ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.5

КОНСТАНТЫ НИКОЛЬСКОГО — БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА ОСИ[1]

Д. В. Горбачев

Мы изучаем весовой вариант неравенства Никольского — Бернштейна

$$\|\Lambda_\alpha^k f\|_{q,\alpha} \le \mathcal{L}(\alpha,p,q,k)\sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/q)+k}\|f\|_{p,\alpha}, \quad \alpha \ge -1/2,$$

на подпространстве $\mathcal{E}^\sigma \cap L^p(\mathbb{R},|x|^{2\alpha+1}\,dx)$ целых функций экспоненциального типа. Здесь Λ_α — дифференциально-разностный оператор Данкля, вторая степень которого порождает дифференциально-разностный оператор Бесселя B_α. При $(p,q)=(1,\infty)$ мы находим точные константы для неотрицательных функций

$$\mathcal{L}_0^*(\alpha)_+ = \frac{1}{2^{2\alpha+2}}, \quad \mathcal{L}_1^*(\alpha)_+ = \frac{1}{2^{2\alpha+4}(\alpha+2)},$$

где $\mathcal{L}_r^*(\alpha)_+ = (\alpha+1)c_\alpha^{-2}\mathcal{L}(\alpha,1,\infty,2r)_+$ — нормализованная константа Никольского — Бернштейна. Единственными (с точностью до констант) экстремальными функциями являются соответственно функции $j_{\alpha+1}^2(x/2)$ и $x^2 j_{\alpha+2}^2(x/2)$. Для доказательства этих результатов мы применяем квадратурную формулу Маркова с узлами в нулях функции Бесселя, а также следующее обобщение недавнего результата В. В. Арестова, А. Г. Бабенко, М. В. Дейкаловой и А. Хорват:

$$\mathcal{L}(\alpha,p,\infty,2r) = \sup B_\alpha^r f(0), \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

где верхняя грань берется по всем четным действительным функциям на $\mathbb{R}$, принадлежащим $\mathcal{E}_{p,\alpha}^1$. Наш подход основывается на одномерном гармоническом анализе Данкля. В частности, применяется четный положительный оператор обобщенного сдвига Данкля T_α^t, который ограничен в $L^p(\mathbb{R},|t|^{2\alpha+1}\,dt)$ с константой 1, инвариантен на подпространстве $\mathcal{E}_{p,\alpha}^\sigma$ и коммутативен с B_α.

Ключевые слова: весовое неравенство Никольского — Бернштейна, точная константа, целая функция экспоненциального типа, преобразование Данкля, оператор обобщенного сдвига, функция Бесселя.

D. V. Gorbachev. Nikolskii – Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis.

We investigate a weighted version of the Nikolskii–Bernstein inequality

$$\|\Lambda_\alpha^k f\|_{q,\alpha} \le \mathcal{L}(\alpha,p,q,k)\sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/q)+k}\|f\|_{p,\alpha}, \quad \alpha \ge -1/2,$$

on the subspace $\mathcal{E}^\sigma \cap L^p(\mathbb{R},|x|^{2\alpha+1}\,dx)$ of entire functions of exponential type. Here Λ_α is the Dunkl differential-difference operator whose second power generates the Bessel differential-difference operator B_α. For $(p,q)=(1,\infty)$, we compute the following sharp constants for nonnegative functions:

$$\mathcal{L}_0^*(\alpha)_+ = \frac{1}{2^{2\alpha+2}}, \quad \mathcal{L}_1^*(\alpha)_+ = \frac{1}{2^{2\alpha+4}(\alpha+2)},$$

where $\mathcal{L}_r^*(\alpha)_+ = (\alpha+1)c_\alpha^{-2}\mathcal{L}(\alpha,1,\infty,2r)_+$ denotes the normalized Nikolskii–Bernstein constant. There are unique (up to a constant factor) extremizers $j_{\alpha+1}^2(x/2)$ and $x^2 j_{\alpha+2}^2(x/2)$, respectively. These results are proved with the use of the Markov quadrature formula with nodes at zeros of the Bessel function and the following generalization of Arestov, Babenko, Deikalova, and Horváth's recent result:

$$\mathcal{L}(\alpha,p,\infty,2r) = \sup B_\alpha^r f(0), \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

where the supremum is taken over all even real functions on $\mathbb{R}$ belonging to $\mathcal{E}_{p,\alpha}^1$. Our approach is based on the one-dimensional Dunkl harmonic analysis. In particular, we use the even positive Dunkl-type generalized translation operator T_α^t, which is bounded on $L^p(\mathbb{R},|t|^{2\alpha+1}\,dt)$ with constant 1, is invariant on the subspace $\mathcal{E}_{p,\alpha}^\sigma$, and commutes with B_α.

Keywords: weighted Nikolskii–Bernstein inequality, sharp constant, entire function of exponential type, Dunkl transform, generalized translation operator, Bessel function.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-92-103

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

1. Введение

Пусть $\mathcal{E}^\sigma$ — множество целых функций экспоненциального типа не больше $\sigma > 0$. Изучаемые в статье функции $f \in \mathcal{E}^\sigma$ при сделанных далее дополнительных предположениях будут ограничены на действительной оси. Как известно (см., например, [1, Ch. 4]), в этом случае они характеризуются оценкой

$$|f(z)| \le \|f\|_{C(\mathbb{R})} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Мы изучаем варианты классических неравенств Бернштейна

$$\|f^{(k)}\|_p \le \sigma^k \|f\|_p, \quad 0 < p \le \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

и Никольского

$$\|f\|_q \le C(p,q)\sigma^{1/p-1/q}\|f\|_p, \quad 0 < p \le q \le \infty,$$

для подпространства функций $\mathcal{E}^\sigma \cap L^p(\mathbb{R})$ (см., например, [18; 20, Ch. 3]). Комбинация этих неравенств

$$\|f^{(k)}\|_q \le C(p,q,k)\sigma^{1/p-1/q+k}\|f\|_p, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

называется неравенством *Никольского — Бернштейна.*

Классические неравенства Никольского — Бернштейна для полиномов и функций имеют большое значение в разных разделах математики, в частности, в теории приближения и вложении пространств L^p (см., например, [20]). Им и их обобщениям посвящено большое количество работ; см., например, недавние работы [4; 6], содержащие обширную библиографию.

Неравенство (1.1) точно по порядку при изменении σ, однако точные константы $C(p,q,k)$ известны только при $p = q$ (см., например, [1, гл. IV]) и $(p,q) = (2,\infty)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, где оно является простым следствием неравенства Коши – Буняковского (для случая тригонометрических многочленов см. [24, п. 4.9 (8)]). Даже в случае равномерной и интегральной норм $(p,q) = (1,\infty)$ вопрос о точном значении $C(1,\infty,0)$ остается открытым. В работе [11] доказаны оценки $2\pi C(1,\infty,0) \in (1.081, 1.098)$. Интересно отдельно упомянуть случай $p = 0$, $q > 0$, где известна точная константа для тригонометрических многочленов [3].

В этой работе мы изучаем весовой вариант неравенства (1.1)

$$\|\Lambda_\alpha^k f\|_{q,\alpha} \le \mathcal{L}(\alpha,p,q,k)\sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/q)+k}\|f\|_{p,\alpha} \tag{1.2}$$

на подпространстве функций

$$\mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha} = \mathcal{E}^\sigma \cap L^p_\alpha, \quad L^p_\alpha = L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx).$$

Здесь параметр $\alpha \ge -1/2$, L^p_α — пространство Лебега комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{2\alpha+1}\,dx\Bigr)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,\alpha} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

и $L^\infty(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$ для непрерывных функций. Через

$$\Lambda_\alpha f(x) = f'(x) + \frac{2\alpha+1}{x}\,\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

обозначен дифференциально-разностный оператор Данкля [23]. При $k = 2$ получаем дифференциально-разностный оператор Бесселя

$$B_\alpha f(x) = \Lambda_\alpha^2 f(x) = \Bigl(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\,\frac{d}{dx}\Bigr) f(x) - \frac{2\alpha+1}{x^2}\,\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Множитель $\sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/q)+k}$ в неравенстве (1.2) появляется в силу однородности (1.2) относительно дилатации $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Действительно, легко убедиться, что $\Lambda_\alpha \delta_\lambda = \lambda \delta_\lambda \Lambda_\alpha$ и $\|\delta_\lambda f\|_{p,\alpha} = \lambda^{-(2\alpha+2)/p}\|f\|_{p,\alpha}$. Таким образом, точную константу в неравенстве (1.2) достаточно изучать при $\sigma = 1$.

Конечность константы $\mathcal{L}(\alpha,p,q,k)$ для четных $k \geq 0$ при $1 \leq p \leq q \leq \infty$ следует из [15, Remark 7.9, $d = 1$]. Случай нечетных k может быть разобран аналогично.

Константа Никольского $\mathcal{L}(\alpha,p,q,0)$ исследовалась в недавних работах [4] (случай четных функций) и [12] (общий случай). Доказано, что при $\alpha \geq -1/2$ и $p \in [1,\infty)$

$$\mathcal{L}(\alpha,p,\infty,0) = \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha} \text{ — четная действительная функция на } \mathbb{R} \text{ и } \|f\|_{p,\alpha} \leq 1\}. \tag{1.3}$$

Кроме того, в [4] установлено, что в (1.3) существует экстремальная функция $f_* \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ такая, что $f_*(0) = \mathcal{L}(\alpha,p,\infty,0)$ и $\|f_*\|_{p,\alpha} = 1$. При $p > 1$ она единственная. Функция f_* характеризуется ортогональностью $|f_*(x)|^{p-1}\operatorname{sign} f_*(x)$ подпространству четных функций из $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$, равных нулю при $x = 0$.

Следуя [12], введем нормализованную константу Никольского

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p) = ((\alpha+1)c_\alpha^{-2})^{1/p}\mathcal{L}(\alpha,p,\infty,0), \tag{1.4}$$

где

$$c_\alpha = \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}. \tag{1.5}$$

В [12] показано, что $\mathcal{L}^*(\alpha,p) \leq \lceil p/2\rceil^{\frac{2\alpha+2}{p}}$ для всех $p \in (0,\infty)$, где $\lceil a\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее, чем a. Равенство достигается только при $p = 2$. Кроме того, для фиксированного $p \in [1,\infty)$

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p) \geq (p/2)^{\frac{2\alpha+2}{p}(1+o(1))}, \quad \alpha \to \infty. \tag{1.6}$$

Легко показать, пользуясь теорией одномерного преобразования Данкля (см. разд. 2), что при $\alpha \geq -1/2$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{L}(\alpha,2,2,k) = 1, \quad \mathcal{L}(\alpha,2,\infty,k) = c_\alpha(k+\alpha+1)^{-1/2}. \tag{1.7}$$

В работе [21] доказано следующее неравенство Бернштейна для четных функций $f \in \mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}$:

$$\|B_\alpha f\|_{p,\alpha} \leq (2\alpha+2)\|f\|_{p,\alpha}, \quad \alpha \geq -1/2, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

причем при $p = \infty$ оно точное.

При $p \neq 2,\infty$ вопрос о точной весовой константе Бернштейна $\mathcal{L}(\alpha,p,p,k)$ при $\alpha > -1/2$, $k \geq 1$, по-видимому, открыт.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. Пока константы Никольского — Бернштейна $\mathcal{L}(\alpha,p,q,k)$ остаются неизвестными для почти всех значений параметров, большой интерес приобретают их точные значения на подмножествах $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$. Рассмотрим следующее точное неравенство Никольского — Бернштейна для неотрицательных функций:

$$\|\Lambda^k_\alpha f\|_{q,\alpha} \leq \mathcal{L}(\alpha,p,q,k)_+\|f\|_{p,\alpha}, \quad f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}, \quad f \geq 0. \tag{1.8}$$

Мы вычислим константу $\mathcal{L}(\alpha,p,q,k)_+$ при $(p,q) = (1,\infty)$ и $k = 0,2$. В этом случае $\Lambda^k_\alpha = I, B_\alpha$, где I — тождественный оператор.

По аналогии с (1.4) введем нормализованную константу Никольского — Бернштейна для неотрицательных функций

$$\mathcal{L}^*_r(\alpha)_+ = (\alpha+1)c_\alpha^{-2}\mathcal{L}(\alpha,1,\infty,2r)_+, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.9}$$

и пусть $j_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)(2/t)^\alpha J_\alpha(t)$ — нормированная функция Бесселя порядка α.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \ge -1/2$. Тогда*

(i) *при $r = 0$*

$$\mathcal{L}_0^*(\alpha)_+ = \frac{1}{2^{2\alpha+2}}$$

и единственной с точностью до константы экстремальной функцией в неравенстве (1.8) *является функция $j_{\alpha+1}^2(x/2)$;*

(ii) *при $r = 1$*

$$\mathcal{L}_1^*(\alpha)_+ = \frac{1}{2^{2\alpha+4}(\alpha+2)}$$

и единственной с точностью до константы экстремальной функцией в неравенстве (1.8) *является функция $x^2 j_{\alpha+2}^2(x/2)$.*

Для полуцелых $\alpha = n/2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, множество четных функций из $\mathcal{E}^\sigma \cap L^p(\mathbb{R}_+, x^{n-1}\,dx)$ можно отождествить с классом радиальных целых функций экспоненциального сферического типа не больше σ, принадлежащих $L^p(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [9]). Поэтому точной константой в соответствующем многомерном неравенстве Никольского будет константа $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(n/2-1, p, q, 0)$. Для неотрицательных функций константа $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(n/2-1, 1, \infty, 0)_+$ найдена в работе [6]. Таким образом, в теореме 1 (i) основным результатом является расширение области изменения параметра α. Кроме того, (i) уточняет асимптотическую оценку (1.6). Также необходимо отметить, что задача $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(n/2-1, 1, \infty, 0)_+$ может быть переформулирована как экстремальная задача Турана для целых функций экспоненциального сферического типа [10; 22].

Как в работе [6], для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся методом квадратурных формул по нулям функции Бесселя, точных для целых функций экспоненциального типа.

Дальнейшая организация работы следующая. В разд. 2 мы приведем некоторые вспомогательные результаты, в том числе установим (1.7). В разд. 3 доказывается следующая теорема, которая обобщает равенство (1.3).

Теорема 2. *При $\alpha \ge -1/2$ и $p \in [1, \infty]$ для произвольного $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем*

$$\mathcal{L}(\alpha, p, \infty, 2r) = \sup\{B_\alpha^r f(0) \colon f \in \mathcal{E}_{p,\alpha}^1 \text{ — четная действительная функция на } \mathbb{R} \text{ и } \|f\|_{p,\alpha} \le 1\}.$$

Существует экстремальная функция $f_* \in \mathcal{E}_{p,\alpha}^1$ такая, что $B_\alpha^r f(0) = \mathcal{L}(\alpha, p, \infty, 2r)$ и $\|f_*\|_{p,\alpha} = 1$. При $1 < p < \infty$ она единственная.

Опираясь на этот результат, в разд. 4 мы докажем основную теорему 1: в подразд. 4.1 — утверждение (i), а в подразд. 4.2 — утверждение (ii).

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Одномерное преобразование Данкля

Гармонический анализ в пространствах L_α^p основывается на одномерном преобразовании Данкля $\mathcal{F}_\alpha$, ассоциированном с группой отражений $\mathbb{Z}_2$ и функцией кратности $k(\cdot) \equiv \alpha + 1/2 \ge 0$ (см., например, [19; 23]):

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(y) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) e_\alpha(-xy) |x|^{2\alpha+1}\,dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

где константа c_α определена в (1.5) и $e_\alpha(t)$ — обобщенная экспонента,

$$e_\alpha(t) = j_\alpha(t) - i j_\alpha'(t) = j_\alpha(t) + \frac{it}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(t).$$

Напомним, что здесь $j_\alpha(t)=\Gamma(\alpha+1)(2/t)^\alpha J_\alpha(t)$ — нормированная функция Бесселя. Она является четной целой функцией экспоненциального типа 1 с разложением в бесконечное произведение

$$j_\alpha(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{t^2}{q_{\alpha,k}^2}\Bigr),$$

где $q_{\alpha,1}<q_{\alpha,2}<\dots$ — положительные нули функции Бесселя $J_\alpha(t)$. Другие многочисленные свойства функции Бесселя можно найти в [5, Chap. 7].

Справедливы оценки

$$|e_\alpha(t)|\le e_\alpha(0)=1,\quad |j_\alpha(t)|\le j_\alpha(0)=1,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

На четных функциях преобразование Данкля совпадает с преобразованием Ганкеля

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(y)=c_\alpha\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)j_\alpha(xy)|x|^{2\alpha+1}\,dx=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^\infty f(x)j_\alpha(xy)x^{2\alpha+1}\,dx.$$

Оператор $\mathcal{F}_\alpha$ унитарный в пространстве L^2_α, $\mathcal{F}_\alpha^{-1}(f)(x)=\mathcal{F}_\alpha(f)(-x)$ и автоморфен на классе шварцовских функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Для функций из L^p_α при $1\le p\le 2$ справедливо неравенство Хаусдорфа — Юнга. При $p>2$ преобразование Данкля понимается как распределение.

Для дифференциально-разностных операторов Данкля Λ_α и Бесселя $B_\alpha=\Lambda_\alpha^2$ соответственно имеем $\Lambda_\alpha e_\alpha(\lambda x)=i\lambda e_\alpha(\lambda x)$, $B_\alpha e_\alpha(\lambda x)=-\lambda^2e_\alpha(\lambda x)$ и $B_\alpha j_\alpha(\lambda x)=-\lambda^2 j_\alpha(\lambda x)$, откуда

$$\mathcal{F}_\alpha(\Lambda_\alpha f)(y)=iy\mathcal{F}_\alpha(f)(y),\quad \mathcal{F}_\alpha(B_\alpha f)(y)=-y^2\mathcal{F}_\alpha(f)(y). \tag{2.2}$$

Нам потребуется положительный оператор обобщенного сдвига Данкля T^t_α, подробно изученный в работе [15, Sect. 3, $d=1$]. Изначально он определяется в L^2_α как мультипликатор Данкля

$$T^t_\alpha f(x)=c_\alpha\int\limits_{\mathbb{R}} j_\alpha(ty)\mathcal{F}_\alpha(f)(y)e_\alpha(xy)|y|^{2\alpha+1}\,dy,\quad y,t\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

что эквивалентно $\mathcal{F}_\alpha(T^t_\alpha f(\cdot))(y)=j_\alpha(ty)\mathcal{F}_\alpha(f)(y)$.

При $\alpha=-1/2$ имеем $T^t_{-1/2}f(x)=2^{-1}(f(x-t)+f(x+t))$, а при $\alpha>-1/2$ справедливо интегральное представление

$$T^t_\alpha f(x)=C_\alpha\int\limits_0^\pi\Bigl[f_{\mathrm{even}}(A)+(x-t\cos\theta)\,\frac{f_{\mathrm{odd}}(A)}{A}\Bigr]\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta, \tag{2.4}$$

где $A=\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\theta}$, f_{even} и f_{odd} — соответственно четная и нечетная части функции f и C_α — нормировочная константа, получаемая из условия $T^t_\alpha 1=1$:

$$C_\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Представление (2.4) позволяет определить оператор T^t_α на локально интегрируемых функциях. На четных функциях получаем оператор обобщенного сдвига Бесселя.

Оператор T^t_α четный по t, положительный, самосопряженный и $T^0_\alpha=I$. При $p\ge 1$ он L^p_α-ограничен с константой 1 как по x, так и по t [15]. В частности, для каждого $x\in\mathbb{R}$

$$\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}}|T^t_\alpha f(x)|^p|t|^{2\alpha+1}\,dt\Bigr)^{1/p}\le\|f\|_{p,\alpha},\quad 1\le p\le\infty. \tag{2.5}$$

2.2. Доказательство равенств (1.7)

По теореме Пэли — Винера для преобразования Данкля (см. [2, Sect. 5]) функция f принадлежит $\mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$, $1\le p\le\infty$, тогда и только тогда, когда носитель ее преобразования Данкля $\mathcal{F}_{\alpha}(f)$ содержится в $[-\sigma,\sigma]$. В частности, функции $f\in\mathcal{E}^{\sigma}_{2,\alpha}$ имеют представление

$$f(x)=c_{\alpha}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\mathcal{F}_{\alpha}(f)(y)e_{\alpha}(xy)|y|^{2\alpha+1}\,dy,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Отсюда и (2.2) следует, что

$$\Lambda^{k}_{\alpha}f(x)=c_{\alpha}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}(iy)^{k}\mathcal{F}_{\alpha}(f)(y)e_{\alpha}(xy)|y|^{2\alpha+1}\,dy. \tag{2.6}$$

Далее стандартными рассуждениями с помощью равенства Паншереля $\|f\|_{2,\alpha}=\|\mathcal{F}_{\alpha}(f)\|_{2,\alpha}$ находим

$$\|\Lambda^{k}_{\alpha}f\|_{2,\alpha}=\biggl(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|y|^{2k}|\mathcal{F}_{\alpha}(f)(y)|^{2}|y|^{2\alpha+1}\,dy\biggr)^{1/2}\le\sigma^{k}\biggl(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|\mathcal{F}_{\alpha}(f)(y)|^{2}|y|^{2\alpha+1}\,dy\biggr)^{1/2}=\sigma^{k}\|f\|_{2,\alpha}.$$

Точность здесь устанавливается на последовательности функций

$$f_{\varepsilon}(x)=c_{\alpha}\int\limits_{(1-\varepsilon)\sigma\le|y|\le\sigma}e_{\alpha}(xy)|y|^{2\alpha+1}\,dy,\quad \varepsilon\to 0.$$

Таким образом, $\mathcal{L}(\alpha,2,2,k)=1$.

Применяя в (2.6) неравенство Коши — Буняковского, с учетом (2.1) получаем

$$\|\Lambda^{k}_{\alpha}f\|_{\infty}\le c_{\alpha}\biggl(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|y|^{2k}|y|^{2\alpha+1}\,dy\biggr)^{1/2}\biggl(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|\mathcal{F}_{\alpha}(f)(y)|^{2}|y|^{2\alpha+1}\,dy\biggr)^{1/2}$$

$$=c_{\alpha}\Bigl(\frac{2\sigma^{2k+2\alpha+2}}{2k+2\alpha+2}\Bigr)^{1/2}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|^{2}|x|^{2\alpha+1}\,dx\biggr)^{1/2}=\frac{c_{\alpha}\sigma^{k+\alpha+1}}{(k+\alpha+1)^{1/2}}\,\|f\|_{2,\alpha},$$

где равенство достигается на единственной с точностью до константы функции

$$f_{*}(x)=c_{\alpha}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}(-iy)^{k}e_{\alpha}(xy)|y|^{2\alpha+1}\,dy.$$

Это влечет искомое равенство $\mathcal{L}(\alpha,2,\infty,k)=c_{\alpha}(k+\alpha+1)^{-1/2}$.

3. Доказательство теоремы 2

В безвесовом случае теорема элементарно вытекает из инвариантности производной функции f, класса $\mathcal{E}^{\sigma}$ и нормы $\|f\|_{p}$ относительно сдвига $f(x+t)$. В весовом случае мы воспользуемся оператором обобщенного сдвига T^{t}_{α} и покажем, что дифференциально-разностный оператор Бесселя B_{α} и класс $\mathcal{E}^{\sigma}$ инвариантны относительно T^{t}_{α}, а для нормы $\|f\|_{p,\alpha}$ имеем свойство (2.5).

Приведем эти и другие вспомогательные факты для функций $f\in\mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$, $p\ge 1$.

1. Класс $\mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$ вкладывается в безвесовой класс $\mathcal{E}^{\sigma}_{p,-1/2}$. Поэтому при $1 \le p < \infty$ имеем $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ [4, Subsect. 4.3]. Отсюда и из классического неравенства Бернштейна вытекает, что любая производная функции f стремится к нулю, а следовательно, для произвольного $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\Lambda^k_\alpha f(x) \to 0, \quad x \to \pm\infty. \tag{3.1}$$

2. Для произвольной фиксированной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $g(t) = T^t_\alpha f(x_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $g(0) = f(x_0)$ по $T^0_\alpha = I$ и $\|g\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha}$ по (2.5). В [12, лемма 1] двумя способами доказано, что функция $g(t)$ продолжается до четной целой функции экспоненциального типа не больше σ. Один из них напрямую использует интегральное представление (2.4). Другой способ основывается на теореме Пэли — Винера и том факте, что преобразование Данкля (понимаемое как распределение) функции $g(t)$ в силу (2.3) равно $\mathcal{F}_\alpha(g)(y) = e_\alpha(x_0 y)\mathcal{F}_\alpha(f)(y)$.

3. На классе функций $f \in L^p_\alpha \cap C^\infty(\mathbb{R})$ справедливо следующее свойство коммутативности:

$$B^r_\alpha g(t) = T^t_\alpha F(x_0), \tag{3.2}$$

где

$$g(t) = T^t_\alpha f(x_0), \quad F(x) = B^r_\alpha f(x), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Действительно, на плотном подмножестве шварцовских функций в силу (2.3) и (2.2) имеем

$$T^t_\alpha F(x_0) = c_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} (-y^2)^r j_\alpha(ty)\mathcal{F}_\alpha(f)(y) e_\alpha(x_0 y)|y|^{2\alpha+1}\,dy$$

$$= c_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} B^r_\alpha(j_\alpha(\,\cdot\,y))(t)\mathcal{F}_\alpha(f)(y)e_\alpha(x_0 y)|y|^{2\alpha+1}\,dy = B^r_\alpha g(t).$$

Другой способ доказать (3.2) — воспользоваться интегральным представлением оператора T^t_α, однако данный путь более громоздкий.

Приступим к доказательству теоремы 2. Напомним, что при $\alpha \ge -1/2$, $1 \le p < \infty$ и $r = 0$ она доказана в работах [4, теорема 2] (случай четных функций) и [12, теорема 1] (общий случай).

Пусть вначале $1 \le p < \infty$ и $f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ — произвольная функция такая, что $\|f\|_{p,\alpha} \le 1$. Положим $F(x) = B^r_\alpha f(x)$.

Аналогично [4, Lemma 2 (4)] доказывается, что можно ограничиться действительными на $\mathbb{R}$ функциями f. В самом деле, иначе можно рассмотреть действительную функцию

$$f_0(x) = \frac{f(x) + \overline{f(\overline{x})}}{2} \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha},$$

для которой $\|f_0\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha} \le 1$ и $B^r_\alpha f_0(0) = B^r_\alpha f(0)$.

Из (3.1) выводим, что $\|F\|_\infty = |F(x_0)|$ для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $F(x_0) \ge 0$.

Рассмотрим четную функцию

$$g(t) = c^{-1} T^t_\alpha f(x_0), \quad c = \|f\|_{p,\alpha} \le 1.$$

Как указано выше, $g \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ и $\|g\|_{p,\alpha} \le c^{-1}\|f\|_{p,\alpha} = 1$. Кроме того, в силу (3.2)

$$B^r_\alpha g(0) = c^{-1} T^0_\alpha F(x_0) = c^{-1} F(x_0) \ge \|B^r_\alpha f\|_\infty.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(\alpha, p, \infty, 2r)$ равно верхней грани $B^r_\alpha g(0)$ по таким функциям g. Очевидно, что при этом можно ограничиться функциями с единичной нормой.

Если $p = \infty$, то для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать функцию f и точку x_0 так, чтобы

$$\mathcal{L}(\alpha, \infty, \infty, 2r) < (1+\varepsilon)F(x_0).$$

Отсюда, как и выше, заключаем, что

$$\sup B_\alpha^r g(0) \le \mathcal{L}(\alpha, \infty, \infty, 2r) < (1+\varepsilon) \sup B_\alpha^r g(0)$$

и теперь можно устремить ε к нулю.

Существование экстремальной функции f_* следует из теоремы компактности для целых функций экспоненциального типа [20, 3.3.6] (см. также [4, Lemma 2 (3)]). Ее единственность при $1 < p < \infty$ является простым следствием строгой выпуклости L^p_α-нормы.

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Пусть $\alpha \ge -1/2$, $\tau > 0$. Для произвольной четной функции $f \in \mathcal{E}^{2\tau}_{1,\alpha}$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами, доказанная в [7; 16] (см. также [13, разд. 5.1])

$$\int_0^\infty f(x)x^{2\alpha+1}\,dx = \rho_{\alpha,0}(\tau)f(0) + \sum_{k=1}^\infty \rho_{\alpha,k}(\tau) f\Big(\frac{q_{\alpha+1,k}}{\tau}\Big), \tag{4.1}$$

где $\rho_{\alpha,0}(\tau) = \dfrac{2^{2\alpha}\Gamma^2(\alpha+1)(2\alpha+2)}{\tau^{2\alpha+2}}$ и ряд сходится абсолютно.

4.1. Доказательство утверждения (i)

Воспользуемся (1.3) (или теоремой 2 при $r = 0$) и квадратурной формулой Маркова (4.1). Пусть $f \in \mathcal{E}^1_{1,\alpha}$ — произвольная неотрицательная четная функция, для которой $\|f\|_{1,\alpha} = 1$. Применяя к ней формулу (4.1) и отбрасывая неотрицательные слагаемые, находим

$$2^{-1} = \int_0^\infty f(x)x^{2\alpha+1}\,dx = \rho_{\alpha,0}(1/2)f(0) + \sum_{k=1}^\infty \rho_{\alpha,k}(1/2)f(2q_{\alpha+1,k}) \ge \rho_{\alpha,0}(1/2)f(0). \tag{4.2}$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(\alpha,1,\infty,0)_+ = \sup f(0) \le \frac{1}{2\rho_{\alpha,0}(1/2)} = \frac{1}{2^{2\alpha+2}(\alpha+1)(2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1))^2} = \frac{1}{2^{2\alpha+2}(\alpha+1)c_\alpha^{-2}},$$

откуда для нормализованной константы Никольского (1.9) получаем оценку

$$\mathcal{L}^*_0(\alpha)_+ = (\alpha+1)c_\alpha^{-2}\mathcal{L}(\alpha,1,\infty,0)_+ \ge \frac{1}{2^{2\alpha+2}}.$$

Данная оценка будет точная, если в точках $2q_{\alpha+1,k}$ функция f имеет двойные нули. Отсюда находим, что $f_*(x) = cj^2_{\alpha+1}(x/2)$, где константа c находится из условия $\|f_*\|_{1,\alpha} = 1$. Поскольку на f_* в (4.2) имеем равенство, то $c = \mathcal{L}(\alpha,1,\infty,0)_+$.

Покажем единственность экстремальной функции f_*. Соответственно, в неравенстве (1.8) она будет экстремальной с точностью до ненулевой константы. Так же как в работе [14], воспользуемся леммой Ахиезера [17, App. VII, 10].

По теореме Вейерштрасса о разложении целой функции любая экстремальная функция имеет вид $f(x) = h(x)f_*(x)$, где h — четная целая функция экспоненциального типа, $h(0) = 1$. Из асимптотического разложения функции Бесселя [5, 7.13.1 (3)] имеем

$$z^{\alpha+1/2}j_\alpha(z) = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)}\Big(\cos\Big(z - \frac{\pi(2\alpha+1)}{4}\Big) + O(|z|^{-1}e^{|\operatorname{Im} z|})\Big), \tag{4.3}$$

откуда

$$e^{-|y|}|y|^{2\alpha+3}|f_*(iy)| \asymp 1, \quad y \to \pm\infty.$$

Поэтому по лемме Ахиезера функция h — четный многочлен степени не выше $2\alpha+3$. Так как по (4.3) уже функция $x^2 f_*(x) \notin L^1_\alpha$, то $h \equiv 1$. Утверждение (i) доказано.

4.2. Доказательство утверждения (ii)

Нам потребуется вариант квадратурной формулы Маркова (4.1), содержащий производные функции в нуле. Такие формулы можно найти в работе [8, Theorem 2], однако несложно вывести нужную формулу в наших обозначениях напрямую из (4.1). Сделаем это.

Воспользуемся квадратурной формулой (4.1) для веса $t^{2\alpha+3}$ и применим его к четной функции

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)j^2_{\alpha+2}(\tau x)}{x^2} \in \mathcal{E}^{2\tau}_{1,\alpha+1}.$$

Получаем

$$\int_0^\infty g(x)x^{2\alpha+3}\,dx = \rho_{\alpha+1,0}(\tau)g(0) + \sum_{k=1}^\infty \rho_{\alpha+1,k}(\tau)g(q_{\alpha+2,k}/\tau).$$

Из [5, 7.7.4 (30)] следует, что

$$\int_0^\infty j^2_{\alpha+2}(\tau x)x^{2\alpha+1}\,dx = \frac{2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)}{(\alpha+3)\tau^{2\alpha+2}} = \frac{\tau^2\rho_{\alpha+1,0}(\tau)}{2(\alpha+1)(\alpha+3)},$$

а разложение функции Бесселя в ряд Тейлора [5, 7.2.1 (2)] дает $\dfrac{d^2 j^2_{\alpha+2}(\tau x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = -\dfrac{\tau^2}{\alpha+3}$. Отсюда после несложных выкладок получаем нужную формулу

$$\int_0^\infty f(x)x^{2\alpha+1}\,dx = \frac{\rho_{\alpha+1,0}(\tau)}{2}\,f''(0) + \frac{(\alpha+2)\tau^2\rho_{\alpha+1,0}(\tau)}{2(\alpha+1)(\alpha+3)}\,f(0) + \sum_{k=1}^\infty \frac{\rho_{\alpha+1,k}(\tau)}{(q_{\alpha+2,k}/\tau)^2}\,f(q_{\alpha+2,k}/\tau). \quad (4.4)$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{E}^1_{1,\alpha}$ — неотрицательная четная функция, $\|f\|_{1,\alpha} = 1$. Тогда $f'(0) = 0$ и

$$B_\alpha f(0) = (2\alpha+2)f''(0).$$

Отсюда и из (4.4), как и при доказательстве утверждения (i), получаем оценку

$$B_\alpha f(0) \le \frac{2\alpha+2}{\rho_{\alpha+1,0}(1/2)} = \frac{2\alpha+2}{2^{2\alpha+4}(2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2))^2(2\alpha+4)} = \frac{1}{2^{2\alpha+4}(\alpha+2)(\alpha+1)c_\alpha^{-2}},$$

откуда для нормализованной константы Никольского (1.9) получаем оценку

$$\mathcal{L}^*_1(\alpha)_+ \le \frac{1}{2^{2\alpha+4}(\alpha+2)}.$$

Как и в подразд. 4.1, эти оценки точные и достигаются на единственной экстремальной функции $f_*(x) = cx^2 j^2_{\alpha+2}(x/2)$. Константа c находится из равенства $(2\alpha+2)f''_*(0) = \mathcal{L}(\alpha,1,\infty,2)_+$, в котором $f''_*(0) = 2c$. Отсюда $c = \dfrac{\mathcal{L}(\alpha,1,\infty,2)_+}{4(\alpha+1)}$.

Утверждение (ii), а вместе с ним и теорема 1, доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
2. **Andersen N.B., de Jeu M.** Elementary proofs of Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line // Int. Math. Res. Notices. 2005. Vol. 2005, no. 30. P. 1817–1831.
3. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 4. С. 539–547.
4. **Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
5. **Bateman G., Erdélyi A., et al.** Higher transcendental functions. Vol. II. N Y: McGraw Hill Book Company, 1953. 396 p. ISBN: 0486446158 .
6. **Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S.** Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere [e-resource]. 21 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1708.09837.pdf .
7. **Frappier C., Olivier P.** A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316. doi: 10.1090/S0025-5718-1993-1149290-5 .
8. **Ghanem R.B., Frappier C.** Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, no. 2. P. 267–279. doi: 10.1006/jath.1997.3122 .
9. **Горбачев Д.В.** Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187. doi: 10.4213/mzm936 .
10. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352. doi: 10.4213/mzm508 .
11. **Горбачев Д.В.** Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 72–91.
12. **Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н.** Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сб. 2018. № 2. С. 67–79.
13. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98. doi: 10.4213/sm8413 .
14. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530. doi: 10.4213/mzm11110 .
15. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Y.** Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51. doi: 10.1007/s00365-018-9435-5 .
16. **Grozev G.R., Rahman Q.I.** A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725. doi: 10.1090/S0025-5718-1995-1277767-2 .
17. **Левин Б.Я.** Целые функции. Москва: Изд-во МГУ, 1971. 124 с.
18. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** L^p inequalities for entire functions of exponential type // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320, no. 1. P. 91–103. doi: 10.1090/S0002-9947-1990-0974526-4 .
19. **Rösler M.** Dunkl operators: Theory and applications // Lecture Notes in Math. / eds. E. Koelink, W. Van Assche Berlin: Springer, 2003. Vol. 1817. P. 93–135. doi: 10.1007/3-540-44945-0_3 .
20. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва: Наука, 1977. 480 с.
21. **Платонов С.С.** Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. математическая. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
22. **Révész Sz.Gy.** Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, no. 1. P. 15–50. doi: 10.1007/s10476-011-0102-3 .
23. **Soltani F.** L^p-Fourier multipliers for the Dunkl operator on the real line // J. Funct. Anal. 2004. Vol. 209, iss. 1. P. 16–35. doi: 10.1016/j.jfa.2003.11.009 .
24. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 624 с.

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Тульский государственный университет,
г. Тула
e-mail: dvgmail@mail.ru

Поступила 05.09.2018
После доработки 15.11.2018
Принята к публикации 19.10.2018

REFERENCES

1. Achieser N.I. Theory of approximation. N Y: Dover, 2004, 307 p. ISBN: 0486495434 .
2. Andersen N.B., de Jeu M. Elementary proofs of Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line. *Int. Math. Res. Notices*, 2005, vol. 2005, no. 30, pp. 1817–1831.
3. Arestov V.V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 4, pp. 265–269. doi: 10.1007/BF01140526 .
4. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line. *Anal. Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
5. Bateman G., Erdélyi A., et al. Higher transcendental functions. Vol. II. N Y: McGraw Hill Book Company, 1953, 396 p. ISBN: 0486446158 .
6. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikol'skii constants for polynomials on the unit sphere [e-resource]. 21 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1708.09837.pdf .
7. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions. *Math. Comp.*, 1993, vol. 60, pp. 303–316. doi: 10.1090/S0025-5718-1993-1149290-5 .
8. Ghanem R.B., Frappier C. Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type. *J. Approx. Theory*, 1998, vol. 92, no. 2, pp. 267–279. doi: 10.1006/jath.1997.3122 .
9. Gorbachev D.V. Extremum problems for entire functions of exponential spherical type. *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 2, pp. 159–166. doi: 10.1007/BF02675341 .
10. Gorbachev D.V. Extremal problem for periodic functions supported in a ball, *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3-4, pp. 313–319. doi: 10.1023/A:1010275206760 .
11. Gorbachev D.V. An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, suppl. 2, pp. S117–S138.
12. Gorbachev D.V., Dobrovol'skii N.N. The Nikol'skii constants in spaces $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$. *Chebyshevskii Sb.*, 2018, no. 2, pp. 67–79.
13. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type. *Sbornik: Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1087–1122. doi: 10.1070/SM2015v206n08ABEH004490 .
14. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm – Liouville operator. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 3–4, pp. 540–549. doi: 10.1134/S000143461609025X .
15. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Y. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications. *Constr. Approx.*, 2018, pp. 1–51. doi: 10.1007/s00365-018-9435-5 .
16. Grozev G.R., Rahman Q.I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes. *Math. Comp.*, 1995, vol. 64, pp. 715–725. doi: 10.1090/S0025-5718-1995-1277767-2 .
17. Levin B.Ya. *Lectures on entire functions. English revised edition.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996, 248 p. ISBN: 0-8218-0282-8 . Original Russian text published in Levin B.Ya. *Tselye funktsii.* Moscow: Mos. Gos. Univ., Mekh.-Mat. Fak., 1971, 124 p.
18. Rahman Q.I., Schmeisser G. L^p inequalities for entire functions of exponential type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 320, no. 1, pp. 91–103. doi: 10.1090/S0002-9947-1990-0974526-4 .
19. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications. In: Koelink E., Van Assche W. (eds) *Lecture Notes in Math.*, vol. 1817. Berlin: Springer, 2003, pp. 93–135. doi: 10.1007/3-540-44945-0_3 .
20. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5 . Original Russian text published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 480 p.
21. Platonov S.S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izvestiya: Math.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048. doi: 10.1070/IM2007v071n05ABEH002379 .
22. Révész Sz.Gy. Turán's extremal problem on locally compact abelian groups. *Anal. Math.*, 2011, vol. 37, no. 1, pp. 15–50. doi: 10.1007/s10476-011-0102-3 .

23. Soltani F. L^p-Fourier multipliers for the Dunkl operator on the real line. *J. Funct. Anal.*, 2004, vol. 209, no. 1, pp. 16–35. doi: 10.1016/j.jfa.2003.11.009 .
24. Timan A.F. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. N Y: Pergamon Press, 1963, 631 p.

Received September 05, 2018
Revised November 15, 2018
Accepted November 19, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00199).

Dmitry Viktorovich Gorbachev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia, e-mail: dvgmail@mail.ru .