ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.518.28 + 517.518.862

МНОГОМЕРНАЯ ВЕРСИЯ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ТУРАНА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ОЦЕНКЕ РАВНОМЕРНЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. А. Ильясов

В статье приведены доказательства следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть* $m\ge 1,\ f\in L_1(\mathbb{T}^m),\ l,k\in\mathbb{N},\ l>m,\ \rho=l-(k+m)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega_l(f;d/n)_{1,m}<\infty$; *тогда* f *эквивалентна некоторой функции* $\psi\in C(\mathbb{T}^m)$ *и справедлива оценка*

$$(a)\ \omega_k\Big(\psi;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\le C_1(k,l,m)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\Big\},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $\omega_l(f;\delta)_{1,m}$ *и* $\omega_k(\psi;\delta)_{\infty,m}$ — *соответственно полные модули гладкости* l*-го порядка функции* f *и* k*-го порядка функции* ψ, $\mathbb{T}^m=(-\pi,\pi]^m,\ d=\pi m^{1/2},\ \chi(t)=0$ *при* $t\le 0$ *и* $\chi(t)=1$ *при* $t>0$.

В случае $l=k+m$ ($\Rightarrow\chi(\rho)=0$) при доказательстве оценки (a) существенная роль принадлежит неравенству

$$(b)\ n^{-k}\max_{|\alpha|=k}\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}T_{n,\dots,n;1}(f;x)}{\partial x^{\alpha}}\Big\|_{\infty,m}\le C_2(k,m)n^m\omega_{k+m}\Big(f;\frac{d}{n+1}\Big)_{1,m},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $T_{n,\dots n;1}(f;x_1,\dots,x_m)$ — полином наилучшего в метрике $L_1(\mathbb{T}^m)$ приближения функции f порядка $n\in\mathbb{N}$ по переменной x_i $(i=\overline{1,m})$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}_+$ $(j=\overline{1,m})$, — мультииндекс длины $|\alpha|=k$.

Неравенство (b) доказывается привлечением многомерной версии неравенства типа Турана: для любого тригонометрического полинома $t_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m)$ порядка $n_i\in\mathbb{N}$ по переменной x_i $(i=\overline{1,m})$ справедливо неравенство

$$(c)\ \Big\|\frac{\partial^k t_{n_1,\dots,n_m}(x)}{\partial x^{\alpha}}\Big\|_{\infty,m}\le\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m\Big\|\frac{\partial^{k+m}t_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1+1}\dots\partial x_m^{\alpha_m+1}}\Big\|_{1,m},$$

которое непосредственно следует из аналогичного неравенства (полагаем $k=0$ в неравенстве (c)), но имеющего место при выполнении условий $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t_{n_1,\dots,n_i,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_i-y_i,\dots,x_m)\,dy_i=0,\ i=\overline{1,m}$.

Оценка (a) является точной в смысле порядка на классе $H^l_{1,m}[\omega]=\{f\in L_1(\mathbb{T}^m):\ \omega_l(f;\delta)_{1,m}\le\omega(\delta),\ \delta\in(0,d]\}$, где $\omega\in\Omega_l(0,d]$ — класс функций $\omega=\omega(\delta)$, определенных на $(0,d]$ и удовлетворяющих условиям: $0<\omega(\delta)\downarrow 0$ $(\delta\downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow$ $(\delta\uparrow)$.

Теорема 2. *Пусть* $m\ge 1,\ l,k\in\mathbb{N},\ l>m,\ \rho=l-(k+m),\ \omega\in\Omega_l(0,d]$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\omega(d/n)<\infty$; *тогда*

$$\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}:\ f\in H^l_{1,m}[\omega]\Big\}\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big),\quad n\in\mathbb{N},$$

где ψ *обозначает соответствующую функцию из класса* $C(\mathbb{T}^m)$, *эквивалентную* $f\in H^l_{1,m}[\omega]$.

Ключевые слова: полный модуль гладкости, многомерная версия неравенства типа Турана, неравенства между модулями гладкости различных порядков в разных метриках, точное в смысле порядка неравенство на классе.

N. A. Il'yasov. Multivariate version of Turan's type inequality and its applications to the estimation of uniform moduli of smoothness of periodic functions.

The following results are proved in the paper.

Theorem 1. *Let* $m\ge 1,\ f\in L_1(\mathbb{T}^m),\ l,k\in\mathbb{N},\ l>m,\ \rho=l-(k+m)$, *and* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\omega_l(f;d/n)_{1,m}<\infty$. *Then* f *is equivalent to some function* $\psi\in C(\mathbb{T}^m)$ *and*

$$\text{(a)}\ \ \omega_k\Big(\psi;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\le C_1(k,l,m)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\Big\},\quad n\in\mathbb{N},$$

where $\omega_l(f;\delta)_{1,m}$ is the l th-order complete modulus of smoothness of f, $\omega_k(\psi;\delta)_{\infty,m}$ is the k th-order complete modulus of smoothness of ψ, $\mathbb{T}^m=(-\pi,\pi]^m$, $d=\pi m^{1/2}$, $\chi(t)=0$ for $t\le 0$, and $\chi(t)=1$ for $t>0$.

In the case $l=k+m$ ($\Rightarrow \chi(\rho)=0$), the proof of estimate (a) relies substantially on the inequality

$$\text{(b)}\quad n^{-k}\max_{|\alpha|=k}\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}T_{n,\dots,n;1}(f;x)}{\partial x^{\alpha}}\Big\|_{\infty,m}\le C_2(k,m)n^m\omega_{k+m}\Big(f;\frac{d}{n+1}\Big)_{1,m},\quad n\in\mathbb{N},$$

where $T_{n,\dots,n;1}(f;x_1,\dots,x_m)$ is a polynomial of best $L_1(\mathbb{T}^m)$-approximation to f of order $n\in\mathbb{N}$ with respect to the variable x_i ($i=\overline{1,m}$) and $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}_+$ ($j=\overline{1,m}$), is a multiindex of length $|\alpha|=k$. Inequality (b) is proved by using a multivariate version of Turan's type inequality: for each trigonometric polynomial $t_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m)$ of order $n_i\in\mathbb{N}$ with respect to the variable x_i ($i=\overline{1,m}$), we have the inequality

$$\text{(c)}\quad \Big\|\frac{\partial^k t_{n_1,\dots,n_m}(x)}{\partial x^{\alpha}}\Big\|_{\infty,m}\le\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m\Big\|\frac{\partial^{k+m}t_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1+1}\dots\partial x_m^{\alpha_m+1}}\Big\|_{1,m},$$

which follows directly from a similar inequality (with $k=0$ in inequality (c)) but holds under the conditions $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t_{n_1,\dots,n_i,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_i-y_i,\dots,x_m)\,dy_i=0$, $i=\overline{1,m}$.

Estimate (a) is order-sharp in the class $H^l_{1,m}[\omega]=\{f\in L_1(\mathbb{T}^m):\ \omega_l(f;\delta)_{1,m}\le\omega(\delta),\ \delta\in(0,d]\}$, where $\omega\in\Omega_l(0,d]$ is the class of functions $\omega=\omega(\delta)$ defined on $(0,d]$ and satisfying the conditions $0<\omega(\delta)\downarrow 0$ ($\delta\downarrow 0$) and $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow$ ($\delta\uparrow$).

Theorem 2. *Let $m\ge 1$, $l,k\in\mathbb{N}$, $l>m$, $\rho=l-(k+m)$, $\omega\in\Omega_l(0,d]$, and $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\omega(d/n)<\infty$. Then*

$$\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}:\ f\in H^l_{1,m}[\omega]\Big\}\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big),\quad n\in\mathbb{N},$$

where ψ is the corresponding function from the class $C(\mathbb{T}^m)$ equivalent to $f\in H^l_{1,m}[\omega]$.

Keywords: complete modulus of smoothness, multivariate version of Turan's type inequality, inequalities between moduli of smoothness of various order in different metrics, order-sharp inequality on a class.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-102-115

Введение

В статье используются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^m$ — m-мерное эвклидово пространство точек $x=(x_1,\dots,x_m)$, $m\in\mathbb{N}$, $|x|=(x_1^2+\dots+x_m^2)^{1/2}$, $\mathbb{T}^m=(-\pi,\pi]^m$;

$L_1(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной x_i ($i=\overline{1,m}$) функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_m)$ с конечной $L_1(\mathbb{T}^m)$-нормой $\|f\|_{1,m}=\pi^{-m}\int_{\mathbb{T}^m}|f(x)|\,dx$;

$C(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций с равномерной нормой $\|f\|_{\infty,m}=\max\{|f(x)|\colon x\in\mathbb{T}^m\}$;

$\omega_l(f;\delta)_{1,m}$ — полный модуль гладкости l-го порядка функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$, $l\in\mathbb{N}$, $\delta\in[0,\infty)$: $\omega_l(f;\delta)_{1,m}=\sup\{\|\Delta_h^l f(\cdot)\|_{1,m}\colon h\in\mathbb{R}^m,\ |h|\le\delta\}$, где

$$\Delta_h^l f(x)=\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^{l-\nu}\binom{l}{\nu}f(x+\nu h),\qquad \binom{l}{\nu}=\frac{l!}{\nu!(l-\nu)!},\quad \nu=\overline{0,l};$$

$\Omega_l(0,d]$ — класс функций $\omega=\omega(\delta)$, определенных на $(0,d]$ и удовлетворяющих условиям $0<\omega(\delta)\downarrow 0$ ($\delta\downarrow 0$) и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow$ ($\delta\uparrow$);

$H^l_{1,m}[\omega]$ — класс функций $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$, для каждой из которых $\omega_l(f;\delta)_{1,m}\le\omega(\delta)$, $\delta\in(0,d]$, где $\omega\in\Omega_l(0,d]$.

Ниже и всюду в дальнейшем $C_j(k,l,m,\dots)$, где $j\in\mathbb{N}$, обозначают положительные числа, значения которых зависят только от указанных в скобках параметров, а $\chi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, обозначает функцию Хевисайда: $\chi(t)=0$ при $t\le 0$ и $\chi(t)=1$ при $t>0$.

Теорема 1. *Пусть* $m \geq 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l > m$, $\rho = l - (k+m)$, $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \omega_l\Big(f; \frac{d}{n}\Big)_{1,m} < \infty; \tag{0.1}$$

тогда f *эквивалентна (в смысле* m*-мерной меры Лебега) некоторой функции* $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ *и справедлива оценка*

$$\omega_k\Big(\psi; \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} \leq C_1(k,l,m)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega_l\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m} + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1} \omega_l\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$

З а м е ч а н и е 1. Условие $l > m$ необходимо для сходимости ряда (0.1) для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(f;\delta)_{1,m} \not\equiv 0$, поскольку в противном случае в силу известного свойства $\omega_l(f;\delta)_{1,m} \geq (2d)^{-l}\omega_l(f;d)_{1,m}\delta^l$, $\delta \in (0,d]$, ряд (0.1) заведомо расходится. Если же ряд (0.1) сходится при $l \leq m$ для некоторой функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$, то $\omega_l(f;\delta)_{1,m} \equiv 0$, откуда следует, что f эквивалентна постоянной (см. по этому поводу п. 1 замечания 4 в работе автора “О порядке равномерной сходимости частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах функций $H^l_{1,m}[\omega]$” (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 2015, Т. 21, № 4, С. 161–177)). На указанную статью будем ссылаться ниже как *на работу автора 2015 г.*

В случае $l = k + m$ ($\Rightarrow \chi(\rho) = 0$) при доказательстве оценки (0.2) существенная роль принадлежит неравенству (см. разд. 2, лемма 3, неравенство (2.1))

$$n^{-k} \max_{|\alpha|=k} \Big\| \frac{\partial^{|\alpha|} T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \Big\|_{\infty,m} \leq C_2(k,m) n^m \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{n}\Big)_{1,m}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.3}$$

где $T_{n,\ldots,n;1}(f;x_1,\ldots,x_m)$ — полином наилучшего в метрике $L_1(\mathbb{T}^m)$ приближения функции f порядка $n \in \mathbb{N}$ по переменной x_i $(i = \overline{1,m})$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс длины $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = k$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ $(j = \overline{1,m})$.

Неравенство (0.3) доказывается привлечением многомерной версии неравенства типа Турана, а именно: для любого тригонометрического полинома $t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1,\ldots,x_m)$ порядка $n_i \in \mathbb{N}$ по переменной x_i $(i = \overline{1,m})$ справедливо неравенство (см. разд. 1, лемма 2, неравенство (1.12))

$$\Big\| \frac{\partial^k t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} \Big\|_{\infty,m} \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m \Big\| \frac{\partial^{k+m} t_{n_1,\cdots,n_m}(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1+1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m+1}} \Big\|_{1,m}, \tag{0.4}$$

которое непосредственно следует из неравенства (см. разд. 1, лемма 1, неравенство (1.2))

$$\|t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1,\ldots,x_m)\|_{\infty,m} \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m \Big\| \frac{\partial^m}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1,\ldots,x_m) \Big\|_{1,m}, \tag{0.5}$$

имеющего место при выполнении условий

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} t_{n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_m}(x_1,\ldots,x_i - y_i,\ldots,x_m)\, dy_i = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{0.6}$$

З а м е ч а н и е 2. 1) В случае $m = 1$ теорема 1 доказана автором в работе “О порядке убывания равномерных модулей гладкости на классах периодических функций $H^l_p[\omega]$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$” (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 2017, Т. 23, № 4, С. 162–175); см. в ней теорему 1 при $p = 1$ и $r = 0$.

На указанную статью будем далее ссылаться как на работу автора 2017 г.

2) Доказательства неравенств (0.3) и (0.4) в случае $m = 1$ приведены в разд. 1 работы автора 2017 г. (см. лемму 2 и лемму 1 соответственно). Утверждение о справедливости неравенства (0.5) в случае $m = 1$ при выполнении соответствующего условия (0.6): $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} t_n(z)\,dz = 0$ отмечено там же (п. 1) замечания 5).

Оценка (0.2) является точной в смысле порядка на классе функций $H^l_{1,m}[\omega]$.

Теорема 2. *Пусть* $m \geq 1,\ l, k \in \mathbb{N},\ l > m,\ \rho = l - (k+m),\ \omega \in \Omega_l(0, d]$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \omega\Big(\frac{d}{n}\Big) < \infty; \tag{0.7}$$

тогда

$$\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi; \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} :\ f \in H^l_{1,m}[\omega]\Big\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.8}$$

где ψ *обозначает соответствующую функцию из* $C(\mathbb{T}^m)$*, эквивалентную* $f \in H^l_{1,m}[\omega]$*.*

Напомним, что порядковое равенство $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает существование таких чисел $0 < C_2 \leq C_1$ (значения которых зависят лишь от заданных в условии утверждения параметров, в данном случае $k,\ l$ и m), что $C_2\beta_n \leq \alpha_n \leq C_1\beta_n$.

З а м е ч а н и е 3. Условие (0.7) необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(f;\delta)_{1,m} = O(\omega(\delta)),\ \delta \in (0, d]$, была эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$. Достаточность следует из первой части утверждения теоремы 1, а необходимость имеет место в силу пп. 1) и 2) леммы 4 в разд. 3 настоящей статьи (в случае $m = 1$ см. замечание 3 при $p = 1$ и $r = 0$ в работе автора 2017 г.).

1. Многомерная версия неравенства типа Турана для тригонометрических полиномов

Обозначим $\varphi(z) = (\pi - z)/2,\ z \in [0, 2\pi)$ и положим $\varphi(z) = \varphi(z + 2\pi),\ z \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $|\varphi(z)| \leq \pi/2,\ z \in \mathbb{R}$, и существует $\lim\limits_{z \to 2\pi - 0} \varphi(z) = \varphi(2\pi - 0) = -\pi/2$.

Лемма 1. *Пусть* $t_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)$ *— произвольный тригонометрический полином порядка* $n_i \in \mathbb{N}$ *по переменной* x_i $(i = \overline{1,m})$ *и выполнены условия*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t_{n_1,\dots,n_i,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_i - y_i, \dots, x_m)\, dy_i = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.1}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|t_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)\|_{\infty,m} \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m \Big\|\frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} t_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)\Big\|_{1,m}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $m = 1$ утверждение о справедливости неравенства (1.2) при соответствующем условии (1.1) отмечено в п. 1) замечания 5 работы автора 2017 г. Действительно, для любого полинома $t_n(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$, где $a_0,\ a_\nu,\ b_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu = \overline{1,n})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, имеет место равенство

$$t_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(y) t_n'(x - y)\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t_n(x - y)\, dy, \tag{1.3}$$

а так как второе слагаемое в (1.3) согласно (1.1) равно $a_0 = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} t_n(z)\, dz = 0$, то неравенство (1.2) в случае $m = 1$ непосредственно следует из равенства (1.3).

Поскольку количество переменных не имеет принципиального значения, то для доказательства неравенства (1.2) при $m > 1$ достаточно ограничиться рассмотрением случая $m = 2$.

Вначале установим, что для полинома $t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ порядка $n_1 \in \mathbb{N}$ по переменной x_1 и порядка $n_2 \in \mathbb{N}$ по переменной x_2 выполняется равенство

$$t_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(y_1)\varphi(y_2)\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2. \tag{1.4}$$

Интегрируя по частям, для любых $\eta_1,\eta_2\in(0,2\pi)$ имеем

$$\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}\varphi(y_1)\varphi(y_2)\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2$$

$$=\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}\varphi(y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}\Big(\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\Big)\,dy_2$$

$$=\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\,dy_1\bigg\{\varphi(2\pi-\eta_2)\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-2\pi+\eta_2)-\varphi(0)\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_2\bigg\}$$

$$=\varphi(2\pi-\eta_2)\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-2\pi+\eta_2)\,dy_1-\varphi(0)\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_2\equiv J_1(\eta_1,\eta_2)+J_2(\eta_1)+J_3(\eta_1,\eta_2). \tag{1.5}$$

Применяя формулы интегрирования по частям в слагаемых J_1, J_2 и J_3, получаем

$$J_1(\eta_1,\eta_2)=\varphi(2\pi-\eta_2)\bigg\{\varphi(2\pi-\eta_1)t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi+\eta_1,x_2-2\pi+\eta_2)$$

$$-\varphi(0)t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-2\pi+\eta_2)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-2\pi+\eta_2)\,dy_1\bigg\};$$

$$J_2(\eta_1)=-\varphi(0)\bigg\{\varphi(2\pi-\eta_1)t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi+\eta_1,x_2)-\varphi(0)t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1\bigg\};$$

$$J_3(\eta_1,\eta_2)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_2$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}dy_2\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\varphi(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}dy_2\Bigg\{\varphi(2\pi-\eta_1)t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi+\eta_1,x_2-y_2)-\varphi(0)t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(2\pi-\eta_1)\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi+\eta_1,x_2-y_2)\,dy_2-\frac{1}{2}\varphi(0)\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi-\eta_1}\int\limits_0^{2\pi-\eta_2}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2.$$

Переходя к пределу при $\eta_1\to 0$, $\eta_2\to 0$ в полученных для J_1, J_2 и J_3 выражениях и учитывая равенства $\varphi(0)=\pi/2$, $\varphi(2\pi-0)=-\pi/2$, имеем

$$\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}J_1(\eta_1,\eta_2)=\varphi(2\pi-0)\Bigg\{\varphi(2\pi-0)t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2-2\pi)-\varphi(0)t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-2\pi)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-2\pi)\,dy_1\Bigg\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\big\{t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2-2\pi)+t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-2\pi)\big\}-\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-2\pi)\,dy_1; \tag{1.6}$$

$$\lim_{\eta_1\to 0}J_2(\eta_1)=-\varphi(0)\Bigg\{\varphi(2\pi-0)t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2)-\varphi(0)t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1\Bigg\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\big\{t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2)+t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)\big\}-\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1; \tag{1.7}$$

$$\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}J_3(\eta_1,\eta_2)=\frac{1}{2}\varphi(2\pi-0)\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2-y_2)\,dy_2-\frac{1}{2}\varphi(0)\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2=-\frac{\pi}{4}\Bigg\{\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2-y_2)\,dy_2$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2\Bigg\}+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2. \tag{1.8}$$

Учитывая равенства (1.6), (1.7) и (1.8) в (1.5), а также 2π-периодичность полинома $t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ по каждой переменной, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(y_1)\varphi(y_2)\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\big\{J_1(\eta_1,\eta_2)+J_2(\eta_1)+J_3(\eta_1,\eta_2)\big\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\big\{t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2-2\pi)+t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-2\pi)\big\}-\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-2\pi)\,dy_1$$

$$+\frac{\pi^2}{4}\big\{t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2)+t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)\big\}-\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1$$

$$-\frac{\pi}{4}\Bigg\{\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-2\pi,x_2-y_2)\,dy_2+\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2\Bigg\}+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2$$

$$=\pi^2 t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2$$

$$-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2,$$

откуда следует равенство (1.4).

Далее, выполнение условий (1.1) в случае $m=2$ обеспечивает равенство нулю последних трех слагаемых в правой части (1.4) (см. ниже замечание 4). Учитывая этот факт, имеем

$$\big|t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)\big|\le\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(y_1)||\varphi(y_2)|\Big|\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\Big|\,dy_1\,dy_2$$

$$\le\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big|\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\Big|\,dy_1\,dy_2=\frac{\pi^2}{4}\Big\|\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)\Big\|_{1,2},$$

откуда следует неравенство (1.2) в случае $m=2$. Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е 4. 1) Замена переменных в интегралах в правой части (1.4) приводит к следующим равенствам (при выполнении условий (1.1) в случае $m=2$):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2)\,dy_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}t_{n_1,n_2}(z_1,z_2)\,dz_1=0, \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1,x_2-y_2)\,dy_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}t_{n_1,n_2}(z_1,z_2)\,dz_2=0, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}t_{n_1,n_2}(x_1-y_1,x_2-y_2)\,dy_1\,dy_2=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}t_{n_1,n_2}(z_1,z_2)\,dz_1\,dz_2=0. \tag{1.11}$$

2) Применяемый метод доказательства неравенства (1.2) в случае $m = 2$ (см. выше равенство (1.4)) не позволяет ограничиться привлечением лишь одного условия (1.11) вместо двух условий (1.9) и (1.10). Очевидно, что если выполняется хотя бы одно из условий (1.9) либо (1.10), то всегда выполняется также и условие (1.11). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. выполнение условия (1.11) не гарантирует выполнение хотя бы одного из условий (1.9) либо (1.10). Например, для полинома $t_{n_1,n_2}(z_1, z_2) = \cos n_1 z_1 + \cos n_2 z_2$, где $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, z_1, $z_2 \in \mathbb{T}$, условие (1.11) выполняется, но

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n_1,n_2}(z_1, z_2)\, dz_1 = \cos n_2 z_2, \quad z_2 \in \mathbb{T} \ \text{ и } \ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n_1,n_2}(z_1, z_2)\, dz_2 = \cos n_1 z_1, \quad z_1 \in \mathbb{T}.$$

Лемма 2. *Пусть $m \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1, \ldots, x_m)$ — тригонометрический полином порядка $n_i \in \mathbb{N}$ по переменной x_i ($i = \overline{1,m}$). Тогда для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ ($j = \overline{1,m}$), длины $|\alpha| = k$ справедливо неравенство*

$$\Big\|\frac{\partial^k t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\Big\|_{\infty,m} \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m \Big\|\frac{\partial^{k+m} t_{n_1,\ldots,n_m}(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1+1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m+1}}\Big\|_{1,m}. \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале отметим, что поскольку $k \in \mathbb{N}$, то необходимость в привлечении условий (1.1) отпадает. Далее, применяя неравенство (1.2) к полиному, стоящему под знаком нормы в левой части (1.12), получаем требуемое неравенство. Лемма 2 доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Предварительно докажем одно вспомогательное неравенство, представляющее также и самостоятельный интерес. Обозначим через $E_{n,\ldots,n}(f)_{1,m}$ величину наилучшего в метрике $L_1(\mathbb{T}^m)$ приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка $n \in \mathbb{N}$ по переменной x_i ($i = \overline{1,m}$): $E_{n,\ldots,n}(f)_{1,m} = \|f(x_1, \ldots, x_m) - T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)\|_{1,m}$.

Лемма 3. *Пусть $m \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ и $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$; тогда имеет место неравенство*

$$n^{-k} \max_{|\alpha|=k} \Big\|\frac{\partial^{|\alpha|} T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\Big\|_{\infty,m} \leq C_2(k, m) n^m \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{n+1}\Big)_{1,m}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого мультииндекса длины $|\alpha| = k$ в силу неравенства (1.12) и кратного аналога неравенства Ф. Рисса — С. Б. Стечкина — С. М. Никольского (см., например, [1, гл. IV, п. 4.8.62, неравенство (29)]) имеем

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|} T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\Big\|_{\infty,m} &\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m \Big\|\frac{\partial^{|\alpha|+m} T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1+1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m+1}}\Big\|_{1,m} \\
&\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m \prod_{i=1}^m 2^{-(\alpha_i+1)} n^{\alpha_i+1} \Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^{\alpha_1+1}} \ldots \underset{m\ \pi/n}{\Delta^{\alpha_m+1}} T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)\Big\|_{1,m} \\
&= \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m 2^{-(|\alpha|+m)} n^{|\alpha|+m} \Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^{\alpha_1+1}} \ldots \underset{m\ \pi/n}{\Delta^{\alpha_m+1}} T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m)\Big\|_{1,m} \\
&\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m 2^{-(|\alpha|+m)} n^{|\alpha|+m} \Big\{2^{|\alpha|+m} \|T_{n,\ldots,n;1}(f; x_1, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)\|_{1,m} \\
&\qquad + \Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^{\alpha_1+1}} \ldots \underset{m\ \pi/n}{\Delta^{\alpha_m+1}} f(x_1, \ldots, x_m)\Big\|_{1,m}\Big\} \\
&\leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m n^{|\alpha|+m} \Big\{E_{n,\ldots,n}(f)_{1,m} + 2^{-(|\alpha|+m)} \omega_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_m+1}\Big(f; \frac{\pi}{n}, \ldots, \frac{\pi}{n}\Big)_{1,m}\Big\},
\end{aligned}$$

откуда

$$n^{-k}\max_{|\alpha|=k}\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}T_{n,\dots,n;1}(f;x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}\Big\|_{\infty,m}$$

$$\le\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m n^m\Big\{E_{n,\dots,n}(f)_{1,m}+2^{-(k+m)}\max_{|\alpha|=k}\omega_{\alpha_1+1,\dots,\alpha_m+1}\Big(f;\frac{\pi}{n},\dots,\frac{\pi}{n}\Big)_{1,m}\Big\},\qquad(2.2)$$

где

$$\omega_{\alpha_1+1,\dots,\alpha_m+1}(f;\delta_1,\dots,\delta_m)_{1,m}$$

$$=\sup\Big\{\Big\|\underset{1\,h_1}{\Delta}^{\alpha_1+1}\cdots\underset{m\,h_m}{\Delta}^{\alpha_m+1}f(x_1,\dots,x_m)\Big\|_{1,m}:\ h_i\in\mathbb{R},\ |h_i|\le\delta_i,\ i=\overline{1,m}\Big\}$$

— смешанный модуль гладкости функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ порядка α_i+1 по переменной x_i $(i=\overline{1,m})$.

Оценим слагаемые в правой части (2.2). Полагая $q=1,\ k_i=l\in\mathbb{N},\ n_i=n\in\mathbb{Z}_+$ $(i=\overline{1,m})$ в неравенстве (1) из [1, гл. V, п. 5.3, теорема 5.3.1] и учитывая очевидные оценки $\max\{\omega_l^{(i)}(f;\delta)_{1,m}:\ i=\overline{1,m}\}\le\omega_l(f;\delta,\dots,\delta)_{1,m}\le\omega_l(f;m^{1/2}\delta)_{1,m},\ \delta\in[0,\infty)$, где (см., например, [1, гл. III, п. 3.4.34; 2, п. 3 и п. 1]) $\omega_l(f;\delta,\dots,\delta)_{1,m}$ и $\omega_l^{(i)}(f;\delta)_{1,m}$— соответственно полный (кубический) и частный по i-й переменной модули гладкости l-го порядка функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$, получаем $L_1(\mathbb{T}^m)$ — аналог неравенства Джексона — Стечкина

$$E_{n,\dots,n}(f)_{1,m}\le C_3(l,m)\,\omega_l\Big(f;\frac{d}{n+1}\Big)_{1,m},\quad n\in\mathbb{Z}_+.\qquad(2.3)$$

Далее, полагая $p=1,\ u_i=\delta\ (i=\overline{1,m}),\ r=l\in\mathbb{N}$ в порядковом равенстве (23) [2, п. 3, теорема 7], имеем $(\beta=(\beta_1,\dots,\beta_m),\ \beta_i\in\mathbb{Z}_+,\ i=\overline{1,m})$

$$\max_{|\beta|=l}\omega_{\beta_1,\dots,\beta_m}(f;\delta,\dots,\delta)_{1,m}$$

$$\le\sum_{|\beta|=l}\omega_{\beta_1,\dots,\beta_m}(f;\delta,\dots,\delta)_{1,m}\le C_4(l,m)\omega_l(f;\delta,\dots,\delta)_{1,m}\le C_4(l,m)\omega_l(f;m^{1/2}\delta)_{1,m},$$

откуда следует оценка

$$\max_{|\beta|=l}\omega_{\beta_1,\dots,\beta_m}\Big(f;\frac{\pi}{n},\dots,\frac{\pi}{n}\Big)_{1,m}\le C_4(l,m)\omega_l\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{1,m},\quad n\in\mathbb{N}.\qquad(2.4)$$

Поскольку $(\beta_i=\alpha_i+1,\ i=\overline{1,m}\Rightarrow|\beta|=|\alpha|+m=k+m)$

$$\max_{|\alpha|=k}\omega_{\alpha_1+1,\dots,\alpha_m+1}(f;\delta_1,\dots,\delta_m)_{1,m}=\max_{|\beta|=k+m}\omega_{\beta_1,\dots,\beta_m}(f;\delta_1,\dots,\delta_m)_{1,m},$$

то в силу оценки (2.4) для значения $l=k+m$ получаем

$$\max_{|\alpha|=k}\omega_{\alpha_1+1,\dots,\alpha_m+1}\Big(f;\frac{\pi}{n},\dots,\frac{\pi}{n}\Big)_{1,m}\le C_4(k+m,m)\omega_{k+m}\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{1,m},\quad n\in\mathbb{N}.\qquad(2.5)$$

И, наконец, применяя неравенства (2.3) (полагаем $l=k+m$) и (2.5) в оценке (2.2), окончательно имеем

$$n^{-k}\max_{|\alpha|=k}\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}T_{n,\dots,n;1}(f;x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}\Big\|_{\infty,m}\le 2^{-m}\pi^m n^m\Big\{C_3(k+m,m)\omega_{k+m}\Big(f;\frac{d}{n+1}\Big)_{1,m}$$

$$+\,2^{-(k+m)}C_4(k+m,m)\omega_{k+m}\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{1,m}\Big\}\le C_2(k,m)n^m\omega_{k+m}\Big(f;\frac{d}{n+1}\Big)_{1,m},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $C_2(k,m)=2^{-m}\pi^m\{C_3(k+m,m)+C_4(k+m,m)\}$. Лемма 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Из условия (0.1) в силу неравенства (2.3) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} < \infty$, гарантирующая в силу леммы 1 из [3] эквивалентность $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедливость оценки

$$\omega_k\Big(\psi; \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} \le C_5(k,m)\bigg\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m} + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1} E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\bigg\}$$

$$\le C_5(k,m)C_3(l,m)\bigg\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega_l\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m} + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\omega_l\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\bigg\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда следует (0.2) в случае $l > k+m$ ($\Leftrightarrow \rho = l-(k+m) > 0 \Rightarrow \chi(\rho) = 1$) с постоянной $C_1(k,l,m) = C_5(k,m)C_3(l,m)$.

Рассмотрим случай $l = k+m$. В заметке [4] отмечен m-мерный аналог неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина (при $m = 1$ см. [5, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)]), из доказательства которого (проводимого точно так же, как и в одномерном случае), в частности, следует справедливость оценки

$$\big\|\psi(\cdot) - T_{n,\dots,n;1}(f;\cdot)\big\|_{\infty,m} \le C_6(m)\bigg\{(n+1)^m E_{n,\dots,n}(f)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} E_{\nu,\dots,\nu}(f)_{1,m}\bigg\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.6}$$

Далее, в силу известных свойств модулей гладкости и неравенства (см., например, [6, § 3, неравенство (8) и замечание 6]) $\omega_l(g;\delta)_{p,m} \le m^l\delta^l \max\big\{\|\partial^{|\alpha|}g/\partial x^\alpha\|_{p,m}\colon |\alpha| = l\big\}$, где $1 \le p \le \infty$, имеем

$$\omega_k\Big(\psi; \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} \le \omega_k\Big(\psi(\cdot) - T_{n,\dots,n;1}(f;\cdot); \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} + \omega_k\Big(T_{n,\dots,n;1}(f;\cdot); \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}$$

$$\le 2^k\big\|\psi(\cdot) - T_{n,\dots,n;1}(f;\cdot)\big\|_{\infty,m} + m^k d^k n^{-k}\max_{|\alpha|=k}\bigg\|\frac{\partial^{|\alpha|}T_{n,\dots,n;1}(f;x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}\bigg\|_{\infty,m}. \tag{2.7}$$

Применяя теперь оценки (2.6) и (2.1) в (2.7), а также учитывая неравенство (2.3), получаем

$$\omega_k\Big(\psi; \frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} \le 2^k C_6(m)\Big\{(n+1)^m E_{n,\dots,n}(f)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1} E_{\nu,\dots,\nu}(f)_{1,m}\Big\}$$

$$+ C_2(k,m) m^k d^k n^m \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{n+1}\Big)_{1,m}$$

$$\le 2^k C_6(m) C_3(k+m,m)\Big\{2^m n^m \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{n+1}\Big)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{\nu+1}\Big)_{1,m}\Big\}$$

$$+ C_2(k,m) m^k d^k n^m \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{n+1}\Big)_{1,m} \le C_1(k,k+m,m)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m},$$

поскольку

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m} \ge \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{m-1}\omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{\nu}\Big)_{1,m} \ge \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{2n}\Big)_{1,m}\sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{m-1}$$

$$\ge \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{2n}\Big)_{1,m} m^{-1}\big\{(2n)^m - n^m\big\} \ge 2^{-(k+m)} m^{-1}(2^m-1) n^m \omega_{k+m}\Big(f; \frac{d}{n}\Big)_{1,m}.$$

Из полученной выше оценки $\omega_k(\psi; d/n)_{\infty,m}$ следует (0.2) в случае $l = k+m$ с постоянной $C_1(k,k+m,m) = 2^k C_6(m) C_3(k+m,m)\big\{(2^m-1)^{-1} m 2^{k+2m} + 1\big\} + m^k d^k C_2(k,m)(2^m-1)^{-1} m 2^{k+m}$. И, наконец, оценка (0.2) в случае $l < k+m$ непосредственно следует из оценки (0.2) для случая $l = k+m$ в силу неравенства $\omega_{k+m}(f;\delta)_{1,m} \le 2^{k+m-l}\omega_l(f;\delta)_{1,m}$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

При доказательстве оценки снизу в утверждении теоремы 2 нам понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть $m \geq 1,\ l, k \in \mathbb{N},\ l > m,\ \rho = l-(k+m)$ и $\omega \in \Omega_l(0,d]$; существуют индивидуальная функция $F(x;m;\omega) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и последовательность функций $\{\Psi_n(x;m;\omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\mathbb{T}^m)$ такие, что*:

1) $\omega_l(F;\delta)_{1,m} \leq C_7(l,m)\omega(\delta),\ \omega_l(\Psi_n;\delta)_{1,m} \leq C_8(l,m)\omega(\delta),\ n \in \mathbb{N},\ \delta \in (0,d]$;

2) $F \in C(\mathbb{T}^m) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n) < \infty$, *при этом* $\|F\|_{\infty,m} \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n)$;

3) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n) < \infty$, *то в случае* $l \geq k+m$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \leq C_9(k,l,m)\omega_k\Big(F;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

в случае $l < k+m$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \leq C_{10}(k,l,m)\Big\{\omega_k\Big(F;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} + \omega_k\Big(\Psi_n;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $F(x;m;\omega) \equiv G(x;m;\varepsilon)$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, соответствующая согласно лемме 3 из работы автора 2015 г. заданной функции $\omega \in \Omega_l(0,d]$, а функция G определена в лемме 5 из работы [3], случай $p=1:\ G(x;m;\varepsilon) = G_1(x;m;\varepsilon) + G_2(x;m;\varepsilon)$,

$$G_1(x;m;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\varepsilon_n F_n(x_1)\prod_{i=2}^{m} F_n(x_i), \quad G_2(x;m;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\varepsilon_n \Phi_n(x_1)\prod_{i=2}^{m} F_n(x_i),$$

$$F_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\Big(1-\frac{\nu}{n+1}\Big)\cos\nu y \text{ — ядро Фейера порядка } (n+1) \in \mathbb{N}\ \Big(F_0(y) = \frac{1}{2}\Big),$$

$$\Phi_n(y) = \sin((q+1)y)F_q(y) = \frac{1}{2(q+1)}\Big\{\sum_{\nu=1}^{q+1}\nu\sin\nu y + \sum_{\nu=q+2}^{2q+1}(2(q+1)-\nu)\sin\nu y\Big\},$$

$q \in \mathbb{Z}_+,\ y \in \mathbb{R},\ q \equiv [(n+1)/2]-1,\ n \in \mathbb{N},\ [t]$ — целая часть числа t.

Поскольку $G \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и $E_{n-1,\dots,n-1}(G)_{1,m} \leq 2\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}$ (см. доказательство п. 1) леммы 5 из [3] в случае $p=1$), то аналогично доказательству п. 1) леммы 4 из работы автора 2015 г. имеем $\omega_l(F;d/n)_{1,m} \leq C_{11}(l,m)\omega(d/n),\ n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_l(F;\delta)_{1,m} \leq 2^l C_{11}(l,m)\omega(\delta),\ \delta \in (0,d]$. Далее, утверждение п. 2) является следствием п. 2) леммы 5 из [3] в случае $p=1$ и п. 3) леммы 3 из работы автора 2015 г.:

$$F \in C(\mathbb{T}^m) \Leftrightarrow G \in C(\mathbb{T}^m) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) < \infty,$$

при этом

$$\|F(\cdot;m;\omega)\|_{\infty,m} \equiv \|G(\cdot;m;\varepsilon)\|_{\infty,m} \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{n}\Big).$$

Докажем утверждения п. 3). Рассмотрим случай $l \geq k+m$. Вначале отметим, что если $l > k+m$, то в силу п. 1) и п. 2) леммы 3 из работы автора 2015 г. имеем

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu \leq n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \leq C_{12}(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu.$$

Учитывая последнее соотношение, в силу п. 4) и п. 2) леммы 3 из работы автора 2015 г., а также п. 3) леммы 5 из [3] (случай $p = 1$), получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)$$

$$\asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\varepsilon_\nu + n^{m-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\varepsilon_\nu + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu$$

$$\le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\varepsilon_\nu + n^{m-l}n^{l-(k+m)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu + \chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\varepsilon_\nu + (1+\chi(\rho))n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu \le C_{13}(k,m)\omega_k\Big(G;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m} \equiv C_{13}(k,m)\omega_k\Big(F;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}.$$

Теперь рассмотрим случай $l < k+m$. Определим последовательность $\{\Psi_n(x;m;\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, полагая $\Psi_n(x;m;\omega) = \omega(d/n)Q_n(x_1)\prod_{i=2}^{m}F_n(x_i)$, где $Q_n(x_1) = F_n(x_1)$ при четном k (см. лемму 5 в работе автора 2015 г.) и $Q_n(x_1) = \Phi_n(x_1)$ при нечетном k. Поскольку $\|F_n(\cdot)\|_{1,1} = 1$, то $\|\Phi_n(\cdot)\|_{1,1} \le 1$ и, следовательно,

$$\|\Psi_n(x;m;\omega)\|_{1,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\|Q_n(x_1)\|_{1,1}\prod_{i=2}^{m}\|F_n(x_i)\|_{1,1} \le \omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \le \omega(d), \quad n\in\mathbb{N},$$

откуда $\{\Psi_n(x;m;\omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\mathbb{T}^m)$. Далее, при любом $\delta \in (0,d]$ и фиксированном $n\in\mathbb{N}$ возможны два случая: $\delta < d/n$ и $\delta \ge d/n$. При $\delta \ge d/n$ с учетом $\omega(\delta)\uparrow$ $(\delta\uparrow)$ имеем $\omega_l(\Psi_n;\delta)_{1,m} \le 2^l\|\Psi_n(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} \le 2^l\omega(d/n) \le 2^l\omega(\delta)$. При $\delta < d/n$ в силу m-мерного аналога неравенства С. Н. Бернштейна — М. Рисса — А. Зигмунда (см., например, [1, гл. IV, п. 4.8.62, неравенство (30)]) и условия $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow$ $(\delta\uparrow)$ получаем

$$\omega_l(\Psi_n;\delta)_{1,m} \le m^l\delta^l\max\Big\{\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}\Psi_n(x;m;\omega)}{\partial x^\alpha}\Big\|_{1,m} : \ |\alpha| = l\Big\}$$

$$= m^l\delta^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\max\Big\{\Big\|\frac{\partial^{|\alpha|}Q_n(x_1)\prod_{i=2}^{m}F_n(x_i)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}\Big\|_{1,m} : \ |\alpha| = l\Big\}$$

$$\le m^l\delta^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)n^l\Big\|Q_n(x_1)\prod_{i=2}^{m}F_n(x_i)\Big\|_{1,m} \le m^l\delta^l n^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) = m^l d^l\delta^l\Big(\frac{n}{d}\Big)^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \le (md)^l\omega(\delta).$$

Таким образом, при любом $\delta\in(0,d]$ справедлива оценка $\omega_l(\Psi_n;\delta)_{1,m} \le (2^l + (md)^l)\omega(\delta)$, $n\in\mathbb{N}$, то есть имеет место правая оценка в п. 1).

Оценим снизу $\omega_k(\Psi_n;d/n)_{\infty,m}$. Применяя неравенство Ф. Рисса — С. М. Никольского — С. Б. Стечкина (см., например, [1, гл. IV, п. 4.8.6, неравенство в левой части (18)]) и учитывая оценки (см. замечание 6 в работе автора 2017 г.)

$$|Q_n^{(k)}(0)| = |F_n^{(k)}(0)| \ge (2(k+1)(k+2))^{-1}n^{k+1} \quad \text{при четном} \quad k$$

и

$$|Q_n^{(k)}(0)| = |\Phi_n^{(k)}(0)| \ge (2^{k+2}(k+2))^{-1}n^{k+1} \quad \text{при нечетном} \quad k,$$

имеем

$$\Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^k} Q_n(x_1)\Big\|_{\infty,1} \ge 2^k n^{-k}\|Q_n^{(k)}(x_1)\|_{\infty,1} \ge 2^k n^{-k}|Q_n^{(k)}(0)| \ge 2^k n^{-k}C_{14}(k)n^{k+1} = 2^k C_{14}(k)n,$$

откуда

$$\omega_k\Big(\Psi_n;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\ge\omega_k\Big(\Psi_n;\frac{\pi}{n},\dots,\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty,m}\ge\omega_k^{(1)}\Big(\Psi_n;\frac{\pi}{n}\Big)_{\infty,m}$$

$$\ge\Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^k}\Psi_n((x_1,\dots,x_m);m;\omega)\Big\|_{\infty,m}=\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^k}Q_n(x_1)\prod_{i=2}^m F_n(x_i)\Big\|_{\infty,m}$$

$$=\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^k}Q_n(x_1)\Big\|_{\infty,1}\prod_{i=2}^m\|F_n(x_i)\|_{\infty,1}$$

$$=\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\|\underset{1\ \pi/n}{\Delta^k}Q_n(x_1)\Big\|_{\infty,1}2^{-(m-1)}(n+1)^{m-1}\ge\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)2^{-(m-1)}(n+1)^{m-1}2^kC_{14}(k)n$$

$$=2^{k-(m-1)}C_{14}(k)(n+1)^{m-1}n\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)>2^{k-(m-1)}C_{14}(k)n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big),$$

где $C_{14}(k)=(2(k+1)(k+2))^{-1}$ при четном k и $C_{14}(k)=(2^{k+2}(k+2))^{-1}$ при нечетном k.

Учитывая доказанную оценку, в силу п. 4) леммы 3 из работы автора 2015 г. и п. 3) леммы 5 из [3] (случай $p=1$) получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu+n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\le C_{10}(k,l,m)\Big\{\omega_k\Big(F;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}+\omega_k\Big(\Psi_n;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\Big\}.$$

Лемма 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Оценка сверху в (0.8) следует из неравенства (0.2): если выполняется (0.7), то в силу теоремы 1 каждая функция $f\in H^l_{1,m}[\omega]$ эквивалентна некоторой функции $\psi\in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка

$$\omega_k\Big(\psi;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\le C_1(k,l,m)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\Big\}$$

$$\le C_1(k,l,m)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)\Big\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Оценка снизу в (0.8) в случае $l\ge k+m$ реализуется посредством функции $(C_7(l,m))^{-1}\times F(\cdot;m;\omega)\in H^l_{1,m}[\omega]$ в силу первой части утверждения п. 3) леммы 4:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)+\chi(\rho)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)\le C_9(k,l,m)C_7(l,m)\omega_k\Big(C_7^{-1}(l,m)F;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m},$$

а в случае $l<k+m$ — посредством функции $(C_7(l,m))^{-1}F(\cdot;m;\omega)\in H^l_{1,m}[\omega]$ и последовательности функций $\big\{(C_8(l,m))^{-1}\Psi_n(\cdot;m;\omega)\big\}_{n=1}^{\infty}\subset H^l_{1,m}[\omega]$ в силу второй части утверждения п. 3) леммы 4:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big)\le C_{10}(k,l,m)\Big\{C_7(l,m)\omega_k\Big(C_7^{-1}(l,m)F;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}$$

$$+C_8(l,m)\omega_k\Big(C_8^{-1}(l,m)\Psi_n;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}\Big\}$$

$$\le C_{10}(k,l,m)(C_7(l,m)+C_8(l,m))\sup\Big\{\omega_k\Big(\psi;\frac{d}{n}\Big)_{\infty,m}:\ f\in H^l_{1,m}[\omega]\Big\}.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
2. **Тиман М.Ф.** О разностных свойствах функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 3. С. 667–676.
3. **Ильясов Н.А.** О порядке убывания равномерных модулей гладкости на классах функций $E_{p,m}[\varepsilon]$ // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 4. С. 519–536.
4. **Темиргалиев Н.Т.** О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 2. С. 139–148.
5. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44 (86), № 1. С. 53–84.
6. **Il'yasov N.A.** On the order of magnitude of the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series with respect to cubes on the function classes $H^l_{p,m}[\omega]$ // Anal. Math. 2002. Vol. 28, no. 1. P. 25–42.

Поступила 18.03.2019
После доработки 15.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент;
доцент кафедры математического анализа
Бакинский государственный университет, г. Баку
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

REFERENCES

1. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* N Y: Macmillan, Pergamon Press, 1963, 631 p. Original Russian text published in Timan A. F. *Teoriya priblizheniya funktsii deistvitel'nogo peremennogo.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
2. Timan M.F. Difference properties of functions of several variables. *Math. USSR-Izv.*, 1969, vol. 33, no. 3, pp. 633–642. doi: 10.1070/IM1969v003n03ABEH000794 .
3. Il'yasov N.A. On the order of decrease of uniform moduli of smoothness for the classes of functions $E_{p,m}[\varepsilon]$. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no.3-4, pp. 481–497. doi: 10.1007/s11006-005-0148-2 .
4. Temirgaliev N.T. A connection between inclusion theorems and the uniform convergence of multiple Fourier series. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, no. 2, pp. 518–523. doi: 10.1007/BF01095009 .
5. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44 (86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
6. Il'yasov N.A. On the order of magnitude of the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series with respect to cubes on the function classes $H^l_{p,m}[\omega]$. *Anal. Math.*, 2002, vol. 28, no. 1, pp. 25–42. doi: 10.1023/A:1014807531500 .

Received March 18, 2019
Revised May 15, 2019
Accepted May 20, 2019

Niyazi Aladdin ogly Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan, e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .

Cite this article as: N. A. Il'yasov. Multivariate version of Turan's type inequality and its applications to the estimation of uniform moduli of smoothness of periodic functions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 102–115 .