ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.518.114

САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ САМОПОДОБНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПРИ СДВИГАХ И РАСТЯЖЕНИЯХ КОПИЙ[1]

К. Г. Камалутдинов

В работе рассматривается проблема пересечения $F_i(K_t)\cap F_j^t(K_t)$ пар различных копий самоподобного множества K_t, порожденного системой $\mathcal{F}_t=\{F_1,\ldots,F_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$, в которой одно отображение F_j^t зависит от вещественного или векторного параметра t. Рассмотрены два случая: параметр $t\in\mathbb{R}^n$ задает сдвиг отображения $F_j^t(x)=G(x)+t$ и параметр $t\in(a,b)$ задает коэффициент подобия отображения $F_j^t(x)=tG(x)+h$, где $0<a<b<1$, а G — изометрия в $\mathbb{R}^n$. Мы накладываем некоторые ограничения на коэффициенты подобия отображений системы $\mathcal{F}_t$ и требуем, чтобы размерность подобия системы была не больше некоторого s. Для таких систем доказано, что хаусдорфова размерность множества тех параметров t, при которых пересечение $F_i(K_t)\cap F_j^t(K_t)$ непусто, не превосходит $2s$. Полученные результаты применены к проблеме проверки строгого условия отделимости (SSC) для системы $\mathcal{F}_\tau=\{F_1^\tau,\ldots,F_m^\tau\}$ сжимающих подобий, зависящей от набора параметров $\tau=(t_1,\ldots,t_m)$. Рассмотрены два случая: τ — набор сдвигов отображений $F_i^\tau(x)=G_i(x)+t_i$, $t_i\in\mathbb{R}^n$, и τ — набор коэффициентов подобия отображений $F_i^\tau(x)=t_iG_i(x)+h_i$, $t_i\in(a,b)$, где $0<a<b<1$, а все G_i — изометрии в $\mathbb{R}^n$. В обоих случаях мы находим достаточные условия, при которых система $\mathcal{F}_\tau$ удовлетворяет SSC для почти всех значений параметров τ. Кроме того, рассмотрена более простая проблема пересечения $A\cap f_t(B)$ для пары компактных подмножеств A, B пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрены два случая: $f_t(B)=B+t$ для $t\in\mathbb{R}^n$, и $f_t(B)=tB$ для $t\in\mathbb{R}$, где замыкание B не содержит 0. В обоих случаях доказано, что хаусдорфова размерность множества тех параметров t, при которых пересечение $A\cap f_t(B)$ непусто, не превосходит $\dim_H(A\times B)$. Как следствие, при достаточно малой размерности произведения $A\times B$ в обоих случаях гарантировано пустое пересечение $A\cap f_t(B)$ для почти всех значений параметра t.

Ключевые слова: самоподобный фрактал, общее положение, строгое условие отделимости, размерность Хаусдорфа.

K. G. Kamalutdinov. Self-intersections in parametrized self-similar sets under translations and extensions of copies.

We study the problem of pairwise intersections $F_i(K_t)\cap F_j^t(K_t)$ of different copies of a self-similar set K_t generated by a system $\mathcal{F}_t=\{F_1,\ldots,F_m\}$ of contracting similarities in $\mathbb{R}^n$, where one mapping F_j^t depends on a real or vector parameter t. Two cases are considered: the parameter $t\in\mathbb{R}^n$ specifies a translation of a mapping $F_j^t(x)=G(x)+t$, and the parameter $t\in(a,b)$ is the similarity coefficient of a mapping $F_j^t(x)=tG(x)+h$, where $0<a<b<1$ and G is an isometry of $\mathbb{R}^n$. We impose some constraints on the similarity coefficients of mappings of the system $\mathcal{F}_t$ and require that the similarity dimension of the system does not exceed some number s. For such systems it is proved that the Hausdorff dimension of the set of parameters t for which the intersection $F_i(K_t)\cap F_j^t(K_t)$ is nonempty does not exceed $2s$. The obtained results are applied to the problem of checking the strong separation condition for a system $\mathcal{F}_\tau=\{F_1^\tau,\ldots,F_m^\tau\}$ of contraction similarities depending on a parameter vector $\tau=(t_1,\ldots,t_m)$. Two cases are considered: τ is a vector of translations of mappings $F_i^\tau(x)=G_i(x)+t_i$, $t_i\in\mathbb{R}^n$, and τ is a vector of similarity coefficients of mappings $F_i^\tau(x)=t_iG_i(x)+h_i$, $t_i\in(a,b)$, where $0<a<b<1$ and all G_i are isometries in $\mathbb{R}^n$. In both cases we find sufficient conditions for the system $\mathcal{F}_\tau$ to satisfy the strong separation condition for almost all values of τ. We also consider the easier problem of the intersection $A\cap f_t(B)$ for a pair of compact sets A and B in the space $\mathbb{R}^n$. Two cases are considered: $f_t(B)=B+t$ for $t\in\mathbb{R}^n$, and $f_t(B)=tB$ for $t\in\mathbb{R}$, where the closure of B does not contain the origin. In both cases it is proved that the Hausdorff dimension of the set of parameters t for which the intersection $A\cap f_t(B)$ is nonempty does not exceed $\dim_H(A\times B)$. Consequently, when the dimension of the product $A\times B$ is small enough, the empty intersection $A\cap f_t(B)$ is guaranteed for almost all values of t in both cases.

Keywords: self-similar fractal, general position, strong separation condition, Hausdorff dimension.

MSC: 28A78, 28A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-116-124

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-01-00569, 18-501-51021).

Введение

Отображение $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *подобием*, если существует константа $p > 0$, называемая *коэффициентом подобия* отображения F, такая, что $\|F(x) - F(y)\| = p\|x - y\|$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Подобие F называется *сжимающим*, если $p < 1$. Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$. Непустой компакт K такой, что $K = \bigcup_{i=1}^m F_i(K)$, называется *самоподобным множеством*, порожденным системой $\mathcal{F}$, или *аттрактором* этой системы. Такой K существует и единственен по теореме Хатчинсона [1]. Множества $F_i(K)$, $1 \le i \le m$, называются *копиями* множества K.

Пусть $\mathcal{F}_t = \{F_1^t, \dots, F_m^t\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ с аттрактором K_t, зависящая от вещественного или векторного параметра $t \in D$. Зафиксируем различные индексы $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Возникает вопрос, насколько велико множество Δ тех параметров, при которых пересечение $F_i^t(K_t) \cap F_j^t(K_t)$ копий аттрактора K_t непусто?

В данной работе мы рассмотрим два вида таких систем, где параметр t будет играть роль вектора сдвига или коэффициента подобия одного из отображений F_j^t системы $\mathcal{F}_t$, в то время как другие отображения не будут зависеть от параметра t.

Кроме того, мы рассмотрим более простую задачу оценки размерности множества параметров $\Delta = \{t \in D\colon A \cap f_t(B) \ne \varnothing\}$ для пары произвольных множеств A и B в $\mathbb{R}^n$, где одно из них подвергается сдвигам ($f_t(B) = B + t$) или гомотетиям ($f_t(B) = tB$).

Во всех этих случаях для рассматриваемых семейств (A_t, B_t) пар множеств, зависящих от параметра $t \in D$, *исключительными параметрами* будем называть те $t \in D$, при которых пересечение $A_t \cap B_t$ непусто.

Вопрос о размерности пересечения $A \cap f_t(B)$ пар множеств, где одно из них подвергается преобразованиям f_t таким, как сдвиги, повороты или растяжения, рассматривался рядом авторов. Так, Марстранд [2] рассматривал пересечения подмножеств плоскости с прямыми, а Маттила [3] и Фалконер [4] — пересечения пар борелевских и суслинских подмножеств евклидова пространства. Однако если преобразованиям f_t подвергается одно или несколько сжимающих подобий в системе $\mathcal{F}_t = \{F_1^t, \dots, F_m^t\}$, например, $F_j^t = f_t \circ G$, то для пересечения $F_i^t(K_t) \cap F_j^t(K_t)$ копий аттрактора K_t системы $\mathcal{F}_t$ ситуация усложняется.

Размерностью подобия системы $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ называется решение *s уравнения Морана* $\sum_{i=1}^m p_i^s = 1$, где p_i — коэффициенты подобия отображений F_i. Симоном и Полликоттом [5] был предложен подход, основанный на условии трансверсальности и методах теории потенциала. Этот подход может гарантировать совпадение хаусдорфовой размерности аттрактора K_t и размерности подобия системы $\mathcal{F}_t$ для почти всех значений параметра t. Однако при этом он не гарантирует того, что пересечения $F_i^t(K_t) \cap F_j^t(K_t)$ пусты.

Для решения поставленной задачи мы используем полученную нами теорему об общем положении [6, Theorem 14]. Наш метод позволяет оценивать хаусдорфову размерность множества исключительных параметров t и находить условия, при которых пересечения $F_i^t(K_t) \cap F_j^t(K_t)$ пусты для почти всех значений параметра t.

Мы также покажем, как решение поставленной нами задачи может быть использовано для проверки строгого условия отделимости. Система $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ *строго отделима*, или удовлетворяет *строгому условию отделимости* (SSC — strong separation condition), если $F_i(K) \cap F_j(K) = \varnothing$ для всех $1 \le i < j \le m$. Хорошо известно, что если система $\mathcal{F}$ удовлетворяет SSC, то размерность ее аттрактора K совпадает с размерностью подобия системы $\mathcal{F}$.

Пусть система $\mathcal{F}_\tau = \{F_1^\tau, \dots, F_m^\tau\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ зависит от набора параметров τ. Мы рассмотрим два случая, в которых набор параметров $\tau = (t_1, \dots, t_m)$ задает сдвиги отображений $F_i^\tau(x) = G_i(x) + t_i$, $t_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le m$, либо коэффициенты подобия отображений $F_i^\tau(x) = t_i G_i(x) + h_i$, $t_i \in (a, b)$, где $0 < a < b < 1$, а все G_i — изометрии пространства $\mathbb{R}^n$. В обоих случаях мы находим достаточные условия, при которых система $\mathcal{F}_\tau$ удовлетворяет условию SSC для почти всех значений параметров τ.

1. Определения и обозначения

Везде, где рассматривается система $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ сжимающих подобий (возможно, зависящая от параметра), мы будем использовать следующие обозначения:
$I = \{1, \dots, m\}$ — множество индексов;
I^n — множество всех слов $\boldsymbol{i} = i_1 \dots i_n$ длины n в алфавите I, называемых *мультииндексами*;
$I^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n$ — множество всех мультииндексов;
$I^\infty = \{\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots : \alpha_i \in I\}$ — *индексное пространство*;
для последовательностей $\alpha, \beta \in I^\infty$ $\alpha \wedge \beta$ — их наибольший общий начальный отрезок;
для мультииндекса $\boldsymbol{i} = i_1 \dots i_k \in I^k$ $F_{\boldsymbol{i}} = F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_k}$ — композиция отображений системы $\mathcal{F}$;
для набора чисел $(p_1, \dots, p_m)$ длины m и мультииндекса $\boldsymbol{i} = i_1 \dots i_k$ $p_{\boldsymbol{i}} = p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}$.

Отображение $\pi\colon I^\infty \to K$, $\pi\colon \alpha \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(0)$ называется *индексной параметризацией* аттрактора K.

Через $\dim_H X$ будем обозначать хаусдорфову размерность множества X, а через $\dim_S \mathcal{F}$ — размерность подобия системы $\mathcal{F}$.

2. Теорема об общем положении

Сформулируем теорему об общем положении [6, Theorem 14] в следующем упрощенном варианте.

Теорема 1. *Пусть (L_1, σ_1), (L_2, σ_2) — компактные метрические пространства, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $\varphi_1\colon D \times L_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi_2\colon D \times L_2 \to \mathbb{R}^n$ — непрерывные отображения, удовлетворяющие условиям*:

(a) *для некоторого $C > 0$ и всех $t \in D$, $x \in L_1$, $y \in L_2$ и $i = 1, 2$*

$$\|\varphi_i(t,x) - \varphi_i(t,y)\| \le C \cdot \sigma_i(x,y);$$

(b) *для некоторого $M > 0$ и всех $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$, $t, t' \in D$ функция $\Phi(t, x_1, x_2) = \varphi_1(t, x_1) - \varphi_2(t, x_2)$ удовлетворяет условию*

$$M \cdot \|t' - t\| \le \|\Phi(t', x_1, x_2) - \Phi(t, x_1, x_2)\|.$$

Тогда множество $\Delta = \{t \in D\colon \varphi_1(t, L_1) \cap \varphi_2(t, L_2) \ne \varnothing\}$ замкнуто в D и

$$\dim_H \Delta \le \dim_H (L_1 \times L_2).$$

Таким образом, если произведение $L_1 \times L_2$ имеет достаточно малую размерность, а именно $\dim_H (L_1 \times L_2) < d = \dim_H D$, то множества $\varphi(t, L_1)$ и $\psi(t, L_2)$ не пересекаются для почти всех $t \in D$ по d-мерной мере Хаусдорфа.

3. Сдвиги и гомотетии одного множества

Пусть дана пара компактных множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ и к множеству B применяется некоторое семейство преобразований f_t пространства $\mathbb{R}^n$, зависящих от вещественного или векторного параметра $t \in D$. Нас интересует размерность множества исключительных параметров $\Delta = \{t \in D\colon A \cap f_t(B) \ne \varnothing\}$. Ограничимся здесь рассмотрением двух случаев:

1) $f_t(B) = B + t$, где $B + t = \{b + t\colon b \in B\}$, т. е. множество B сдвигается на векторный параметр $t \in \mathbb{R}^n$;

2) $f_t(B) = tB$, где $tB = \{tb\colon b \in B\}$, т. е. множество B подвергается гомотетии с коэффициентами $t \in \mathbb{R}$.

Заметим, что случай 1 рассматривался в книге Фалконера [7, Exercise 8.4].

3.1. Сдвиги

Теорема 2. *Пусть* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *— компакты,* $\Delta = \{t \in \mathbb{R}^n\colon A \cap (B+t) \neq \varnothing\}$*. Тогда множество* $\Delta = \{a - b\colon a \in A,\ b \in B\}$ *замкнуто и* $\dim_H \Delta \le \dim_H(A \times B)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $A \cap (B+t) \neq \varnothing$ равносильно тому, что $a = b + t$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$. Поэтому $\Delta = \{a - b\colon a \in A,\ b \in B\}$.

Рассмотрим отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times A \to A$, $\varphi(t,a) = a$, и $\psi\colon \mathbb{R}^n \times B \to \mathbb{R}^n$, $\psi(t,b) = b + t$. Пусть $\Phi(t,a,b) = \varphi(t,a) - \psi(t,b)$. Очевидно, что для φ и ψ выполняется условие (a) теоремы 1. Проверим условие (b)

$$\varphi(t',a) - \varphi(t,a) = 0; \quad \psi(t',b) - \psi(t,b) = t' - t,$$

откуда $\|\Phi(t',a,b) - \Phi(t,a,b)\| = \|t' - t\|$. Применяя теорему 1 к функциям φ и ψ, получаем, что множество Δ замкнуто и $\dim_H \Delta \le \dim_H(A \times B)$. □

Следствие 1. *Пусть* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *— компакты,* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*. Если* $\dim_H(A \times B) < d = \dim_H D$*, то* $A \cap (B+t) = \varnothing$ *для почти всех* $t \in D$ *по* d*-мерной мере Хаусдорфа.*

3.2. Гомотетии

Теорема 3. *Пусть* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *— компакты и* 0 *не лежит в замыкании* B*. Тогда множество* $\Delta = \{t \in \mathbb{R}\colon A \cap tB \neq \varnothing\}$ *замкнуто и* $\dim_H \Delta \le \dim_H(A \times B)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображения $\varphi\colon \mathbb{R} \times A \to A$, $\varphi(t,a) = a$, и $\psi\colon \mathbb{R} \times B \to \mathbb{R}^n$, $\psi(t,b) = tb$. Пусть $\Phi(t,a,b) = \varphi(t,a) - \psi(t,b)$.

Очевидно, что для φ и ψ выполняется условие (a) теоремы 1. Проверим условие (b). Пусть $r = \inf\limits_{b \in B} \|b\|$. Поскольку 0 не лежит в замыкании B, имеем $r > 0$. Поскольку

$$\|\varphi(t',a) - \varphi(t,a)\| = 0; \quad \|\psi(t',b) - \psi(t,b)\| = \|b\|\ |t' - t| \ge r|t' - t|,$$

имеем $\|\Phi(t',a,b) - \Phi(t,a,b)\| \ge r|t' - t|$. Применяя теорему 1 к функциям φ и ψ, получаем, что множество Δ замкнуто и $\dim_H \Delta \le \dim_H(A \times B)$. □

Следствие 2. *Пусть* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *— компакты,* 0 *не лежит в замыкании* B*, и* $D \subseteq \mathbb{R}$*. Если* $\dim_H(A \times B) < d = \dim_H D$*, то* $A \cap tB = \varnothing$ *для почти всех* $t \in D$ *по* d*-мерной мере Хаусдорфа.*

4. Сдвиги и растяжения одной копии самоподобного множества

Теперь рассмотрим систему сжимающих подобий $\mathcal{F}_t = \{F_1^t, \ldots, F_m^t\}$ в $\mathbb{R}^n$, зависящую от вещественного или векторного параметра $t \in D$. Пусть K_t — аттрактор системы F_t, а $\pi_t\colon I^\infty \to K_t$ — его индексная параметризация. Пусть $i, j \in I$ зафиксированы и $i \neq j$. Пусть только одно отображение F_j^t системы $\mathcal{F}_t$ зависит от параметра t, в то время как остальные отображения $F_k = F_k^t$ не зависят. Нас интересует размерность множества

$$\Delta = \{t \in D\colon F_i(K_t) \cap F_j^t(K_t) \neq \varnothing\}$$

исключительных параметров для двух случаев:

1) $F_j^t(x) = G(x) + t$, где $t \in \mathbb{R}^n$;

2) $F_j^t(x) = tG(x) + h$, где $t \in (a,b)$, $0 < a < b < 1$, а G — изометрия в $\mathbb{R}^n$.

Не ограничивая общности, мы можем принять $i = 1$ и $j = m$.

Пусть $\varphi(t,\alpha) = F_1(\pi_t(\alpha))$, $\psi(t,\beta) = F_m^t(\pi_t(\beta))$. Для проверки условия (a) теоремы 1 для функций φ и ψ нам нужно задать подходящую метрику на индексном пространстве I^∞, что позволяет сделать следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами $(p_1,\ldots,p_m)$ и аттрактором K. Пусть $(q_1,\ldots,q_m) \in (0,1)^m$ — фиксированный набор чисел такой, что $p_i \le q_i$, $i \in I$. Пусть I^∞_ρ — индексное пространство I^∞, наделенное метрикой $\rho(\alpha,\beta) = q_{\alpha\wedge\beta}$. Тогда*:

(a) *индексная параметризация $\pi\colon I^\infty_\rho \to K$ аттрактора системы $\mathcal{F}$* (diam K)*-липшицева*;

(b) *хаусдорфова размерность $\dim_H I^\infty_\rho$ является решением s уравнения $\sum_{i=1}^m q_i^s = 1$.*

Доказательство. Пункт (a) проверяется аналогично случаю [8, Exercise 4.2.4]. Возьмем $\alpha,\beta \in I^\infty$, $\alpha \ne \beta$. Пусть $\boldsymbol{i} = \alpha \wedge \beta$. Тогда $\pi(\alpha)$ и $\pi(\beta)$ оба содержатся во множестве $F_{\boldsymbol{i}}(K)$, диаметр которого равен $p_{\boldsymbol{i}} \cdot \mathrm{diam}\ K$. Поскольку $p_{\boldsymbol{i}} \le q_{\boldsymbol{i}} = \rho(\alpha,\beta)$, имеем $\|\pi(\alpha) - \pi(\beta)\| \le (\mathrm{diam}\ K)\rho(\alpha,\beta)$, т. е. отображение π является (diam K)-липшицевым. Пункт (b) справедлив по теореме [8, Theorem 6.4.3]. □

Для проверки условия (b) теоремы 1 мы предлагаем следующий метод оценки сверху величины $\|\pi_t(\alpha) - \pi_{t'}(\alpha)\|$ через величину $\|t - t'\|$ для всевозможных $\alpha \in I^\infty$.

Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$ — такой компакт, что $F_i^t(V) \subseteq V$ для всех $i \in I$, $t \in D$. Обозначим $p = \max\{p_1,\ldots,p_{m-1}, \sup_{t\in D}\ p_m(t)\}$ и $\delta(t,t') = \max_{x\in V, i\in I} \|F_i^t(x) - F_i^{t'}(x)\|$. Тогда по теореме о смещении [6, Theorem 17] для любого $\alpha \in I^\infty$ и любых $t, t' \in D$ имеем оценку

$$\|\pi_t(\alpha) - \pi_{t'}(\alpha)\| \le \frac{\delta(t,t')}{1-p}. \tag{4.1}$$

Теперь, пользуясь леммой и неравенством (4.1), мы можем применить теорему 1 к разным вариантам поставленной проблемы.

4.1. Сдвиги

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{F}_t = \{F_1,\ldots,F_{m-1}, F_m^t(x) = G(x) + t\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами $(p_1,\ldots,p_m)$ и аттрактором K_t, зависящая от $t \in \mathbb{R}^n$. Пусть $p_1 + p_m + \max\{p_1,\ldots,p_m\} < 1$. Тогда для множества $\Delta = \{t \in \mathbb{R}^n\colon F_1(K_t) \cap F_m^t(K_t) \ne \varnothing\}$ выполняется неравенство*

$$\dim_H \Delta \le 2\ \dim_S \mathcal{F}_0.$$

Доказательство. Пусть $\pi_t\colon I^\infty \to K_t$ — индексная параметризация аттрактора системы $\mathcal{F}_t$. Обозначим $p_{\max} = \max\{p_1,\ldots,p_m\}$. Пусть

$$\varphi(t,\alpha) = F_1(\pi_t(\alpha)), \quad \psi(t,\beta) = G(\pi_t(\beta)) + t, \quad \Phi(t,\alpha,\beta) = \varphi(t,\alpha) - \psi(t,\beta).$$

Заметим, что так как коэффициент подобия p_m отображения F_m^t не зависит от параметра t, то размерность подобия $\dim_S \mathcal{F}_t$ системы $\mathcal{F}_t$ постоянна и равна $\dim_S \mathcal{F}_0$. Полагая $q_i = p_i$, $i \in I$, из леммы видим, что $\dim_H I^\infty_\rho = \dim_S \mathcal{F}_0$, а функции φ и ψ липшицевы и поэтому удовлетворяют условию (a) теоремы 1.

Проверим условие (b) теоремы 1. Так как при любом выборе ограниченного множества $D \subseteq \mathbb{R}^n$ параметров t неравенство (4.1) принимает вид $\|\pi_{t'}(\alpha) - \pi_t(\alpha)\| \le \|t' - t\|/(1 - p_{\max})$, оно справедливо для всех $t, t' \in \mathbb{R}^n$. Отсюда получаем

$$\|\varphi(t',\alpha) - \varphi(t,\alpha)\| \le p_1 \|\pi_{t'}(\alpha) - \pi_t(\alpha)\| \le \frac{p_1\|t'-t\|}{1-p_{\max}};$$

$$\|\psi(t',\beta) - \psi(t,\beta)\| \ge \|t'-t\| - p_m\|\pi_{t'}(\beta) - \pi_t(\beta)\| \ge \frac{1 - p_{\max} - p_m}{1 - p_{\max}}\|t'-t\|.$$

Наконец, из $\|\Phi(t',\alpha,\beta)-\Phi(t,\alpha,\beta)\| \geq \|\psi(t',\beta)-\psi(t,\beta)\| - \|\varphi(t',\alpha)-\varphi(t,\alpha)\|$ имеем

$$\|\Phi(t',\alpha,\beta)-\Phi(t,\alpha,\beta)\| \geq \frac{1-p_{\max}-p_m-p_1}{1-p_{\max}}\|t'-t\|.$$

По условию $p_1+p_m+p_{\max}<1$, поэтому функции φ и ψ удовлетворяют условию (b) теоремы 1. Применяя ее и учитывая, что $\dim_H(I_\rho^\infty)^2 = 2\dim_H I_\rho^\infty = 2\dim_S \mathcal{F}_0$, получаем $\dim_H \Delta \leq 2\dim_S \mathcal{F}_0$. $\square$

Следствие 3. *В условиях теоремы 4, если* $\dim_S \mathcal{F}_0 < n/2$, *то* $F_1(K_t)\cap F_m^t(K_t)=\varnothing$ *для почти всех* $t\in\mathbb{R}^n$ *по мере Лебега.*

В следующем утверждении мы будем подразумевать, что на произведении $(\mathbb{R}^n)^m$ задана мера μ, эквивалентная лебеговской мере на $\mathbb{R}^{nm}$.

Следствие 4. *Пусть* $\mathcal{F}_\tau=\{F_1^\tau(x)=G_1(x)+t_1,\dots,F_m^\tau(x)=G_m(x)+t_m\}$ *— система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с коэффициентами* $(p_1,\dots,p_m)$ *и аттрактором* K_τ, *зависящая от набора параметров* $\tau=(t_1,\dots,t_m)\in(\mathbb{R}^n)^m$. *Пусть* $\max\{p_1,\dots,p_m\}<1/3$ *и* $\dim_S\mathcal{F}_0<n/2$. *Тогда система* $\mathcal{F}_\tau$ *строго отделима для почти всех* τ *по мере* μ.

Доказательство. Пусть $\pi_\tau\colon I^\infty\to K_\tau$ — индексная параметризация аттрактора системы $\mathcal{F}_\tau$. Введем отображения $\varphi_i(\tau,\alpha)=F_i^\tau(\pi_\tau(\alpha))$, $i\in I$.

Рассмотрим множество Δ всех $\tau\in(\mathbb{R}^n)^m$, при которых система $\mathcal{F}_\tau$ не удовлетворяет SSC. Ясно, что если $\tau\in\Delta$, то $F_i^\tau(K_\tau)\cap F_j^\tau(K_\tau)$ непусто для некоторых $i\neq j$. Поэтому можно представить Δ в виде объединения

$$\Delta=\bigcup_{i=1}^m\Big(\bigcup_{j=1,j\neq i}^m \Delta_{ij}\Big),$$

где $\Delta_{ij}=\{\tau\in(\mathbb{R}^n)^m\colon F_i^\tau(K_\tau)\cap F_j^\tau(K_\tau)\neq\varnothing\}$, $i\neq j$. Заметим, что соотношение $F_i^\tau(K_\tau)\cap F_j^\tau(K_\tau)\neq\varnothing$ эквивалентно тому, что $\varphi_i(\tau,\alpha)=\varphi_j(\tau,\beta)$ для некоторых $\alpha,\beta\in I^\infty$. В силу непрерывности функций $\varphi_k\colon(\mathbb{R}^n)^m\times I^\infty\to\mathbb{R}^n$, $k\in I$, множества $\widetilde{\Delta_{ij}}$ решений (τ,α,β) уравнений $\varphi_i(\tau,\alpha)=\varphi_j(\tau,\beta)$ замкнуты. Значит, их проекции $\Delta_{ij}=\mathrm{Pr}_1(\widetilde{\Delta_{ij}})$ замкнуты в силу замкнутости канонической проекции $\mathrm{Pr}_1\colon(\mathbb{R}^n)^m\times I^\infty\times I^\infty\to(\mathbb{R}^n)^m$ [9, Ch. 4, 41, IV, Theorem 1]. Это позволяет нам применить теорему Фубини к характеристическим функциям $\chi_{ij}(\tau)=\chi_{ij}(t_1,\dots,t_m)$ множеств Δ_{ij}:

$$M_{ij}=\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^n}\!\!\cdots\int\chi_{ij}(\tau)dt_1\cdots dt_m=\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^n}\!\!\cdots\int dt_1\cdots dt_{j-1}dt_{j+1}\cdots dt_m\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi_{ij}(\tau)dt_j.$$

Так как по условию $p_i<1/3$, $i\in I$, и $\dim_S\mathcal{F}_0<n/2$, то по следствию 3 при любых фиксированных $t_k\in\mathbb{R}^n$, $k\in I$, $k\neq j$, мы получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi_{ij}(\tau)dt_j=0.$$

Значит, $M_{ij}=0$ при $i\neq j$, т.е. множества Δ_{ij} имеют нулевую μ-меру в пространстве $(\mathbb{R}^n)^m$. Таким образом, множество Δ как конечное объединение множеств нулевой μ-меры также имеет нулевую μ-меру. $\square$

4.2. Растяжения

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{F}_t = \{F_1, \dots, F_{m-1}, F_m^t(x) = tG(x) + h\}$ *— система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с коэффициентами* $(p_1, \dots, p_{m-1}, p_m(t))$ *и аттрактором* K_t*, зависящая от параметра* $t \in (a, b)$*, где* G *— изометрия в* $\mathbb{R}^n$*,* $0 < a < b < 1$*. Пусть* $r, R > 0$ *— такие числа, что* $r \leq \|G(x)\| \leq R$ *для любых* $x \in K_t$*,* $t \in (a, b)$*, и пусть* $(p_1 + b)/(1 - \max\{p_1, \dots, p_{m-1}, b\}) < r/R$*. Тогда для множества* $\Delta = \{t \in (a, b) \colon F_1(K_t) \cap F_m^t(K_t) \neq \varnothing\}$ *выполняется неравенство*

$$\dim_H \Delta \leq 2 \sup_{t \in (a,b)} \dim_S \mathcal{F}_t.$$

Доказательство. Пусть $\pi_t \colon I^\infty \to K_t$ — индексная параметризация аттрактора системы $\mathcal{F}_t$. Обозначим $p = \max\{p_1, \dots, p_{m-1}, b\}$ и $s = \sup_{t \in (a,b)} \dim_S \mathcal{F}_t$. Пусть

$$\varphi(t, \alpha) = F_1(\pi_t(\alpha)), \quad \psi(t, \beta) = tG(\pi_t(\beta)) + h, \quad \Phi(t, \alpha, \beta) = \varphi(t, \alpha) - \psi(t, \beta).$$

Заметим, что $p_m(t) = t$, поэтому размерность подобия $\dim_S \mathcal{F}_t$ системы $\mathcal{F}_t$ зависит от параметра t. Полагая $q_i = p_i$ для $1 \leq i < m$ и $q_m = b$, из леммы видим, что $\dim_H I_\rho^\infty = s$, а функции φ и ψ липшицевы и поэтому удовлетворяют условию (a) теоремы 1.

Проверим условие (b) теоремы 1. Заметим, что $r \leq \|G(\pi_t(\alpha))\| \leq R$ для любых $t \in (a, b)$, $\alpha \in I^\infty$. Неравенство (4.1) в нашем случае принимает вид $\|\pi_{t'}(\alpha) - \pi_t(\alpha)\| \leq R|t' - t|/(1 - p)$, откуда

$$\|\varphi(t', \alpha) - \varphi(t, \alpha)\| \leq \frac{p_1 R|t' - t|}{1 - p}; \quad \|tG(\pi_t(\beta)) - tG(\pi_{t'}(\beta))\| \leq \frac{bR|t' - t|}{1 - p}.$$

Из того, что $\|\psi(t', \beta) - \psi(t, \beta)\| \geq \|t'G(\pi_{t'}(\beta)) - tG(\pi_{t'}(\beta))\| - \|tG(\pi_{t'}(\beta)) - tG(\pi_t(\beta))\|$, следует

$$\|\psi(t', \beta) - \psi(t, \beta)\| \geq r|t' - t| - \frac{bR|t' - t|}{1 - p}.$$

Наконец, из $\|\Phi(t', \alpha, \beta) - \Phi(t, \alpha, \beta)\| \geq \|\psi(t', \beta) - \psi(t, \beta)\| - \|\varphi(t', \alpha) - \varphi(t, \alpha)\|$ получаем

$$\|\Phi(t', \alpha, \beta) - \Phi(t, \alpha, \beta)\| \geq \left[r - \frac{(p_1 + b)R}{1 - p}\right]|t' - t|.$$

По условию $(p_1 + b)/(1 - p) < r/R$, поэтому функции φ и ψ удовлетворяют условию (b) теоремы 1. Применяя ее и учитывая, что $\dim_H (I_\rho^\infty)^2 = 2 \dim_H I_\rho^\infty = 2s$, получаем $\dim_H \Delta \leq 2s$. $\square$

Следствие 5. *В условиях теоремы* 5*, если* $\sup_{t \in (a,b)} \dim_S \mathcal{F}_t < 1/2$*, то* $F_1(K_t) \cap F_m^t(K_t) = \varnothing$ *для почти всех* $t \in (a, b)$ *по мере Лебега.*

Следствие 6. *Пусть* $\mathcal{F}_\tau = \{F_1^\tau(x) = t_1 G_1(x) + h_1, \dots, F_m^\tau(x) = t_m G_m(x) + h_m\}$ *— система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *с аттрактором* K_τ*, зависящая от набора параметров* $\tau = (t_1, \dots, t_m) \in (a, b)^m$*, где* G_i*,* $i \in I$*, — изометрии в* $\mathbb{R}^n$*,* $0 < a < b < 1$*. Пусть* $r, R > 0$ *— такие числа, что* $r \leq \|G_i(x)\| \leq R$ *для любых* $x \in K_\tau$*,* $\tau \in (a, b)^m$*,* $i \in I$*. Пусть* $2b/(1 - b) < r/R$ *и* $(\ln(1/m))/\ln b < 1/2$*. Тогда система* $\mathcal{F}_\tau$ *строго отделима для почти всех* $\tau \in (a, b)^m$ *по мере Лебега.*

Доказательство. По аналогии с доказательством следствия 4 мы рассматриваем множество Δ всех $\tau \in (a, b)^m$, при которых система $\mathcal{F}_\tau$ не удовлетворяет SSC, представляя его в виде объединения

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{m} \Big(\bigcup_{j=1, j \neq i}^{m} \Delta_{ij} \Big),$$

где $\Delta_{ij} = \{\tau \in (a,b)^m : F_i^\tau(K_\tau) \cap F_j^\tau(K_\tau) \neq \varnothing\}$, и применяем теорему Фубини к характеристическим функциям $\chi_{ij}(\tau) = \chi_{ij}(t_1, \ldots, t_m)$ множеств Δ_{ij}, $i \neq j$:

$$M_{ij} = \int\limits_{(a,b)\times\cdots\times(a,b)} \!\!\cdots\!\! \int \chi_{ij}(\tau) dt_1 \cdots dt_m = \int\limits_{(a,b)\times\cdots\times(a,b)} \!\!\cdots\!\! \int dt_1 \cdots dt_{j-1} dt_{j+1} \cdots dt_m \int\limits_a^b \chi_{ij}(\tau) dt_j.$$

Так как по условию $(t_i + b)/(1-b) \leq 2b/(1-b) < r/R$ и $\sup\limits_{\tau \in (a,b)^m} \dim_S \mathcal{F}_\tau = (\ln(1/m))/\ln b < 1/2$, то по следствию 5 при любых фиксированных $t_k \in (a,b)$, $k \in I$, $k \neq j$, мы получаем

$$\int\limits_a^b \chi_{ij}(\tau) dt_j = 0.$$

Значит, $M_{ij} = 0$, т.е. множества Δ_{ij} имеют нулевую меру Лебега в $(a,b)^m$. Таким образом, множество Δ как конечное объединение множеств нулевой меры также имеет нулевую меру. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hutchinson J.** Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. Vol. 30. no. 5. P. 713–747. doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055.
2. **Marstrand J. M.** Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions // Proc. Lond. Math. Soc. 1954. Vol. s3–4, iss. 1. P. 257–302. doi: 10.1112/plms/s3-4.1.257.
3. **Mattila P.** Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in n-space // Acta Math. 1984. Vol. 152. P. 77–105. doi: 10.1007/BF02392192.
4. **Falconer K. J.** Dimensions of intersections and distance sets for polyhedral norms // Real Anal. Exchange. 2004. Vol. 30, no. 2. P. 719–726. doi: 10.14321/realanalexch.30.2.0719.
5. **Pollicott M., Simon K.** The Hausdorff dimension of λ-expansions with deleted digits // Trans. Am. Math. Soc. 1995. Vol. 347, no. 3. P. 967–983. doi: 10.2307/2154881.
6. **Kamalutdinov K. G., Tetenov A. V.** Twofold Cantor sets in $\mathbb{R}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 801–814. doi: 10.17377/semi.2018.15.066.
7. **Falconer K. J.** Fractal geometry: mathematical foundations and applications. 3rd ed. N Y: J. Wiley and Sons, 2014. 398 p.
8. **Edgar G.** Measure, Topology, and Fractal Geometry. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2008. 272 p. doi: 10.1007/978-0-387-74749-1.
9. **Kuratowski K.** Topology. Vol. 2. N Y; London: Acad. Press, 1968. 608 p.

Поступила 22.03.2019
После доработки 6.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Камалутдинов Кирилл Глебович
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: kirdan15@mail.ru

REFERENCES

1. Hutchinson J. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 1981, vol. 30, no. 5, pp. 713–747. doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055.
2. Marstrand J.M. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1954, vol. s3–4, no. 1, pp. 257–302. doi: 10.1112/plms/s3-4.1.257.
3. Mattila P. Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in n-space. *Acta Math.*, 1984, vol. 152, pp. 77–105. doi: 10.1007/BF02392192.

4. Falconer K.J. Dimensions of intersections and distance sets for polyhedral norms. *Real Anal. Exchange*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 719–726. doi: 10.14321/realanalexch.30.2.0719 .
5. Pollicott M., Simon K. The Hausdorff dimension of λ-expansions with deleted digits. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1995, vol. 347, no. 3, pp. 967–983. doi: 10.2307/2154881 .
6. Kamalutdinov K.G., Tetenov A.V. Twofold Cantor sets in $\mathbb{R}$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 801–814. doi: 10.17377/semi.2018.15.066 .
7. Falconer K.J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* 3rd ed. New York: J. Wiley and Sons, 2014, 398 p. ISBN: 9781118762851 .
8. Edgar G. *Measure, Topology, and Fractal Geometry.* 2nd ed. N Y: Springer-Verlag, 2008, 272 p. doi: 10.1007/978-0-387-74749-1 .
9. Kuratowski K. *Topology. Vol. II.* N Y; London: Acad. Press, 1968, 608 p. ISBN: 978-0-12-429202-4 . Translated to Russian under the title *Topologiya. T.* 2. Moscow, Mir Publ., 1969, 624 p.

Received March 22, 2019
Revised May 6, 2019
Accepted May 13, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-01-00569, 18-501-51021).

Kirill Glebovich Kamalutdinov, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: kirdan15@mail.ru .

Cite this article as: K. G. Kamalutdinov. Self-intersections in parametrized self-similar sets under translations and extensions of copies, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 116–124 .