ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 517.977

ДВУХУРОВНЕВАЯ КООПЕРАЦИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР[1]

Л. А. Петросян, Д. В. К. Янг

В данной статье определяется двухуровневая игра, в которой на первом уровне рассматривается коалиционное разбиение множества игроков N, где каждая коалиция $S_i \subset N$, $i = 1, \dots, m$ $(S_i \cap S_j = \varnothing)$, $i \neq j$ играет против других коалиций в неантагонистическую дифференциальную кооперативную игру с предписанной продолжительностью и нетрансферабельными выигрышами. В то же время игроки на втором уровне, внутри коалиции, играют в кооперативную дифференциальную игру с предписанной продолжительностью и с трансферабельными выигрышами. Предложена концепция решения для такого типа двухуровневых игр и исследованы его свойства, а именно временная состоятельность или динамическая устойчивость.

Ключевые слова: коалиционное разбиение, кооперативные дифференциальные игры с трансферабельными выигрышами, Парето-оптимальность, процедура распределения выигрыша, временная состоятельность.

L. A. Petrosyan, D. W. K. Yeung. Two-level cooperation in a class of non-zero-sum differential games.

A two-level game is considered. At the first level, the set of players N is partitioned into coalitions $S_i \subset N$, $i = 1, \dots, m$, such that $S_i \cap S_j = \varnothing$ for $i \neq j$ and each coalition plays against other coalitions a non-zero-sum cooperative differential game with prescribed duration and nontransferable payoffs. At the second level, within each coalition, the players are engaged in a cooperative differential game with prescribed duration and transferrable payoffs. The concept of solution is proposed for this type of two-level games. The properties of a solution, namely, its time consistency or dynamic stability, are studied.

Keywords: coalition partition, cooperative differential game with transferable payoffs, Pareto optimality, payoff distribution procedure, time consistency.

MSC: 91A12, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-166-173

1. Введение

Во многих случаях страны вступают в коалиции, подкрепленные договорными обязательствами с целью продвижения своих интересов на международной арене. Страны создают торговые коалиции, потому что считают, что свободная торговля приносит им пользу, и часто такие коалиции имеют тенденцию быть региональными, потому что удобнее достичь соглашения с ближайшими соседями, чем с удаленными партнерами. Более века формировались торговые коалиции, валютные блоки, политические и экономические союзы. Исследования различного рода блоков не редкость. В работах [1–6] изучались блоки и соглашения о мировой торговле. В данной работе, которая является расширенным вариантом статьи [7], представлена дифференциальная игра с разбиением множества игроков на коалиции. Общие интересы игроков внутри коалиции отражаются в их общих предпочтениях, которые не разделяют игроки вне коалиции. Кроме того, могут существовать ресурсы, принадлежащие исключительно участникам коалиции, и на некоторую динамику коалиций может влиять только контроль игроков внутри коалиции. В статье [8] впервые представлена базовая структура кооперативной дифференциальной игры с коалициями в качестве игроков. В данной работе представлен Парето-оптимальный подход, который отражает кооперативный результат конкурирующих коалиций.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01079).

Этот подход отличается от подхода, представленного в [8], где все коалиции полностью сотрудничают как в кооперативной дифференциальной игре с трансферабельными выигрышами. Внутрикоалиционное распределение выигрыша также изучается в настоящей работе. Чтобы гарантировать временную состоятельность (динамическую устойчивость) в динамичной схеме коалиционного сотрудничества, выплаты игрокам на уровне коалиций должны удовлетворять индивидуальной рациональности, а дележи внутри коалиций должны удовлетворять свойству динамической устойчивости. Для удовлетворения индивидуальной рациональности мы используем подход, впервые представленный в [9].

2. Модель

Рассмотрим неантагонистическую дифференциальную игру $\Gamma(x_0, T-t_0)$ с множеством игроков $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ и предписанной продолжительностью $T - t_0$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = f_i(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x_i \in \mathbb{R}^m, \quad u_i \in U_i \subset \operatorname{Comp} \mathbb{R}^q, \\ &x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \ldots n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Функции выигрыша определяются как

$$H_i(x_0, T-t_0; u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(t), u_1, \ldots, u_n)dt, \quad h_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x(t)$ — решение задачи Коши (2.1) при использовании игроками управлений $u_1, \ldots, u_n$.

Определим коалиционное разбиение $S = (S_1, \ldots, S_j, \ldots, S_m)$, $S_j \subset N$, $S_j \cap S_i = \varnothing$, $i \neq j$ на множестве всех игроков N. Уравнения движения для коалиции S_j определяются как совокупность уравнений движения игроков $i \in S_j$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = f_i(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x_i \in \mathbb{R}^m, \quad u_i \in U_i \subset \operatorname{Comp} \mathbb{R}^q, \\ &x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i \in S_j. \end{aligned}$$

Выигрыш коалиции S_j полагается равным сумме выигрышей игроков из коалиции S_j:

$$H_{S_j}(x_0, T-t_0; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i \in S_j} \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(t, u_1, \ldots, u_n))dt, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

где $x(t)$ — решение задачи Коши (2.1), когда игроки используют управления $u_1, \ldots, u_n$.

Предположим, что игроки выбирают свои управления совместно (кооперируются в выборе управлений) и в качестве решения (принципа оптимальности) выбрано индивидуально-рациональное Парето-оптимальное решение.

Индивидуальная рациональность понимается в том смысле, что Парето-оптимальные выигрыши должны быть не меньше, чем нижнее значение антагонистической игры ($\sup\inf$) между коалицией S_j, выступающей как первый игрок, и коалицией остальных игроков (коалицией коалиций S_k, $k \neq j$) с выигрышем коалиции S_j (первый игрок), равным (2.2). В некоторых случаях (см. [8; 10]) индивидуальная рациональность понимается в том смысле, что Парето-оптимальные выигрыши должны превосходить выигрыши в некотором равновесии по Нэшу. Такой подход имеет смысл, если равновесие по Нэшу единственно. В обоих случаях индивидуально-рациональные выигрыши мы будем обозначать через $V(x_0, T-t_0; S_j)$ $j = 1, \ldots, m$.

Обозначим через $\bar{u}(t) = (\bar{u}_{S_1}(t), \ldots, \bar{u}_{S_j}(t), \ldots, \bar{u}_{S_m}(t))$ некоторое оптимальное по Парето решение, которое можно записать также в виде

$$\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \ldots, \bar{u}_i(t), \ldots, \bar{u}_n(t)),$$

если использовать запись $\bar{u}_{S_j}(t) = \{\bar{u}_i(t),\ i \in S_j\}$.

Обозначим через $\bar{x}(t) = (\bar{x}_{S_1}(t), \dots, \bar{x}_{S_j}(t), \dots, \bar{x}_{S_m}(t))$ соответствующую Парето-оптимальную траекторию, которую можно также записать в виде

$$\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_i(t), \dots, \bar{x}_n(t)),$$

полагаем $\bar{x}_{S_j}(t) = \{\bar{x}_i(t),\ i \in S_j\}$. Обозначим через $W(x_0, T-t_0; S_j) = H_{S_j}(x_0, T-t_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$, $j = 1, \dots, m$, Парето-оптимальные выигрыши коалиции S_j, $j = 1, \dots, m$ в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Рассмотрим семейство подыгр $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$ вдоль Парето-оптимальной траектории $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$. Предположим, что выполнено условие индивидуальной рациональности, т. е.

$$W(x_0, T - t_0; S_j) \geq V(x_0, T - t_0; S_j), \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.3}$$

Важно, чтобы это неравенство выполнялось и вдоль Парето-оптимальной траектории $\bar{x}(t)$:

$$W(\bar{x}(t), T - t; S_j) \geq V(\bar{x}(t), T - t; S_j), \quad t \in [t_0, T], \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.4}$$

Если в какой-то момент $\bar{t}$ условие (2.3) не будет выполняться для некоторого $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, то коалиция S_{i_0} получает все основания для отклонения от Парето-оптимальной траектории, так как, действуя индивидуально, она сможет обеспечить себе в подыгре $\Gamma(\bar{x}(\bar{t}), T-\bar{t})$ больший выигрыш.

К сожалению, из (2.3) не следует выполнение неравенства (2.4) для всех $t \in [t_0, T]$. Для обеспечения выполнения (2.4) мы введем некоторое дополнительное управление, состоящее в перераспределении дележа вдоль Парето-оптимальной траектории $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $\gamma_j(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, $j = 1, \dots, m$, такая, что

$$\int_{t_0}^{T} \gamma_j(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{T} \sum_{i \in S_j} h_i(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau, \quad j = 1, \dots, m,$$

и

$$\int_{t}^{T} \gamma_j(\tau) d\tau \geq V(\bar{x}(t), T - t; S_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

называется состоятельной во времени (динамически устойчивой) процедурой распределения выигрыша (ПРВ).

Подстановка вместо $\sum_{i \in S_j} h_i(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))$ функции $\gamma_j(\tau)$ обеспечивает выполнение условия индивидуальной рациональности при движении вдоль Парето-оптимальной (в данном случае "кооперативной") траектории $\bar{x}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Теорема 1. ПРВ $\gamma_j(\tau)$, *вычисляемая по формуле*

$$\gamma_j(t) = \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{T} \sum_{i \in S_j} h_i(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau - V(\bar{x}(t_0), T - t_0; S_j)}{T - t_0} - \frac{d}{dt} V(\bar{x}(t), T - t; S_j), \tag{2.5}$$

где $t \in [t_0, T]$, $j = 1, \dots, m$, *является состоятельной во времени* (*динамически устойчивой*) ПРВ *и, следовательно, гарантирует выполнение условия индивидуальной рациональности вдоль оптимальной траектории при* $\tau \in [t_0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{i \in S_j} h_i(\bar{x}(\tau)) d\tau - V(x_0, T - t_0; S_j) = F_{S_j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

Тогда

$$\int_t^T \gamma_j(\tau)d\tau = \frac{T-t}{T-t_0}F_{S_j} - [V(\bar{x}(T),0;S_j) - V(\bar{x}(t),T-t;S_j)]$$

$$= \frac{T-t}{T-t_0}F_{S_j} + V(\bar{x}(t),T-t;S_j) \geq V(\bar{x}(t),T-t;S_j). \qquad \square$$

Когда игра $\Gamma(x_0, T-t_0)$ развивается вдоль Парето-оптимальной траектории и коалиция S_j, $j=1,2$, получает свой мгновенный выигрыш в соответствии с ПРВ $\gamma_j(\tau)$, $\tau \in [t_0,T]$, то между игроками коалиции S_j происходит кооперативная игра $\Gamma(\bar{x}, T-t; S_j)$ с трансферабельными выигрышами. В каждый момент времени $t \in [t_0, T-t_0)$ коалиция S_j должна распределить свой суммарный выигрыш $\int_t^T \gamma_j(\tau)d\tau$ в подыгре $\Gamma(\bar{x}(t), T-t; S_j)$.

В качестве принципа оптимальности мы в этом случае можем выбрать вектор Шепли или принцип равного распределения эксцесса. С этой целью нам необходимо определить характеристическую функцию в игре с трансферабельными выигрышами между игроками, входящими в коалицию S_j, $j=1,\ldots,m$.

Сперва определим значение характеристической функции для самой коалиции S_j, $j = 1,\ldots,m$. В игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ положим его равным $W(x_0, T-t_0; S_j)$, $j=1,\ldots,m$, а в подыграх $\Gamma(\bar{x}(t))$ вдоль Парето-оптимальной траектории — величине $W(\bar{x}(t), T-t; S_j)$, $t \in [t_0,T]$, $j = 1,\ldots,m$.

При определении характеристической функции для каждого подмножества $L \subset S_j$, $L \neq S_j$ мы предполагаем, что игроки, входящие в дополняющую коалицию $N \backslash S_j$, используют Парето-оптимальные стратегии $\bar{u}_{N\backslash S_j}$, определенные для коалиций на первом уровне кооперации. То же предположение мы делаем и для игроков из коалиции $L \subset S_j$, $j = 1,\ldots,m$. При этом предположении мы определим значение характеристической функции для любой коалиции $L \subset S_j$, $L \neq S_j$ как минимальный выигрыш, который коалиция L может получить, если игроки из $S_j \backslash L$ будут пытаться минимизировать выигрыш коалиции L.

Отсюда получаем формулы для значений характеристической функции $\omega(L,j)$, $L \subset S_j$, $j=1,2,\ldots,m$,

$$\omega(L,j) = \omega(\bar{x}(t), T-t; L, S_j) = \min_{u_{S_j\backslash L}} H_j\Big(\bar{x}(t), T-t; \bar{u}_L, \bar{u}_{N\backslash S_j}, u_{S_j\backslash L}\Big),$$

где $u_{S_j\backslash L} = \{u_i,\ i \in S_j\backslash L\}$, $L \subset S_j$ в подыгре $\Gamma(\bar{x}(t), T-t; S_j)$,

$$\omega(S_j, j) = \omega(\bar{x}(t), T-t; S_j, S_j) = W(\bar{x}(t), T-t; S_j).$$

О п р е д е л е н и е 2. Функция $\omega(\bar{x}(t), T-t; L, S_j)$, $j=1,\ldots,m$, супераддитивна по L, если имеет место неравенство

$$\omega(\bar{x}(t), T-t; L_1 \cup L_2; S_j) \geq \omega(\bar{x}(t), T-t; L_1; S_j) + \omega(\bar{x}(t), T-t; L_2; S_j)$$

для любых непересекающихся множеств L_1, L_2, $L_1 \subset N$, $L_2 \subset N$.

Теорема 2. *Функция $\omega(\bar{x}(t), T-t; L, S_j)$, $j=1,\ldots,m$, супераддитивна по L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $u_A = \{u_i,\ i \in A \subset N\}$, тогда имеют место следующие неравенства:

$$\omega(\bar{x}(t), T-t; L_1 \cup L_2; S_j) = \min_{u_{S_j\backslash(L_1\cup L_2)}} \sum_{i \in L_1\cup L_2} H_i(\bar{x}(t), T-t; \bar{u}_{L_1\cup L_2}, \bar{u}_{N\backslash S_j}, u_{S_j\backslash(L_1\cup L_2)})$$

$$\geq \min_{u_{S_j\backslash(L_1\cup L_2)}} \sum_{i \in L_1} H_i(\bar{x}(t), T-t; \bar{u}_{L_1\cup L_2}, \bar{u}_{N\backslash S_j}, u_{S_j\backslash(L_1\cup L_2)})$$

$$+ \min_{u_{S_j \setminus (L_1 \cup L_2)}} \sum_{i \in L_2} H_i(\bar{x}(t), T-t; \bar{u}_{L_1 \cup L_2}, \bar{u}_{N \setminus S_j}, u_{S_j \setminus (L_1 \cup L_2)})$$

$$\geq \min_{u_{S_j \setminus L_1}} \sum_{i \in L_1} H_i(\bar{x}(t), T-t; \bar{u}_{L_1}, \bar{u}_{N \setminus S_j}, u_{S_j \setminus L_1}) + \min_{u_{S_j \setminus L_2}} \sum_{i \in L_2} H_i(\bar{x}(t), T-t; \bar{u}_{L_2}, \bar{u}_{N \setminus S_j}, u_{S_j \setminus L_2})$$

$$= \omega(\bar{x}(t), T-t, L_1; S_j) + \omega(\bar{x}(t), T-t, L_2; S_j). \qquad \square$$

Определим вектор Шепли в кооперативных подыграх с трансферабельными выигрышами $\Gamma(\bar{x}, T-t; S_j)$, $t \in [t_0, T]$, вдоль Парето-оптимальной траектории $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$,

$$Sh_i(\bar{x}(t), T-t; S_j) = \sum_{L \subset S_j : i \in L} \frac{(|L|-1)!(|S_j|-|L|)!}{|S_j|!}$$

$$\times \left[\omega(\bar{x}(t), T-t; L, S_j) - \omega(\bar{x}(t), T-t; L - \{i\}, S_j)\right], \quad i \in S_j. \tag{2.6}$$

Здесь следует отметить, что в данном случае локальная кооперативная дифференциальная игра $\Gamma(x_0, T-t_0; S_j)$ с трансферабельными выигрышами развивается не вдоль траектории, максимизирующей суммарный выигрыш игроков, а вдоль Парето-оптимальной траектории, дающей в результате суммарный выигрыш игроков из S_j, равный $W(x_0, T-t_0; S_j)$, что вовсе не обязательно совпадает с максимальным суммарным выигрышем игроков из S_j, $j = 1, \ldots, m$.

Для обеспечения динамической устойчивости (состоятельности во времени) вектора Шепли определим ПРД [10–12] (процедуру распределения дележа) применительно к вектору Шепли по формуле

$$\beta_i(t) = -\frac{d}{dt} Sh(\bar{x}(t), T-t; S_j), \quad i \in S_j.$$

Дележ в кооперативной игре $\Gamma(x_0, T-t_0; S_j)$ может быть осуществлен и на основе принципа "равных эксцессов", что дает следующее выражение для компонент дележа в подыграх $\Gamma(\bar{x}, T-t; S_j)$:

$$\alpha_i(t) = \omega(\bar{x}(t), \{i\}; S_j) + \frac{1}{|S_j|}\Big[W(\bar{x}(t), T-t; S_j) - \sum_{i \in S_j} \omega(\bar{x}(t), T-t; \{i\})\Big], \quad i \in S_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Для обеспечения динамической устойчивости (состоятельности во времени) необходимо ввести ПРД так же, как это делалось в случае вектора Шепли, т. е.

$$\beta_i(t) = -\frac{d}{dt} \alpha_i, \quad i \in S_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.7}$$

Таким образом, нами построено динамически устойчивое (состоятельное во времени) решение в двухуровневой кооперативной дифференциальной игре, в которой на первом уровне кооперации игроки используют в качестве принципа оптимальности Парето-оптимальное решение и кооперируются на уровне совместного выбора стратегий (при этом индивидуальная рациональность достигается введением ПРВ [9;13] по формуле (2.5)), а на втором уровне — полную кооперацию, сводящуюся к совместным действиям, обеспечивающим получение Парето-оптимального выигрыша и последующего его распределения между членами коалиции S_j, $j = 1, \ldots, m$. При этом динамическая устойчивость (состоятельность во времени) достигается использованием ПРД для вектора Шепли и принципа равного распределения эксцессов (см.(2.6), (2.7)).

П р и м е р. В этом примере мы покажем каким образом строится ПРВ при сохранения свойства индивидуальной рациональности при движении вдоль Парето-оптимальной траектории на верхнем уровне в случае, когда разбиение на коалиции состоит только из двух множеств S_1, S_2.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a - bx - u_1 - u_2, \quad x(t_0) = x_0, \\ &x \in \mathbb{R}^1, \quad u_j \in U_j \subset \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где a, b — положительные постоянные.

Выигрыш коалиции S_j, $j = 1, 2$, определяется про формулам

$$H_{S_j}(x_0, T - t_0; u_1, u_2) = \int\limits_{t_0}^{T} \big(h_j u_j(t) - c_j u_j^2(t) x^{-1}(t) + k_j x(t)\big) dt.$$

Следующие результаты хорошо известны, но мы приводим их здесь для лучшего понимания последующих выкладок [9]. В принципе, под индивидуальной рациональностью мы будем понимать выигрыши коалиций S_1, S_2 в равновесии по Нэшу. Индивидуально-рациональные выигрыши в игре $\Gamma(x, T - t; S_j)$, $j \in \{1, 2\}$, $V(x, T - t; S_j)$ являются решениями Беллмана—Якоби—Айзекса

$$\frac{d}{dt} V(x, T-t; S_j) = \max_{u_j} \Big\{ [h_j u_j - c_j u_j^2 x^{-1} + k_j x_j] + \frac{\partial}{\partial x} V(x, T-t; S_j) \times [a - bx - u_j - u_{2-j}] \Big\}, \ j = 1, 2. \tag{2.9}$$

Максимизация в (2.9) дает нам

$$u_j^*(t, x) = \frac{\Big[h_i - \dfrac{\partial}{\partial x} V(x, T - t; S_j)\Big] x}{2c_j}, \quad j = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Вычислим теперь Парето-оптимальные выигрыши и Парето-оптимальную траекторию. Парето-оптимальное решение может быть получено решением следующей задачи максимизации:

$$W^{\alpha}(x_0, T - t_0) = \max_{u_1, u_2} \{\alpha_1 H_{S_1}(x_0, T - t_0; u_1, u_2) + \alpha_2 H_{S_2}(x_0, T - t_0; u_1, u_2)\}$$

$$= \max_{u_1, u_2} \Big\{ \int\limits_{t_0}^{T} \big[\alpha_1 (h_1 u_1(t) - c_1 u_1^2(t) x^{-1}(t) + k_1 x(t)) + \alpha_2 (h_2 u_2(t) - c_2 u_2^2(t) x^{-1}(t) + k_2 x(t))\big] dt \Big\},$$

при условии (2.8) и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_i \geq 0$. Используя технику динамического программирования, мы можем найти выражение для $W^{\alpha}(x, T - t)$. Пусть $W^{\alpha_j}(x, T - t)$ $(j = 1, 2)$ — Парето-оптимальные выигрыши каждой из коалиций S_1, S_2. Для выполнения условия индивидуальной рациональности в начальный момент времени должно иметь место

$$W^{\alpha_j}(x_0, T - t_0) \geq V(x_0, T - t_0; S_j), \quad j = 1, 2. \tag{2.10}$$

В то же время, как показано в [9], в этом семействе игр может не найтись таких коэффициентов α, чтобы условие индивидуальной рациональности (2.10) выполнялось на всем отрезке времени $[t_0, T]$. Тем не менее можно показать, что существует такое α, что условие (2.10) выполнено в момент времени t_0. Для решения проблемы мы используем ПРВ (2.5), которая в нашем случае имеет вид

$$\gamma_j = \frac{W^{\alpha_j}(x_0, T - t_0) - V(x_0, T - t_0; S_j)}{T - t_0} - \frac{d}{dt} V(\bar{x}(t), T - t; S_j).$$

Этот пример иллюстрирует построение ПРВ в игре коалиций. Пример ПРД для обеспечения динамически устойчивых дележей можно найти в монографии [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Eichengreen B., Irwin D.** Trade blocs, currency blocs, and the reorientation of trade in the 1930s // J. Internat. Economics. 1995. Vol. 38. P. 1–24. doi: 10.1016/0022-1996(95)92754-P .
2. **McDonald F., Tuselmann J.H., Voronkova S., Golesorkhi S.** The strategic development of subsidiaries in regional trade blocs // The Multinational Business Review. 2011. Vol. 19, no. 3. P. 256–271. doi: 10.1108/15253831111172685 .
3. **Frankel J.A., Rose A.** The endogeneity of the optimum currency area criteria // Economic J. 1998. Vol. 108. P. 1009–1025. doi: 10.1111/1468-0297.00327 .
4. **Kandogan Y.** Consistent estimates of regional blocs'trade effects // Review Internat. Economics. 2008. Vol. 16, no. 2. P. 301–314. doi: 10.1111/j.1467-9396.2008.00736.x .
5. **Schott J.J.** Trading blocs and the world trading system // World Economy. 1991. Vol. 14, no. 1. P. 1–17. doi: 10.1111/j.1467-9701.1991.tb00748.x .
6. **Wolf N., Ritschl A.O.** Endogeneity of currency areas and trade vlocs: Evidence from a natural experiment // KYKLOS. 2011. Vol 64, no. 2. P. 219–312. doi: j.1467-6435.2011.00507.x .
7. **Petrosyan L.A. Yeung D.W.K.** The two level cooperation in a class of n-person differential games // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 585–587. (17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018 Yekaterinburg, Russia, 15–19 October 2018). doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.486 .
8. **Петросян Л. А., Е. В. Громова** Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Vol. 20, no. 3. P. 193–203.
9. **Yeung D.W.K., Petrosyan L. A.** Subgame consistent cooperation. A comprehensive treatise. N Y etc.: Springer, 2016. 520 p. (Ser. Theory and Decision Library C; vol. 47.)
10. **Petrosyan L. A., Yeung D.W.K.** A Time-consistent solution formula for bargaining problem in differential games // Internat. Game Theory Review. 2014. Vol. 16, no. 4. P. 1–24. doi: 10.1142/S0219198914500169 .
11. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вест. Ленинград. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1979. Вып. 1. С. 52–59.
12. **Petrosyan L., Zaccour G.** Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. Economic Dynamics Control. 2003. Vol. 27. no. 3. P. 381–398. doi: 10.1016/S0165-1889(01)00053-7 .
13. **Yeung D.W.K., Petrosyan L. A.** Cooperative stochastic differential games. N Y etc.: Springer, 2006, 242 p.

Поступила 12.12.2018
После доработки 27.12.2018
Принята к публикации 14.01.2019

Петросян Леон Аганесович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Д. В. К. Янг
профессор
Гонконгский университет Шу Янь, г. Гонконг, Китай,
e-mail: dwkyeung@edu

REFERENCES

1. Eichengreen B., Irwin D. Trade blocs, currency blocs, and the reorientation of trade in the 1930s. *J. Internat. Economics*, 1995, vol. 38, no. 1-2, pp. 1–24. doi: 10.1016/0022-1996(95)92754-P .
2. McDonald F., Tuselmann J.H., Voronkova S., Golesorkhi S. The strategic development of subsidiaries in regional trade blocs. *The Multinational Business Review*, 2011, vol. 19, no. 3, pp. 256–271. doi: 10.1108/15253831111172685 .
3. Frankel J.A., Rose A. The endogeneity of the optimum currency area criteria. *Economic J.*, 1998, vol. 108, no. 449, pp. 1009–1025. doi: 10.1111/1468-0297.00327 .

4. Kandogan Y. Consistent estimates of regional blocs' trade effects. *Review Internat. Economics*, 2008, vol. 16, no. 2, pp. 301–314. doi: 10.1111/j.1467-9396.2008.00736.x .
5. Schott J.J. Trading blocs and the world trading system. *World Economy*, 1991, vol. 14, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1111/j.1467-9701.1991.tb00748.x .
6. Wolf N., Ritschl A.O. Endogeneity of currency areas and trade blocs: Evidence from a natural experiment. *KYKLOS*, 2011, vol. 64, no. 2, pp. 219–312. doi: j.1467-6435.2011.00507.x .
7. Petrosyan L.A. Yeung D.W.K. The two level cooperation in a class of n-person differential games. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, iss. 32, pp. 585–587. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.486 .
8. Petrosyan L.A., Gromova E.V. Two-level cooperation in coalitional differential games. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 193–203.
9. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Subgame consistent cooperation. A Comprehensive treatise*. Ser. Theory and Decision Library C, vol. 47, N Y etc.: Springer, 2016, 520 p. ISBN: 978-981-10-1545-8 .
10. Petrosyan L.A., Yeung D.W.K. A time-consistent solution formula for bargaining problem in differential games. *Internat. Game Theory Review*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 1–24. doi: 10.1142/S0219198914500169 .
11. Petrosyan L.A., Danilov N.N. Stability of solutions in non-antagonistic differential games with transferable payoffs. *Vestnik Leningrad. Univ. Math.*, 1980, vol. 12, pp. 37–45.
12. Petrosyan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. *J. Economic Dynamics Control*, 2003, vol. 27, no. 3, pp. 381–398. doi: 10.1016/S0165-1889(01)00053-7 .
13. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Cooperative stochastic differential games.* N Y etc.: Springer, 2006, 242 p. ISBN: 0387276203 .

Received December 12, 2018
Revised December 27, 2018
Accepted January 14, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01079).

Leon Aganesovich Petrosyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: l.petrosyan@spbu.ru .

David W.K. Yeung, Prof. Dr. Dr.h.c., Hong Kong Shue Yan University, Hong Kong, China, e-mail: dwkyeung@edu .