждой дуги e с $f(e) = (a, b)$, то такая раскраска называется *предписанной*. Ясно, что при $k > 0$ и $l < \infty$ даже бесконечные множества допустимых цветов могут не гарантировать существование предписанной (k, l)-раскраски: достаточно положить $L(e) = \{t(l+1) \mid t \in Z_+\}$ для каждой дуги $e \in E$. Поэтому вводится дополнительное требование, согласно которому множество допустимых цветов представляет собой целочисленный интервал (такие предписания будем называть интервальными). Минимальная длина этого интервала, гарантирующая существование предписанной (k, l)-раскраски, называется *предписанным* (k, l)-*хроматическим числом* мультиграфа G и обозначается через $\chi^{list}_{k,l}(G)$. Другими словами, $\chi^{list}_{k,l}(G) \leq t$, если для любого назначения дугам мультиграфа G интервалов длины не меньше t в качестве множеств допустимых цветов существует предписанная (k, l)-раскраска его инциденторов.

Впервые задача раскраски инциденторов возникла в работе [5] как удобная модель для проблемы передачи сообщений в локальной сети связи. В ней была показана полиномиальная разрешимость задачи построения $(0, \infty)$-раскраски инциденторов. В [4] данная задача была обобщена до (k, l)-раскраски. Задача построения предписанной (k, ∞)-раскраски была впервые сформулирована в [3]. Там же было доказано, что $\chi^{list}_{k,\infty}(G) = k + \Delta$ при четных Δ и $\chi^{list}_{k,\infty}(G) \leq k + \Delta + 1$ при нечетных Δ. Заметим, что при $l = \infty$ требование интервальности множеств допустимых цветов можно опустить. Задача поиска предписанной (k, l)-раскраски при $l < \infty$ была поставлена в [1], где была высказана следующая

Гипотеза 1. *Для любого мультиграфа G максимальной степени Δ выполняется неравенство $\chi^{list}_{k,l}(G) \leq \max\{k + \Delta, 2\Delta + 2k - l - 1\}$.*

Эта гипотеза была доказана в [1] для $\Delta \in \{2, 4\}$, а также для четных Δ при $l = k$ и $l \geq k + \Delta - 1$. В настоящей работе верность этой гипотезы устанавливается для четных Δ при всех $l \geq k + \Delta/2$, а также при нечетных k или l, при $k = 0$ и при $l - k = 2$.

Отметим, что рассмотрение предписанной раскраски является естественным обобщением для различных задач раскраски графов. Так, предписанная раскраска вершин была введена независимо Визингом [2] и Эрдешем, Рубином и Тэйлором [9], а предписанная раскраска ребер впервые появилась в работе [6], хотя согласно [10] до этого она независимо изучалась Визингом, Гуптой, Албертсоном и Коллинзом. Предписанным раскраскам посвящен обзор [13].

1. Используемые факты и обозначения

Сначала приведем несколько известных фактов, которые будут использованы при доказательстве основного результата. *Трансверсалью* (или *системой различных представителей*) семейства множеств $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_t\}$ называется такое t-элементное множество $\{c_1, \ldots, c_t\}$, что $c_j \in C_j$ для всех $j = 1, \ldots, t$. Теорема Холла [11] утверждает, что трансверсаль существует тогда и только тогда, когда объединение любых q множеств из $\mathcal{C}$ имеет мощность не менее q. Отметим также следующий факт, который легко доказывается индукцией по q.

Утверждение 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_t$ — попарно различные целочисленные интервалы с шагом λ длины s. Тогда объединение любых q из них имеет мощность не менее $s + q - 1$.*

При работе с допустимыми цветами будем использовать следующие обозначения. Если инцидентор i дуги e раскрашен цветом a_j, то обозначим через A_j множество допустимых цветов, в которые можно раскрасить сопряженный к i инцидентор, соблюдая условие на разность цветов конечного и начального инцидентора. Формально $A_j = \{b \in L(e) \mid k \le b - a_j \le l\}$, если инцидентор i начальный, и $A_j = \{b \in L(e) \mid k \le a_j - b \le l\}$, если он конечный. Ясно, что A_j является целочисленным интервалом и $|A_j| \le l - k + 1$. Далее, если $L(e) = [a, b]$, то при раскраске начального инцидентора дуги e любым цветом $a_j \in [a, b - l]$ имеем $|A_j| = l - k + 1$. Каждый следующий цвет $(b-l+1, b-l+2, \dots, b-k)$ для начального инцидентора уменьшает количество вариантов раскраски сопряженного инцидентора на 1. Поэтому назовем цвета из интервала $[a, b-l]$ *хорошими* для начального инцидентора дуги e. По аналогичным соображениям для конечного инцидентора дуги e хорошими будут цвета $[a + l, b]$. Множество хороших цветов для инцидентора i обозначим через $B(i)$.

Если A — некоторое множество цветов, то через A^e и A^o обозначим подмножество всех четных и нечетных цветов из A соответственно.

Хотя в формулировках всех утверждений ниже раскрашиваемый мультиграф G имеет максимальную четную степень Δ, в доказательствах удобнее считать, что он является однородным степени $\Delta = 2t$ (этого всегда можно добиться, добавив к G вершины и дуги). Тогда по теореме Петерсена [8] он разбивается на t 2-факторов. Инциденторы каждого 2-фактора разобьем на черные и белые так, чтобы каждая дуга содержала один черный и один белый инцидентор и к каждой вершине примыкало по одному черному и белому инцидентору этого 2-фактора. Для каждой вершины $v \in V$ и $j = 1, \dots, t$ обозначим через $b_j(v)$ и $w_j(v)$ примыкающие к v черный и белый инциденторы j-го 2-фактора соответственно.

Ракраска инциденторов в каждом из случаев осуществляется следующим образом. Сначала красятся все черные инциденторы j-го 2-фактора (по возможности в хорошие цвета), $j = 1, \dots, t$, а потом для каждой вершины $v \in V$ докрашиваются все примыкающие к ней белые инциденторы.

2. Случай большого l

Специфика больших значений l (при $l \ge k + \Delta/2$) заключается в том, что при каждой вершине имеется немного хороших цветов, но зато множества A_j оказываются достаточно велики; поэтому приходится использовать для раскраски черных инциденторов не только хорошие цвета. Поскольку при $l \ge k + \Delta - 1$ гипотеза 1 доказана в [1], можно считать, что $l < k + \Delta - 1$, т. е. достаточно доказывать, что $\chi_{k,l}^{list}(G) \le 2\Delta + 2k - l - 1$.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф максимальной степени $\Delta = 2t$ и $l = k + s$, где $s \in [t, 2t - 2]$. Тогда $\chi_{k,l}^{list}(G) \le 4t + k - s - 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $x = 2t - s - 1$; поскольку $s \in [t, 2t - 2]$, очевидно, $x \in [1, t - 1]$. Рассмотрим произвольную дугу $e \in E$. Тогда $L(e) = [a, a + k + 2t + x - 1]$ для некоторого a. Положим $B_j(i) = [a, a + j - 1]$, если инцидентор i начальный, и $B_j(i) = [a + k + 2t + x - j, a + k + 2t + x - 1]$, если инцидентор i конечный. Заметим, что при $j \le x + 1$ множество $B_{2j-1}(i)$ состоит из хороших цветов, т. е. $|A_j| = s + 1 = 2t - x$. Если $a_j \in B_j,\ j = 2x + 2, \dots, t$, то $|A_j| = s + 2 + 2x - j$; в частности, $|A_t| = t + x + 1$.

Раскраска черных инциденторов осуществляется в t шагов, на каждом из которых красятся все черные инциденторы одного из 2-факторов. На шаге $j = 1, \dots, x + 1$ при каждой вершине u рассмотрим примыкающий к ней черный инцидентор j-го 2-фактора $b_j(u)$. Пусть сопряженный к нему белый инцидентор $w_j(v)$ примыкает к некоторой вершине $v \in V$. Раскрасим инцидентор $b_j(u)$ в хороший цвет $a_j \in B_{2j-1}(b_j(u))$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $a_j(u) \notin \{a_p(u) \mid p = 1, \dots, j - 1\}$;

(2) $A_j(v) \notin \{A_p(v) \mid p = 1, \dots, j - 1\}$.

На шаге $j = x+2, \ldots, 2x+1$ инцидентор $b_j(u)$ красится в хороший цвет $a_j \in B_{2x+1}(b_j(u))$ с соблюдением только условия (1). Наконец, на шаге $j = 2x+2, \ldots, t$ инцидентор $b_j(u)$ красится в цвет $a_j \in B_j(b_j(u))$ также с соблюдением только условия (1).

Для раскраски белых инциденторов рассмотрим произвольную вершину $v \in V$. После первого этапа (раскраски черных инциденторов) к ней примыкают инциденторы $b_1(v), \ldots, b_t(v)$ раскрашенные цветами из множества $C(v) = \{a_1(v), \ldots, a_t(v)\}$. Также для каждого белого инцидентора $w_j(v)$, $j = 1, \ldots, t$, примыкающего к v, имеется множество допустимых цветов $A_j(v)$, в которые можно раскрасить этот инцидентор, соблюдая условие на разность цветов конечного и начального инциденторов. Нужно выбрать цвета для белых инциденторов из этих множеств так, чтобы полученная раскраска была правильной, т. е. цвета всех примыкающих к v инциденторов были бы различными. Для этого положим $C_j(v) = A_j(v) \setminus C(v)$ и найдем в семействе $\mathcal{C}(v) = \{C_1(v), \ldots, C_t(v)\}$ систему различных представителей, которые и будут цветами соответствующих белых инциденторов.

Осталось показать корректность вышеописанной процедуры. При $j \le x+1$ на шаге j имеем $|B_{2j-1}(b_j(u))| = 2j-1$, причем все эти цвета хорошие, т. е. соответствующие им множества $A_j(v)$ имеют одинаковую мощность $s+1$. Следовательно, условия (1) и (2) запрещают по $j-1$ цвету, т. е. всего запрещено $2j-2$ цвета, а значит, найдется цвет $a_j(u) \in B_{2j-1}(b_j(u))$, удовлетворяющий (1) и (2). При $j > x+1$ имеется $j-1$ запрет по условию (1) при не менее чем j цветах в $B_j(b_j(u))$ (или в $B_{2x+1}(b_j(u))$ при $j \le 2x+1$), так что подходящий цвет $a_j(u)$ также найдется. Теперь убедимся в существовании трансверсали семейства $\mathcal{C}$. Заметим, что по построению $|A_i(v)| \ge |A_j(v)|$ при $i < j$ и $A_i(v) \ne A_j(v)$ при $i, j \in [1, x+1]$. Рассмотрим произвольное подмножество индексов $I \subseteq [1,t]$ мощности q. Если $q \le t-x-1$, то $|\cup_{j\in I} A_j(v)| \ge |A_{t-q+1}(v)| \ge \min\{s+1, t+x+q\} > t+q$, так как $s+1 = 2t-x$. В противном случае $q = t-x-1+r$ для некоторого $r > 0$ и I содержит не менее r индексов из $[1, x+1]$. Следовательно, $|\cup_{j\in I} A_j(v)| \ge |\cup_{j\in I\cap[1,x+1]} A_j(v)| \ge s+r = t+q$ в связи с утверждением 1 и условием (2). В любом случае, объединение любых q интервалов $A_j(v)$ содержит не менее $q+t$ элементов, а значит, мощность объединения любых q множеств из семейства $\mathcal{C}(v)$ не менее q, и по теореме Холла в нем существует трансверсаль. Теорема 1 доказана.

3. Случай малого l

При малых l, т. е. при $s = l-k < t$, при каждой вершине имеется достаточно много хороших цветов, но множества A_j получаются небольшими. Поэтому можно красить черные инциденторы только в хорошие цвета, но приходится заранее разделять по четности цвета, используемые для раскраски черных и белых инциденторов каждой вершины. Это гарантирует, что смежные белый и черный инциденторы всегда получат разные цвета.

Сначала рассмотрим случай, когда и k, и l нечетны.

Теорема 2. *Пусть $G = (V,E)$ — мультиграф максимальной степени $\Delta = 2t$ и $l = k+s$, где $s = 2s' < t$ и k нечетно. Тогда $\chi^{list}_{k,l}(G) \le 4t+k-s-1$.*

Доказательство. Поскольку k нечетно, то цвета a_j и a_j+k имеют разную четность, а значит, если черный инцидентор раскрашен хорошим четным цветом a_j, то множество A_j содержит $s'+1$ нечетных и s' четных цветов. Поэтому имеет смысл красить черные инциденторы в хорошие четные цвета, а белые — в нечетные. Поскольку $|B(i)| = 4t-2s-1$, то $|B^e(i)| \ge 2t-s-1$.

Пусть $x = t-s'$. Раскраска черных инциденторов осуществляется в t шагов, на каждом из которых красятся все черные инциденторы одного из 2-факторов. На шаге $j = 1, \ldots, x$ при каждой вершине u рассмотрим примыкающий к ней черный инцидентор j-го 2-фактора $b_j(u)$. Пусть сопряженный к нему белый инцидентор $w_j(v)$ примыкает к некоторой вершине $v \in V$.

Раскрасим инцидентор $b_j(u)$ в хороший четный цвет $a_j \in B^e(b_j(u))$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $a_j(u) \notin \{a_p(u) \mid p = 1, \ldots, j-1\}$;

(2) $A^o_j(v) \notin \{A^o_p(v) \mid p = 1, \ldots, j-1\}$.

На шаге $j = x+1, \ldots, t$ инцидентор $b_j(u)$ красится в хороший цвет $a_j \in B^e(b_j(u))$ с соблюдением только условия (1).

В качестве цветов белых инциденторов при каждой вершине $v \in V$ выбираем систему различных представителей семейства $\mathcal{C}(v) = \{A^o_1(v), \ldots, A^o_t(v)\}$.

Убедимся в корректности данной процедуры. Отметим, что любые два цвета из $B^e(b_j(u))$ отличаются как минимум на 2, а значит, разным цветам $a_j \in B^e(b_j(u))$ соответствуют разные множества $A^o_j(v)$. Поэтому при $j = 1, \ldots, x$ имеем $2(j-1) \le 2x-2 = 2t-s-2$ запрета при $|B^e(b_j(u))| \ge 2t-s-1$ допустимых цветах, так что подходящий цвет a_j найдется. При $j = x+1, \ldots, t$ число запретов $j-1 \le t-1 < 2t-s-1 \le |B^e(b_j(u))|$, что гарантирует существование a_j, удовлетворяющего условию (1). Рассмотрим произвольное подмножество индексов $I \subseteq [1,t]$ мощности q. Поскольку $|A^o_j(v)| = s'+1$ для всех j и v, можно считать, что $q = s'+r = t-x+r$, где $r > 1$. Но тогда в I есть не менее r индексов, не превосходящих x, а значит, $|\cup_{j\in I} A^o_j(v)| \ge |\cup_{j\in I\cap[1,x]} A^o_j(v)| \ge s'+r = q$ по утверждению 1 и условию (2), откуда следует существование трансверсали семейства $\mathcal{C}(v)$. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим случай нечетного $s = l-k$.

Теорема 3. *Пусть $G = (V,E)$ — мультиграф максимальной степени $\Delta = 2t$ и $l = k+s$, где $s = 2s'+1 < t$. Тогда $\chi^{list}_{k,l}(G) \le 4t+k-s-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из нечетности s следует, что если черный инцидентор раскрашен хорошим цветом a_j, то множество A_j содержит по $s'+1$ нечетных и четных цветов. Поэтому можно для каждой вершины выбирать отдельно, в четные или нечетные цвета будут краситься примыкающие к ней черные инциденторы (а белые будут краситься в цвета противоположной четности). Положим $x = t-s'$. Назовем вершину u четной, если минимальный хороший цвет для инцидентора $b_x(u)$ четный, и нечетной в противном случае. Будем красить черные инциденторы, примыкающие к четным вершинам, в четные цвета, а к нечетным вершинам — в нечетные цвета. Пусть $B'(i) = B^e(i)$, если инцидентор i примыкает к четной вершине, и $B'(i) = B^o(i)$ в противном случае. Аналогично положим $A'_j(v) = A^e_j(v)$, если вершина v нечетная, и $A'_j(v) = A^o_j(v)$, если она четная. Поскольку $|B(i)| = 4t-2s-1$ для всех инциденторов, то $|B'(b_j(u))| \ge 2t-s-1$ при $j \ne x$ и $|B'(b_x(u))| = 2t-s$. Кроме того, $A'_j(v) = s'+1$ для всех j и v.

На шаге $j = 1, \ldots, x$ красим черные инциденторы j-го 2-фактора. Пусть черный инцидентор j-го 2-фактора $b_j(u)$ примыкает к вершине u, а сопряженный к нему инцидентор $w_j(v)$ — к вершине $v \in V$. Раскрасим инцидентор $b_j(u)$ в хороший цвет $a_j \in B'(b_j(u))$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $a_j(u) \notin \{a_p(u) \mid p = 1, \ldots, j-1\}$;

(2) $A'_j(v) \notin \{A'_p(v) \mid p = 1, \ldots, j-1\}$.

На шаге $j = x+1, \ldots, t$ инцидентор $b_j(u)$ красится в хороший цвет $a_j \in B'(b_j(u))$ с соблюдением только условия (1).

В качестве цветов белых инциденторов при каждой вершине $v \in V$ выбираем систему различных представителей семейства $\mathcal{C}(v) = \{A'_1(v), \ldots, A'_t(v)\}$.

Если $j = 1, \ldots, x-1$, то имеем $2(j-1) \le 2x-4 = 2t-s-3$ запрета при $|B'(b_j(u))| \ge 2t-s-1$ допустимых цветах. При $j = x$ имеется $2x-2$ запрета, но $|B'(b_x(u))| \ge 2t-s = 2x-1$. Наконец, при $j = x+1, \ldots, t$ из условия $s < t$ следует, что $j-1 \le t-1 < 2t-s-1 \le |B'(b_j(u))|$. Таким образом, всегда можно выбрать требуемое a_j. Доказательство существования трансверсали семейства $\mathcal{C}(v)$ точно такое же, как в теореме 2. Теорема 3 доказана.

Случай четных k и l остается открытым.Частично его решают следующие утверждения.

Утверждение 2. *Если $k = 0$, то $\chi^{list}_{0,l}(H) \leq 2\Delta - l - 1$ для любого мультиграфа H максимальной степени Δ и $l < \Delta/2$.*

Доказательство. Поскольку $|L(e)| = 2\Delta - l - 1 \geq \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$ при $l < \Delta/2$, то из предписанной версии теоремы Шеннона [7] следует, что существует реберная раскраска мультиграфа H с предписанием $L(e)$, которая порождает $(0,0)$-раскраску инциденторов. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть k и l выбраны так, что $\chi^{list}_{k,l}(G) \leq 4t + 2k - l - 1$ для любого мультиграфа G максимальной степени $2t$. Тогда $\chi^{list}_{2k,2l}(H) \leq 8t + 4k - 2l - 1$ для любого мультиграфа H максимальной степени $4t$.*

Доказательство. По теореме Петерсена мультиграф H разбивается на $2t$ 2-факторов. Группируя их по t штук, получим два мультиграфа G_1 и G_2 степени $2t$. Пусть L — интервальное предписание для H с длиной всех интервалов не менее $8t+4k-2l-1$. Рассмотрим произвольную дугу e мультиграфа H. Тогда $L(e) = [a, a+8t+4k-2l-2]$ для некоторого цвета a. Положим $L_1(e) = \{x \mid 2x - 1 \in L(e)\}$, если $e \in E(G_1)$, и $L_2(e) = \{x \mid 2x \in L(e)\}$, если $e \in E(G_2)$. Очевидно, что L_1 и L_2 задают интервальные предписания для мультиграфов G_1 и G_2 соответственно, причем $|L_j(e)| \geq 4t + 2k - l - 1$ для всех $e \in E$, $j = 1, 2$. По условию утверждения существуют (k,l)-раскраски f_1, f_2 мультиграфов G_1 и G_2 с предписаниями L_1 и L_2 соответственно. Задав $f(i) = 2f_1(i) - 1$ для инциденторов мультиграфа G_1 и $f(i) = 2f_1(i)$ для инциденторов мультиграфа G_2, получим предписанную относительно предписания L $(2k, 2l)$-раскраску инциденторов мультиграфа H. Утверждение 3 доказано.

Наконец, для решения случая $k \geq 2$, $s = 2, \Delta \equiv 2 \pmod 4$ нам потребуется следующая лемма, более простая версия которой доказана в [1, теорема 2].

Лемма. *Пусть G — однородный мультиграф степени 2, для каждой дуги e которого предписано по два варианта (k,k)-раскраски инциденторов $(a_1(e), a_1(e)+k)$ и $(a_2(e), a_2(e)+k)$, где $k \geq 1$. Тогда инциденторы мультиграфа G можно правильно раскрасить в соответствии с этим предписанием.*

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [1] с учетом замечания 1 из той же работы.

Теорема 4. *Пусть G — мультиграф максимальной степени $\Delta = 4t + 2$ и $k \geq 2$ четно. Тогда $\chi^{list}_{k,k+2}(G) \leq 8t + k + 1$.*

Доказательство. По теореме Петерсена G разбивается на $2t + 1$ 2-факторов $F_0, F_1, \ldots, F_{2t}$. Сначала раскрасим F_0 так: если черный инцидентор дуги e начальный, то выберем в $L(e)$ допустимые цвета $2a$ и $2a + k + 1$ и раскрасим в них черный и белый инциденторы дуги e соответственно; если же он конечный, то выберем в $L(e)$ допустимые цвета $2a$ и $2a - k - 1$ и поступим аналогично. В результате получим правильную $(k+1, k+1)$-раскраску инциденторов 2-фактора F_0, в которой при каждой вершине использовано по одному четному и нечетному цвету. Далее будем красить 2-факторы $F_1, \ldots, F_t$ в четные цвета, а 2-факторы $F_{t+1}, \ldots, F_{2t}$ — в нечетные цвета.

Рассмотрим произвольную дугу e с предписанием $L(e) = [a, a + 8t + k]$ для некоторого цвета a. Тогда для дуги e имеется $8t + 1$ способ (k,k)-раскраски ее инциденторов (от $(a, a+k)$ до $(a + 8t, a + 8t + k)$), из которых не менее $4t$ способов содержат только четные или только нечетные цвета. Построенная ранее раскраска F_0 может запретить еще два четных или два нечетных варианта раскраски дуги e. Таким образом, для каждой дуги $e \in E(F_1 \cup \ldots \cup F_t)$ (соответственно, $e \in E(F_{t+1} \cup \ldots \cup F_{2t})$) имеется как минимум $4t - 2$ варианта (k,k)-раскраски ее инциденторов четными (соответственно, нечетными) допустимыми цветами. Далее 2-факторы $F_1, \ldots, F_{t-1}$ и $F_{t+1}, \ldots, F_{2t-1}$ красятся жадным образом в четные и нечетные цвета соответственно, т. е. для каждой дуги выбирается произвольный из вышеописанных $4t - 2$ вариантов

(k,k)-раскраски ее инциденторов, не нарушающий правильности имеющейся раскраски. В результате при каждой вершине будет использовано по $2t-2$ четных и нечетных цвета, а значит, для раскраски каждой дуги 2-факторов F_t и F_{2t} останется по $4t-2-2(2t-2)=2$ варианта (k,k)-раскраски. Эти 2-факторы красим по лемме. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. Построенная в теореме 4 раскраска инциденторов на самом деле является $(k,k+1)$-раскраской с лучшей чем в теореме 3 оценкой на число цветов.

Таким образом, минимальными значениями параметров, для которых гипотеза 1 остается открытой, являются $k=2, l=6$ и $\Delta=10$, т.е. определение $\chi^{list}_{2,6}$ для мультиграфов максимальной степени 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильева Е.И., Пяткин А.В.** О предписанной (k,l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Том 24, № 1. С. 21–30. doi: 10.17377/daio.2017.24.542 .
2. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета / / Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. –10.
3. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7. № 1. С. 32–39.
4. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k,l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7. № 4. С. 29–37.
5. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2. № 4. С. 74–79.
6. **Bollobas B., Harris A.J.** List-colorings of graphs // Graphs Combin. 1985. Vol. 1, no. 1. P. 115–127. doi: 10.1007/BF02582936 .
7. **Borodin O. V., Kostocka A. V., Woodall D. R.** List edge and list total colorings of multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. Vol. 71, no. 2. P. 184–204. doi: 10.1006/jctb.1997.1780 .
8. **Diestel R.** Graph theory. 5th ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. 448 p. (Graduate Texts in Math.; vol. 173).
9. **Erdős P., Rubin A.L., Taylor H.** Choosability in graphs // Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Vol. 16 of Congressus Numerantium. Arcata, California, 1979. P. 125–157.
10. **Häggkvist R., Chetwynd A.G.** Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs // J. Graph Theory. 1992. Vol. 16, no. 2. P. 503–516. doi: 10.1002/jgt.3190160206 .
11. **Hall P.** On representatives of subsets // J. London Math. Soc. 1935. Vol. 10, no. 1. P. 26–30. doi:10.1112/jlms/s1-10.37.26 .
12. **West D.B.** Introduction to graph theory. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 588 p.
13. **Woodall D. R.** List colourings of graphs // Surveys in combinatorics / ed. J. W. P. Hirschfeld Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. P. 269–301. (London Math. Soc. Lecture Note Series; vol. 288)

Поступила 10.01.2019
После доработки 16.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Пяткин Артем Валерьевич
д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
профессор
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: artem@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Vasil'eva E.I., Pyatkin A.V. On list incidentor (k, l)-coloring. *J. Appl. Industrial Math.*, 2017, vol. 11, no. 1, pp. 125–129. doi: 10.1134/S1990478917010148 .
2. Vizing V.G. Coloring the graph vertices with some prescribed colors. In: *Methods of Discrete Analysis in the Theory of Codes and Schemes*, vol. 29 (Inst. Math. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1976), pp. 3–10 (in Russian).
3. Vizing V.G. Incidentor coloring of multigraphs in prescribed colors. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 32–39 (in Russian).
4. Vizing V.G., Melnikov L.S., Pyatkin A.V. On (k, l)-coloring of incidentors. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1*, 2000, vol. 7, no. 4, pp. 29–37 (in Russian).
5. Pyatkin A.V. Some optimization problems of scheduling the transmission of messages in a local communication network. In: A.D. Korshunov (ed.), *Operations Research and Discrete Analysis.* Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1997, pp. 227–232. doi: 10.1007/978-94-011-5678-3_17 .
6. Bollobas B., Harris A.J. List-colorings of graphs. *Graphs Combin.*, 1985, vol. 1, no. 1, pp. 115–127. doi: 10.1007/BF02582936 .
7. Borodin O.V., Kostocka A.V., Woodall D.R. List edge and list total colorings of multigraphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 1997, vol. 71, no. 2, pp. 184–204. doi: 10.1006/jctb.1997.1780 .
8. Diestel R. *Graph theory.* Graduate Texts in Math., vol. 173, 5th ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2016, 448 p. ISBN: 978-3-662-53621-6 .
9. Erdős P., Rubin A.L., Taylor H. Choosability in graphs. In: *Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Vol 26 of Congressus Numerantium, Arcata, California, 1979, pp. 125–157.
10. Hăggkvist R., Chetwynd A.G. Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs. *J. Graph Theory*, 1992, vol. 16, no. 2, pp. 503–516. doi: 10.1002/jgt.3190160206 .
11. Hall P. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 1935, vol. 10, no. 1, pp. 26–30. doi: 10.1112/jlms/s1-10.37.26 .
12. West D.B. *Introduction to graph theory.* New Jersey: Prentice Hall, 2001, 588 p. ISBN: 0-13-014400-2 .
13. Woodall D.R. List colourings of graphs. In: J. W. P. Hirschfeld (ed.) *Surveys in combinatorics*, 2001, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 288, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001, pp. 269–301. ISBN: 0-521-00270-2 ,

Received January 10, 2019
Revised May 16, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency: This work was supported by Program I.5.1 for Fundamental Research of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. 0314-2019-0014) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00170).

Artem Valer'evich Pyatkin, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: artem@math.nsc.ru .

Cite this article as: A. V. Pyatkin. On a list (k, l)-coloring of incidentors in multigraphs of even degree for some values of k and l, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 177–184 .