ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ n-РАЗДЕЛЬНЫМИ ВСПЛЕСКАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ $L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$

Е. А. Плещева

В работе рассматриваются построенные автором ранее ортонормированные базисы n-раздельных КМА и всплесков. В классическом случае базис пространства $L^2(\mathbb{R})$ образован сдвигами и сжатиями единственной функции ψ. В отличие от классического случая, в данной статье несколько базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$ образованы сдвигами и сжатиями n функций $\psi^s,\ s=1,\dots,n$. Построенные n-раздельные всплески образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$. В этом случае ряд $\sum_{s=1}^n\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\psi^s_{nj+s,k}\rangle\psi^s_{nj+s,k}$ сходится к функции f в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Мы привели дополнительные ограничения на функции φ^s и $\psi^s,\ s=1,\dots,n$, обеспечивающие сходимость такого ряда к функции f в пространствах $L^p(\mathbb{R}),\ 1\le p\le\infty$ по норме и почти всюду.

Ключевые слова: всплеск, масштабирующая функция, базис, кратномасштабный анализ.

E. A. Pleshcheva. Approximation of functions by n-separate wavelets in the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$.

We consider the orthonormal bases of n-separate MRAs and wavelets constructed by the author earlier. The classical wavelet basis of the space $L^2(\mathbb{R})$ is formed by shifts and compressions of a single function ψ. In contrast to the classical case, we consider a basis of $L^2(\mathbb{R})$ formed by shifts and compressions of n functions ψ^s, $s=1,\dots,n$. The constructed n-separate wavelets form an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R})$. In this case, the series $\sum_{s=1}^n\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\psi^s_{nj+s}\rangle\psi^s_{nj+s}$ converges to the function f in the space $L^2(\mathbb{R})$. We write additional constraints on the functions φ^s and ψ^s, $s=1,\dots,n$, that provide the convergence of the series to the function f in the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, in the norm and almost everywhere.

Keywords: wavelet, scaling function, basis, multiresolution analysis.

MSC: 42C40
DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-167-176

Введение

В работе будут использованы следующие обозначения:

Обозначим через p_l число, на единицу большее наименьшего неотрицательного вычета l по модулю n, $l\in\mathbb{Z}$. В частности, $p_{n+l}=p_l$, а

$$p_s=\begin{cases} s+1, & s=1,2,\dots,n-1,\\ 1, & s=n;\end{cases}$$

$L^2(\mathbb{R})$ — пространство интегрируемых с квадратом на $(-\infty,\infty)$ функций над полем комплексных чисел;

$u_{j,k}(x)=2^{j/2}u(2^jx-k),\ k,j\in\mathbb{Z}$, где $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$;

$\langle g,h\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\overline{h(x)}\,dx$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$ функций g и h из $L^2(\mathbb{R})$;

Pr_Vf — ортогональная проекция функции f на подпространство $V\subset L^2(\mathbb{R})$;

$l^2(\mathbb{Z})$ — пространство последовательностей $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2<\infty$.

В статье [1] нами были построены ортонормированные базисы всплесков на основе нескольких масштабирующих функций. Построение базиса всплесков начнем с построения соответствующего кратномасштабного анализа (КМА). Введем следующее

О п р е д е л е н и е 1. Рассмотрим n последовательностей вложенных друг в друга замкнутых подпространств пространства $L^2(\mathbb{R})$

$$\ldots \subset V^n_{-1} \subset V^1_0 \subset V^2_1 \subset V^3_2 \subset \cdots \subset V^n_{n-1} \subset V^1_n \subset V^2_{n+1} \subset \cdots, \tag{0.1}$$

$$\cdots \subset V^1_{-1} \subset V^2_0 \subset V^3_1 \subset V^4_2 \subset \cdots \subset V^1_{n-1} \subset V^2_n \subset V^3_{n+1} \subset \cdots \tag{0.2}$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$\cdots \subset V^{n-1}_{-1} \subset V^n_0 \subset V^1_1 \subset V^2_2 \subset \cdots \subset V^{n-1}_{n-1} \subset V^n_n \subset V^1_{n+1} \subset \cdots, \tag{0.3}$$

или, кратко,

$$\cdots \subset V^{p_{s-1}}_0 \subset V^{p_s}_1 \subset V^{p_{s+1}}_2 \subset \cdots \subset V^{p_{s+l}}_{l+1} \subset \cdots, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{0.4}$$

Назовем эту конструкцию *n-раздельным кратномасштабным анализом* (n-*КМА*) *пространства* $L^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\cup_j V^1_{nj}} = \overline{\cup V^2_{nj}} = \cdots = \overline{\cup V^n_{nj}} = L^2(\mathbb{R})$;

б) $\cap_j V^1_{nj} = \cap V^2_{nj} = \cdots = \cap V^n_{nj} = \{0\}$;

в) $f(x) \in V^s_j \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V^s_j \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;

г) $f(x) \in V^s_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V^s_j \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;

д) найдутся такие функции $\varphi^s(x),\ s = 1, 2, \ldots, n$, что множества их сдвигов $\{\varphi^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированные базисы пространств V^s_0.

Если $\varphi^1 = \varphi^2 = \cdots = \varphi^n$, то n-раздельный КМА превращается в классический. Построенные и исследуемые автором n-раздельные всплески можно также назвать частным случаем введенных М. З. Берколайко и И. Я. Новиковым так называемых нестационарных, или почти всплесков [3]. В отличие от нестационарных всплесков, когда на каждом уровне j базис пространства V_j образован сдвигами своей функции φ^j, мы ограничиваемся конечным числом масштабирующих функций.

Из пп. а), б) и (0.4) следует, что для всех $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ $\overline{\bigcup_j V^k_{nj+l}} = L^2(\mathbb{R})$, $\bigcap_j V^k_{nj+l} = \{0\}$.

Условия вложения (0.1)–(0.4) выполняются при выполнении следующих равенств, называемых *масштабирующими соотношениями*:

$$\varphi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h^{s,p_s}_\nu \varphi^{p_s}_{1,\nu}(x). \tag{0.5}$$

Для пространств V^s_j строятся подпространства W^s_j, дополняющие их до следующего пространства $V^{p_s}_{j+1}$ таким образом, что выполняются условия

1) $V^s_j \bigoplus W^s_j = V^{p_s}_{j+1}$;

2) $V^s_j \perp W^s_j \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, \ldots, n$.

Базис пространства W^s_j образован функциями-всплесками $\{\psi^s_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi^s(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где функции ψ^s строятся по φ^{p_s} следующим образом:

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu-1} \overline{h^{s,p_s}_{1-\nu}} \varphi^{p_s}_{1,\nu}(x), \quad s = 1, \ldots, n,$$

где h^{s,p_s}_ν — коэффициенты из (0.5).

1. Сходимость по норме пространств $L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$

В книге [2, гл. 5] показано, что при дополнительных ограничениях в классическом КМА на функции-всплески и масштабирующие функции разложение функции в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

по всплескам сходится не только в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, но и в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$.

В данной работе на основе методов, описанных в книге [2, гл. 5], доказано, что при подобных ограничениях на функции φ^s и ψ^s разложения функции в ряды Фурье по n-раздельным всплескам

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi^s_{nj+\varkappa(s),k}\rangle \psi^s_{nj+\varkappa(s),k}(x), \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ — циклическая перестановка $\{1,\dots,n\}$, сходится также в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, по норме и почти всюду.

Введем для удобства следующие операторы.

Проекция f на пространство W^s_j

$$Q^s_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi^s_{j,k}\rangle \psi^s_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Тогда ряд (1.1) перепишем в виде

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q^s_{nj+\varkappa(s)} f(x)$$

Проекция f на пространство $V^r_{nj+\varkappa(r)}$

$$P^r_{nJ+\varkappa(r)} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi^r_{nJ+\varkappa(r),k}\rangle \varphi^r_{nJ+\varkappa(r),k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Так как выполнено $V^s_j \bigoplus W^s_j = V^{p_s}_{j+1}$, то $Q^s_j = P^{p_s}_{j+1} - P^s_j$. Выражение (1.2) является частичной суммой ряда (1.1). Действительно,

$$P^r_{nJ+\varkappa(r)} f = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=-\infty}^{J-1} Q^s_{nj+\varkappa(s)} f + \sum_{s=1}^{r} Q^s_{nJ+\varkappa(s)} f.$$

Также нам потребуется следующий оператор, соответствующий всплеску ψ^r,

$$S^{\sigma,s}_{nJ+\varkappa(r),l} f(x) = P^r_{nJ+\varkappa(r)} f(x) + \sum_{m=1}^{l} \langle f, \psi^r_{nJ+\varkappa(r),\sigma(m)}\rangle \psi^r_{nJ+\varkappa(r),\sigma(m)}(x), \tag{1.3}$$

где $f \in L^2(\mathbb{R})$, $j, r \in \mathbb{Z}$, а σ — некоторая перестановка в $\mathbb{Z}$.

Так как $P^r_{nJ+\varkappa(r)} f(x)$ и $S^{\sigma,s}_{nJ+\varkappa(r),l} f(x)$ — это частичные суммы рядов (1.1), то, доказав сходимость $P^r_{nJ+\varkappa(r)} f(x)$ и $S^{\sigma,s}_{nJ+\varkappa(r),l} f(x)$ к функции $f(x)$ по норме и почти всюду в пространствах $L^p(\mathbb{R}), 1 \le p \le \infty$, мы докажем и сходимость рядов (1.1) к функции $f(x)$ по норме и почти всюду в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$.

Установим, когда такие операторы определены в $L^p(\mathbb{R})$ и изучим их сходимость при $j \to \infty$.

Введем функцию W на $[0,\infty)$ со свойствами

$$\left.\begin{array}{l} W \in L^1([0,\infty)); \\ W \ \text{ убывает}; \\ W(0) < \infty. \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Заметим, что при этом $W(0) > 0$ $(W(|x|) > 0)$, $W(|x|) \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$. Будем говорить, что функция g мажорируется функцией W, если $|g(x)| \le W(|x|)$, где W удовлетворяет условиям (1.4).

В дальнейшем нам потребуется следующая известная лемма (см., например, [2, лемма 3.12]).

Лемма. *Предположим, что функция W на $[0,\infty)$ удовлетворяет условиям* (1.4). *Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} W(|x-k|)W(|y-k|) \le CW\Big(\frac{|x-y|}{2}\Big), \quad x,y\in\mathbb{R},$$

где константа C зависит только от W.

Пусть масштабирующие функции φ^s и всплески ψ^s, $s=1,\dots,n$, мажорируются функциями W, W_1. Тогда мы можем расширить операторы P_j^s, Q_j^s и $S_{j,k}^{\sigma,s}$ на пространства $L^p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$. Заметим что, если функция g мажорируется функцией W, то $g_{j,k}\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$, $j,k\in\mathbb{Z}$.

Для таких функций запишем $\langle f,\varphi_{j,k}^s\rangle$ в виде интеграла и заменим в (1.2) порядок суммирования и интегрирования. Это возможно в силу леммы и теоремы Лебега о мажорантной сходимости. Действительно, в выражении

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\varphi^r_{nJ+\varkappa(r),k}\rangle\varphi^r_{nJ+\varkappa(r),k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\overline{\varphi^r_{nJ+\varkappa(r),k}(y)}\,dy\varphi^r_{nJ+\varkappa(r),k}(x)$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=-m}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)2^{nJ+\varkappa(r)}\varphi^r(2^{nJ+\varkappa(r)}x-k)\overline{\varphi^r(2^{nJ+\varkappa(r)}y-k)}\,dy$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{k=-m}^{m} f(y)2^{nJ+\varkappa(r)}\varphi^r(2^{nJ+\varkappa(r)}x-k)\overline{\varphi^r(2^{nJ+\varkappa(r)}y-k)}\,dy$$

подынтегральная функция в силу леммы ограничена интегрируемой функцией. Получим, что

$$(P^r_{nJ+\varkappa(r)}f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^j K^r_\varphi(2^{nJ+\varkappa(r)}x, 2^{nJ+\varkappa(r)}y)f(y)\,dy, \tag{1.5}$$

где

$$K^r_\varphi(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^r(x-k)\overline{\varphi^r(y-k)}.$$

Аналогично

$$(Q^s_j f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^j K^s_\psi(2^j x, 2^j y)f(y)\,dy,$$

где

$$K^s_\psi(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi^s(x-k)\overline{\psi^s(y-k)}.$$

Для оператора $S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),m}$ имеем

$$\big(S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),m}f\big)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{nJ+\varkappa(r)}K^r_\psi\big(2^{nJ+\varkappa(r)}x, 2^{nJ+\varkappa(r)}y\big)f(y)\,dy \tag{1.6}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{nJ+\varkappa(r)}K^{\sigma,l,r}\big(2^{nJ+\varkappa(r)}x, 2^{nJ+\varkappa(r)}y\big)f(y)\,dy,$$

где

$$K^{\sigma,l,r}(x,y) = \sum_{m=1}^{l}\psi^r(x-\sigma(m))\overline{\psi^r(y-\sigma(m))}.$$

Для функций φ^s, ψ^s и соответствующих операторов P^s_j, Q^s_j и $S^{\sigma,s}_{j,k}$, $s=1,\dots,n$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1 [2, предложение 3.13]. (а) *Пусть масштабирующая функция* φ^s *мажорируется функцией* W. *Тогда существует* $C > 0$, *не зависящее от* j, *такое, что для всех* $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$, *выполнено*

$$\|P_j^s f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|W\|_{L^1[0,\infty)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

(б) *Пусть функция-всплеск* ψ^s *мажорируется функцией* W. *Тогда существует* $C > 0$, *не зависящее от* j, *такое, что для всех* $f \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$, *выполнено*

$$\|Q_j^s f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|W\|_{L^1[0,\infty)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

(в) *Пусть функции* φ^s *и* ψ^s *мажорируются функциями* $W,\ W_1$ *с функциями* $W,\ W_1$. *Тогда существует* $C = C(W, W_1) > 0$, *не зависящее от* j, k *и* σ, *такое, что для всех* $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$, *выполнено*

$$\|S_{j,k}^{\sigma,s} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C(W, W_1)\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что, как и в классическом случае, для n-раздельных масштабирующих функций, целочисленные сдвиги которых образуют ортонормированный базис пространства V_0^s, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть масштабирующие функции* φ^s *мажорируются функцией* W. *Тогда для почти всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(x+k) = 1, \tag{1.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}} 2^j K_\varphi^s(2^j x, 2^j y)\, dy = 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Найдем коэффициенты разложения 1-периодической функции $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(x+k)$ в ряд Фурье. Поменяем порядок суммирования и интегрирования. Это возможно благодаря теореме Лебега о мажорантной сходимости.

$$\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(x+k)e^{-2\pi i l x}\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi^s(x+k)e^{-2\pi i l x}\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \varphi^s(x)e^{-2\pi i l x}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi^s(x)e^{-2\pi i l x}\, dx = \widehat{\varphi^s}(l) = \delta_{l,0}.$$

Последнее равенство справедливо, если функции $\varphi^s(x),\ s = 1, \dots, n$, являются масштабирующими в n-раздельном КМА (см., например, [1]). Таким образом, видим, что все коэффициенты Фурье 1-периодической функции $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(x+k)$ равны нулю, кроме нулевого, который равен единице. Отсюда следует справедливость равенства (1.7).

Докажем равенство (1.8). Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} 2^j K_\varphi^s(2^j x, 2^j y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(2^j x - k)\overline{\varphi^s(2^j y - k)}\, dy$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(2^j x - k) \int_{\mathbb{R}} 2^j \overline{\varphi^s(2^j y - k)}\, dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^s(2^j x - k) \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi^s(y)}\, dy = 1 * \overline{\widehat{\varphi^s}(0)} = 1. \qquad \square$$

Для того чтобы изучить операторы $P^r_{nJ+\varkappa(r)}$ и $S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),l}$, рассмотрим оператор

$$T_jf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} 2^j K(2^j x, 2^j y)\big(f(y) - f(x)\big)\,dy, \tag{1.9}$$

где $K(x,y) \le CW(|x-y|/2)$, W удовлетворяет (1.4). Для таких T_j справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 3.16 из [2].

Теорема 1. *Для операторов T_j, определенных в* (1.9), *справедливы утверждения*

(а) *если* $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, *то* $\lim_{j\to\infty} \|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$;

(б) $\lim_{j\to\infty} \|T_jf\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$ *для всех равномерно непрерывных на* $\mathbb{R}$ *функций* $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. Для доказательства (а) возьмем $f \in L^p(\mathbb{R})$. Простой заменой переменных имеем

$$|T_jf(x)| \le C\int\limits_{\mathbb{R}} 2^j W(2^{j-1}|t|)|f(x-t) - f(x)|\,dt. \tag{1.10}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского для интегралов, получим

$$\|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\int\limits_{\mathbb{R}} 2^j W(2^{j-1}|t|)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p\,dx\Bigg)^{1/p} dt$$

$$= C\int\limits_{\mathbb{R}} W\Big(\frac{|t|}{2}\Big)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x - 2^{-j}t) - f(x)|^p\,dx\Bigg)^{1/p} dt \le \int\limits_{\mathbb{R}} W\Big(\frac{|t|}{2}\Big)\omega\Big(\frac{t}{2^j}, f\Big)_p\,dt.$$

Выражение

$$\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|^p\,dx\Bigg)^{1/p} = \|\Delta_h f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \omega(h,f)_p,$$

где $\omega(h,f)_p$ — модуль непрерывности функции f в пространстве L^p, $\omega(h,f)_p \to 0$ при $|h| \to 0$ и $0 \le p < \infty$. По теореме Лебега о мажорантной сходимости (подынтегральное выражение ограничено интегрируемой функцией $W(|t|/2)\omega(h,f)_p$) получим справедливость утверждения (а).

Чтобы доказать утверждение (б), рассмотрим равномерно непрерывную $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\omega_\infty(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| \to 0$$

при $t \to 0$ равномерно по x. По (1.10) имеем

$$\|T_jf\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\infty(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)\,dt$$

и, применив теорему Лебега о мажорантной сходимости, получим требуемое утверждение. □

Следствие 1. *Предположим, что* φ^s, $s = 1,\dots,n$, *— это масштабирующие функции, которые мажорируются функцией* W.

(а) *Если* $1 \le p < \infty$, *то* $\lim_{J\to\infty} \|P^r_{nJ+\varkappa(r)}f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$ *для всех* $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(б) $\lim_{J\to\infty} \|P^r_{nJ+\varkappa(r)}f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$ *для всех равномерно непрерывных* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1.5) и п. (а) предложения 1, запишем

$$P^r_{nJ+\varkappa(r)}f(x)-f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}} 2^j K^r_\varphi\big(2^{nJ+\varkappa(r)}x,2^{nJ+\varkappa(r)}y\big)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy. \tag{1.11}$$

Здесь

$$|K^r_\varphi(x,y)|=\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^r(x-k)\varphi^r(y-k)\Big|\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}W(x-k)W(y-k)\le CW\Big(\frac{|x-y|}{2}\Big)$$

по лемме. Применив к выражению (1.11) теорему 1, получим требуемое утверждение. □

Следствие 2. *Предположим, что всплески ψ^s и масштабирующие функции φ^s, $s=1,\dots,n$, мажорируются функциями W, W_1.*

(а) *Если $1\le p<\infty$, то $\lim_{j\to\infty}\|S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),k}f-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$ для всех $k=1,2,\dots$ и всех $f\in L^p(\mathbb{R})$.*

(б) *$\lim_{j\to\infty}\|S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),k}f-f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=0$ для всех $k=1,2,\dots$ и всех равномерно непрерывных $f\in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (1.3) и $\int_{\mathbb{R}}\psi^s(y)dy=\widehat{\psi^s}(0)=0$, получим

$$S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),k}f(x)-f(x)$$

$$=\big[P^r_{nJ+\varkappa(r)}f(x)-f(x)\big]+\int\limits_{\mathbb{R}}\Big\{\sum_{m=1}^{k}\psi^r_{nJ+\varkappa(r),\sigma(m)}(x)\overline{\psi^r_{nJ+\varkappa(r),\sigma(m)}(y)}\Big\}[f(y)-f(x)]\,dy$$

$$=\big[P^r_{nJ+\varkappa(r)}f(x)-f(x)\big]+\int\limits_{\mathbb{R}}2^{nJ+\varkappa(r)}K^{\sigma,k,r}\big(2^{nJ+\varkappa(r)}x,2^{nJ+\varkappa(r)}y\big)[f(y)-f(x)]\,dy.$$

По следствию 1 $\lim_{j\to\infty}\|P_{nJ+\varkappa(r)}f-f\|_{L^2(\mathbb{R})}=0$. По лемме

$$|K^{\sigma,l,r}(x,y)|=\Big|\sum_{m=1}^{l}\psi^r(x-m)\psi^r(y-m)\Big|\le\sum_{m=1}^{k}W_1(x-m)W_1(y-m)\le CW_1\Big(\frac12|x-y|\Big),$$

поэтому требуемое утверждение следует из теоремы 1. □

2. Сходимость почти всюду в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1\le p\le\infty$

В предыдущем разделе были рассмотрены всплески, порожденные n-раздельным кратномасштабным анализом. Мы доказали, что и $P^r_{nJ+\varkappa(r)}f$, и $S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),l}f$ сходятся к f по $L^p(\mathbb{R})$-норме, $1\le p<\infty$, и по $L^\infty(\mathbb{R})$-норме для равномерно непрерывных функций, когда всплески и масштабирующие функции удовлетворяют подходящим условиям. Этот раздел посвящен изучению поточечной сходимости операторов $P^r_{nJ+\varkappa(r)}f$ и $S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),l}f$ к f в $L^p(\mathbb{R})$.

В общем виде, обозначив через T_j приведенные выше операторы (1.5), (1.6), докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\{T_j, j\in\mathbb{Z}\}$ — семейство операторов, определенных в* (1.9). *Если $f\in L^p(\mathbb{R})$, то $\lim_{j\to\infty}T_jf(x)=0$ для каждого x на множестве точек Лебега функции f.*

Доказательство. Если x — точка Лебега функции f, то для любого $\delta > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{r}\int\limits_{|t|\le r} |f(x-t)-f(x)|\,dt \le \delta, \quad 0<r\le\eta. \tag{2.1}$$

В силу (1.10)

$$C^{-1}|T_jf(x)| \le \int\limits_{|t|<\eta} 2^jW(2^{j-1}|t|)|f(x-t)-f(x)|\,dt + \int\limits_{|t|\ge\eta} 2^jW(2^{j-1}|t|)|f(x-t)-f(x)|\,dt = I + II.$$

Так как $W(|x|)$ стремится к нулю при $|x|\to\infty$ и $W\in L^1([0,\infty))$, то

$$rW(r) \le \int\limits_{r/2\le|x|\le r} W(|x|)\,dx \to 0, \quad r\to 0.$$

Пусть

$$g(r) = |f(x-r)-f(x)|, \quad G(r) = \int\limits_0^r g(s)\,ds.$$

Из (2.1) получаем, что

$$G(r)\le r\delta, \quad 0<r\le\eta. \tag{2.2}$$

Теперь, интегрируя по частям, получим

$$I = \int\limits_{|t|<\eta} 2^jW(2^{j-1}|t|)|f(x-t)-f(x)|\,dt = \int\limits_0^\eta 2^jW(2^{j-1}r)g(r)\,dr + \int\limits_0^\eta 2^jW(2^{j-1}r)g(r)\,dr = I_+ + I_-.$$

Оценим I_+:

$$I_+ = G(r)2^jW(2^{j-1}r)\Big|_0^\eta - \int\limits_0^\eta G(r)2^j2^{j-1}W'(2^{j-1}r)\,dr \le r\delta 2^jW(2^{j-1}r)\Big|_0^\eta - \int\limits_0^{2^j\eta} G(2^{-j}r)2^j\,dW\Big(\frac{r}{2}\Big).$$

Так как W убывает, то $dW(r/2)$ отрицательно, и из (2.2) и ограниченности $rW(r)$ при $|r|<\eta$ имеем

$$I_+ \le C\delta - \delta\int\limits_0^{2^j\eta} 2^{-j}r2^j\,dW\Big(\frac{r}{2}\Big).$$

Для того чтобы оценить последнее слагаемое, обозначим $A = 2^j\eta$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$-\int\limits_0^{2^j\eta} 2^{-j}r2^j\,dW\Big(\frac{r}{2}\Big) = -\int\limits_0^A u\,dW\Big(\frac{u}{2}\Big) = -AW\Big(\frac{A}{2}\Big) + \int\limits_0^A \frac{W}{2}\Big(\frac{v}{2}\Big)\,dv = -AW\Big(\frac{A}{2}\Big) + \int\limits_0^{A/2} W(u)\,du.$$

При $j\to\infty$ (или, что эквивалентно, $A\to\infty$) последнее выражение возрастает до $\|W\|_{L^1(\mathbb{R})}$ (так как $rW(r)\to 0$ при $r\to\infty$). Это дает нам оценку

$$I_+ \le C\delta + 2\|W\|_{L^1(\mathbb{R})}\delta = a_+\delta.$$

Проведем аналогичные рассуждения для I_-. В итоге получим, что для I справедливо

$$I \le a\delta. \tag{2.3}$$

Заметим, что константа a в (2.3) зависит только от W, в частности, она не зависит от j.

Для того чтобы оценить II, используем χ_η — характеристическую функцию множества $t \in \mathbb{R}: \ |t| \ge \eta$. Если p' — это число, сопряженное с p (т.е. такое, что $1/p + 1/p' = 1$), то, используя неравенство Гельдера, получим

$$II \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'}\, dt \right)^{1/p'} + |f(x)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)|\, dt. \tag{2.4}$$

При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)|\, dt = 2 \int\limits_{|s|\ge 2^{j-1}\eta} W(|s|)\, ds$$

стремится к нулю при $j \to \infty$. То же справедливо для первого слагаемого в (2.4), так как

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'}\, dt \right)^{1/p'} = \left(\int\limits_{|t|\ge\eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'/p} |2^j W(2^{j-1}|t|)|\, dt \right)^{1/p'}$$

$$\le \left((|2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'/p}) \left(\int\limits_{|t|\ge\eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|\, dt \right) \right)^{1/p'}$$

$$\le \left(\sup_{|t|\ge\eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| \right)^{1/p} \left(\int\limits_{|t|\ge\eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|\, dt \right)^{1/p'}.$$

Так как $rW(r)$ ограничено, а $\int_{|t|\ge\eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|\, dt \to 0$ при $j \to \infty$, получаем, что последнее выражение стремится к нулю при $j \to \infty$. Следовательно, выбирая достаточно большое j, получаем из (2.4), что II можно сделать меньше, чем δ. Таким образом, вместе с неравенством (2.3), получаем требуемый результат. ☐

Следствие 3. *Предположим, что* $|\varphi^r(x)| \le W(|x|)$, $r = 1, \dots, n$, *где* W *обладает свойствами* (1.4). *Если* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, *то*

$$\lim_{j\to\infty} P^r_{nJ+\varkappa(r)} f(x) = f(x)$$

для почти всех x *из множества Лебега функции* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выражение

$$T_{nJ+\varkappa(r)} f(x) = P^r_{nJ+\varkappa(r)} f(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} 2^j K^r_\varphi(2^{nJ+\varkappa(r)}x, 2^{nJ+\varkappa(r)}y)(f(y) - f(x))\, dy.$$

Здесь $K^r_\varphi(x,y) \le CW(|x-y|/2)$, поэтому можно применить теорему 2. Получим, что справедливо требуемое утверждение. ☐

Следствие 4. *Предположим, что функции* $|\varphi^r(x)| \le W(|x|)$, $|\psi^r(x)|$, $r = 1, \dots, n$, *мажорируются функциями* W, W_1. *Если* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, *то для* $k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{j\to\infty} S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),k} f(x) = f(x)$$

для почти всех x *из множества Лебега функции* f. *В частности, частичные суммы* $S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),l} f(x)$ *сходятся к* $f(x)$ *почти всюду при* $J \to \infty$ *и* $l = 1, 2, \dots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим теорему 2 к выражению

$$S^{\sigma,r}_{nJ+\varkappa(r),l}f(x) - f(x)$$

$$= \big[P^r_{nJ+\varkappa(r)}f(x) - f(x)\big] + \int\limits_{\mathbb{R}} 2^{nJ+\varkappa(r)} K^{\sigma,l,r}\big(2^{nJ+\varkappa(r)}x, 2^{nJ+\varkappa(r)}y\big)[f(y) - f(x)]\,dy,$$

где по лемме $|K^{\sigma,l,r}(x,y)| \le CW_1((1/2)|x-y|)$. Получим, что справедливо требуемое утверждение. □

Поступила 19.03.2019
После доработки 15.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Плещева Е.А.** Новое обобщение ортогональных базисов всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 264–271. doi: 10.1134/S0081543811050130 .
2. **Hernandez E., Weiss G.** A first course on wavelets. London, N Y etc: CRC Press, Inc., 1996. 493 p. (Studies in Advanced Math.) doi: 10.1201/9781420049985 .
3. **Берколайко М.З., Новиков И.Я.** О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 3. С. 3–12.

Плещева Екатерина Александровна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент кафедры математического анализа
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: eplescheva@gmail.com

REFERENCES

1. Pleshcheva E.A. New generalization of orthogonal wavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. S124–S132. doi: 10.1134/S0081543811050130 .
2. Hernandez E. and Weiss G. *A first course on wavelets*. Ser. Studies in Advanced Math., London, N Y etc: CRC Press, Inc., 1996, 493 p. doi: 10.1201/9781420049985 .
3. Berkolaiko M.Z., Novikov I.Ya. On infinitely smooth compactly supported almost-wavelets, *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 3, pp. 877–883. doi: 10.1007/BF02362405 .

Received March 19, 2019
Revised May 15, 2019
Accepted May 20, 2019

Ekaterina Aleksandrovna Pleshcheva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: eplescheva@gmail.com .

Cite this article as: E. A. Pleshcheva. Approximation of functions by n-separate wavelets in the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 167–176 .