ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.51

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА ТЕТРАЭДРЕ[1]

Н. В. Байдакова

Рассмотрен стандартный способ линейной интерполяции функции, имеющей непрерывные и ограниченные заданной константой частные производные второго порядка, на тетраэдре. Получены оценки аппроксимации производных первого порядка, более точные по сравнению с известными.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, конечные элементы.

N. V. Baidakova. Linear interpolation on a tetrahedron.

The standard method for the linear interpolation on a tetrahedron of a function with continuous second-order partial derivatives bounded by a given constant is considered. Estimates of the approximation of first-order derivatives that are more exact than the known estimates are derived.

Keywords: multidimensional interpolation, finite elements.

MSC: 65D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-80-84

Введение

Пусть Δ — тетраэдр с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4; f — функция, определенная на Δ и непрерывная вместе с любыми своими производными до второго порядка включительно; пусть равномерная норма любой производной второго порядка по направлениям произвольных единичных векторов ξ_1, ξ_2 на Δ ограничена сверху неотрицательной константой M (соответствующий класс функций обозначим через $W(M)$).

Обозначим через $P = P[f]$ многочлен первой степени (по совокупности переменных), интерполирующий значения функции f в вершинах тетраэдра Δ. Введем также следующие обозначения: T_i — грань тетраэдра напротив вершины a_i; a_5 — проекция точки a_4 на плоскость треугольника T_4; a_6 — проекция точки a_4 на прямую, содержащую отрезок a_2a_3; τ_{ij} — единичный вектор, направленный от a_i к a_j; d_{ij} — длина отрезка a_ia_j; H_i — диаметр грани T_i; H — диаметр тетраэдра Δ; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — соответственно наименьший, средний, наибольший углы треугольника T_i; θ_{ijk} — угол между прямыми с направляющими векторами τ_{ji} и τ_{jk}; R_i — величина радиуса описанной вокруг T_i окружности; φ_{ij} — угол между плоскостями граней T_i и T_j.

Для любых неотрицательных функций ψ_1 и ψ_2 запись $\psi_1 \lesssim \psi_2$ будет означать, что существует положительная константа C такая, что $\psi_1 \le C\psi_2$. Если $\psi_1 \lesssim \psi_2$ и $\psi_2 \lesssim \psi_1$, будем писать, что $\psi_1 \asymp \psi_2$. Отметим, что для любого $i = 1, 2, 3, 4$ имеет место отношение

$$\sin\beta_i \asymp \sin\gamma_i. \tag{0.1}$$

Пусть

$$R = \max_{i=1,2,3,4} R_i,$$

φ — такой угол, что

$$\sin\varphi = \max_{i,j\in\{1,2,3,4\},\ i\ne j} \sin\varphi_{ij}.$$

[1]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).

Через $\|\cdot\|$ везде будет обозначаться равномерная норма на Δ. Известно, что

$$\|f - P\| \lesssim MH^2$$

(см., например, [5] или [4]). Ниже будут получены оценки сверху аппроксимации производных функции f производными линейного интерполянта P в терминах величин R и φ.

1. Оценки аппроксимации производных

Теорема. *Для любой функции $f \in W(M)$ и любого единичного вектора ξ справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi}\right\| \lesssim \frac{MR}{\sin\varphi}\ . \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть нумерация вершин тетраэдра такова, что $\varphi = \varphi_{14}$. Введем оси прямоугольной системы координат следующим образом: ось Ox выберем параллельной отрезку a_2a_3, ось Oy — в плоскости треугольника T_4 перпендикулярно оси Ox, ось Oz перпендикулярна плоскости треугольника T_4. Для определенности и упрощения дальнейших выкладок выберем направления координатных осей: пусть ось Ox является сонаправленной с вектором τ_{23}, оси Oy и Oz образуют острые углы с векторами τ_{21} и τ_{34} соответственно (см. рисунок). Положим

$$e = f - P.$$

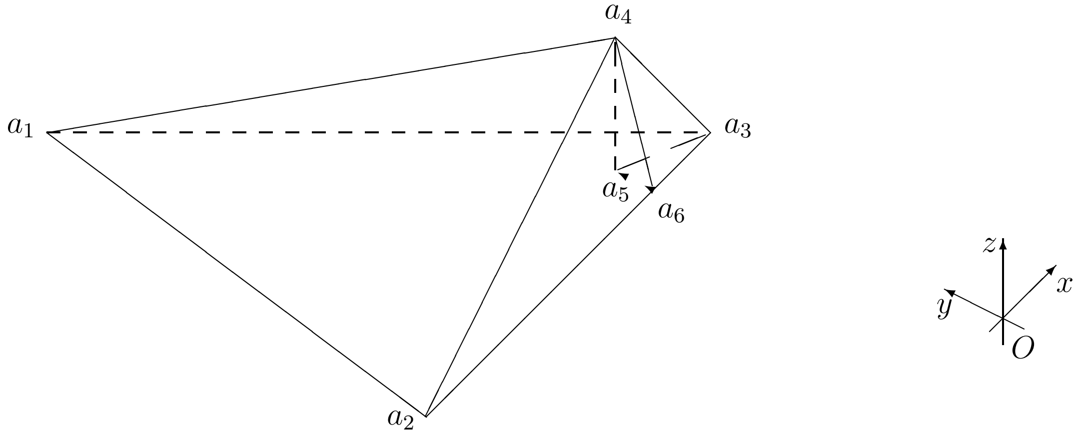
Рассмотрим треугольник T_4 с вершинами a_1, a_2, a_3. Один из углов θ_{123} или θ_{132} является средним или наибольшим углом треугольника T_4. Договоримся считать, что таким углом является θ_{123} (иначе можем изменить нумерацию вершин). Так как P является линейной функцией, интерполирующей f в вершинах тетраэдра Δ, то

$$\left|\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{23}}\right| = \left|\frac{\partial e(a_2)}{\partial x}\right| \lesssim Md_{23},$$

$$\left|\frac{\partial e(a_2)}{\partial \tau_{21}}\right| = \left|\frac{\partial e(a_2)}{\partial x}\cos\theta_{123} + \frac{\partial e(a_2)}{\partial y}\sin\theta_{123}\right| \lesssim Md_{12},$$

откуда с учетом (0.1) следует оценка

$$\left|\frac{\partial e(a_2)}{\partial y}\right| \lesssim \frac{MH_4}{\sin\theta_{123}} \asymp \frac{MH_4}{\sin\gamma_4}.$$



Тетраэдр Δ.

Пользуясь формулой Тейлора в одномерном случае (вдоль отрезка a_2a_3), можем утверждать, что для любой точки u, принадлежащей отрезку a_2a_3, в том числе для $u = a_3$, имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial e(u)}{\partial \tau_{23}}\right| = \left|\frac{\partial e(u)}{\partial x}\right| \lesssim Md_{23}, \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{\partial e(u)}{\partial y}\right| \lesssim \frac{MH_4}{\sin\gamma_4}. \tag{1.3}$$

Среди отрезков a_2a_4 и a_3a_4 выберем тот, который имеет наименьшую длину. Не ограничивая общности, будем считать, что таким отрезком является a_3a_4. Отметим, что в этом случае θ_{234} совпадает с β_1 или γ_1. Используя то, что производная функции P по направлению вектора τ_{34} является разделенной разностью, аппроксимирующей производную функции f по тому же направлению, получаем оценку

$$\left|\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{34}}\right| \lesssim Md_{34}. \tag{1.4}$$

В то же время имеет место равенство

$$\frac{\partial e(a_3)}{\partial \tau_{34}} = \frac{\partial e(a_3)}{\partial x}\cos\theta_{435}\cos\theta_{536} + \frac{\partial e(a_3)}{\partial y}\cos\theta_{435}\sin\theta_{536} + \frac{\partial e(a_3)}{\partial z}\sin\theta_{435}$$

$$= \frac{\partial e(a_3)}{\partial x}\cos\theta_{234} + \frac{\partial e(a_3)}{\partial y}\frac{d_{56}}{d_{34}} + \frac{\partial e(a_3)}{\partial z}\sin\varphi_{14}\sin\theta_{234}. \tag{1.5}$$

Из (1.2)–(1.5) и того, что $\sin\theta_{234} \asymp \sin\gamma_1$, получаем оценку

$$\left|\frac{\partial e(a_3)}{\partial z}\right| \lesssim \frac{Md_{34}}{\sin\varphi_{14}\sin\theta_{234}} + \frac{Md_{23}}{\sin\varphi_{14}\sin\theta_{234}} + \frac{MH_4}{\sin\gamma_4}\frac{d_{56}}{d_{34}}\frac{1}{\sin\varphi_{14}\sin\theta_{234}}$$

$$= \frac{M}{\sin\varphi_{14}}\left(\frac{d_{34}+d_{23}}{\sin\theta_{234}} + \frac{H_4}{\sin\gamma_4}\frac{d_{56}}{d_{34}}\frac{d_{34}}{d_{46}}\right) \lesssim \frac{M}{\sin\varphi_{14}}\left(\frac{H_1}{\sin\gamma_1} + \frac{H_4}{\sin\gamma_4}\cos\theta_{465}\right)$$

$$\lesssim \frac{M}{\sin\varphi_{14}}(R_1 + R_4) \lesssim \frac{MR}{\sin\varphi}\ . \tag{1.6}$$

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться формулой Тейлора для e с центром в точке a_3 и оценками (1.2), (1.3), (1.6). □

2. Обсуждение точности

В этом параграфе мы покажем, что полученные оценки сверху являются неулучшаемыми для определенного класса тетраэдров.

Пусть для любого $i = 1, 2, 3, 4$ имеет место отношение $H_i \asymp H$ и вершины в Δ занумерованы таким образом, что $\sin\gamma_4 \geq \sin\gamma_i$ для любого $i = 1, 2, 3$. Тогда из [2] (доказательства лемм 6 и 9) следует, что найдутся функция f^* и единичный вектор ξ такие, что

$$\left\|\frac{\partial(f^* - P[f^*])}{\partial \xi}\right\| \gtrsim \frac{MH}{\sin\theta},$$

где θ — угол между плоскостью грани T_4 и прямой, проходящей через наименьшее из ребер a_ia_4 $(i = 1, 2, 3)$. Пусть для определенности это будет ребро a_3a_4. Поскольку для такого тетраэдра в силу выбора нумерации вершин при $i = 1$ или $i = 2$ выполняется условие $\sin\gamma_4 \asymp \sin\gamma_3 \gtrsim \sin\gamma_i$, то

$$\left\|\frac{\partial(f^* - P[f^*])}{\partial \xi}\right\| \gtrsim \frac{MR}{\sin\varphi}.$$

Если же, например, $H_3 \ll H$, то из [2] (лемма 5 и формулы (23), (33)) для некоторых функции f^* и единичного вектора ξ может быть получена лишь оценка

$$\left\|\frac{\partial(f^* - P[f^*])}{\partial\xi}\right\| \gtrsim \frac{MH}{\sin\varphi}.$$

Кроме того, из [1] следует, что для любого $i = 1, 2, 3, 4$ найдутся функция f_i^* и единичный вектор ξ_i такие, что $\left\|\dfrac{\partial(f_i^* - P[f_i^*])}{\partial\xi_i}\right\| \gtrsim MR_i$. Таким образом, для любого тетраэдра Δ существуют функция f^* и единичный вектор ξ такие, что

$$\left\|\frac{\partial(f^* - P[f^*])}{\partial\xi}\right\| \gtrsim MR.$$

В общем случае проблема точности полученных оценок сверху остается открытой.

3. Сравнение с известными оценками

Существует множество работ, посвященных оценкам сверху величин аппроксимации производных порядка $1, 2, \ldots, n$ исходной функции производными интерполяционных многочленов степени n на симплексах размерности d, и эти оценки пишутся в терминах различных характеристик симплексов. В частности, в [5] оценки получены с использованием аналога наименьшего угла треугольника, в работах [2; 4; 6; 7] — с использованием различных аналогов наибольшего угла треугольника, в [3] — с использованием введенного автором “модифицированного условия пустой сферы”. Более широкий перечень получаемых оценок можно найти в [2].

В [2] для произвольных d, n показано, что оценки из [7] близки к неулучшаемым. Там же для $d = 3$, $n = 1$ продемонстрировано, что оценки из [7] иногда могут быть улучшены. Соответствующие оценки из [2] имеют вид, близкий к (1.1), однако для них не доказано (и в [2] это не утверждается), что $\sin\varphi$ является наибольшей из величин $\sin\varphi_{ij}$, $i \neq j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97.
2. **Байдакова Н. В.** Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Мат. тр. 2017. Т. 20, № 1. С. 43–74.
3. **Клячин В. А.** Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента // Изв. РАН. Сер. математическая. 2016. Т. 80, № 3. С. 95–102.
4. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.
5. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199. doi: 10.1007/BF00252458 .
6. **Hannukainen A., Korotov S., Křížek M.** On Synge-type angle condition for d-simplices // Appl. Math. 2017. Vol. 62, no. 1. P. 1–13. doi: 10.21136/AM.2017.0132-16 .
7. **Jamet P.** Estimation d’erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. Vol. 10, no. 1. P. 43–60.

Поступила 18.09.2018
После доработки 18.10.2018
Принята к публикации 22.10.2018

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Baidakova N.V. Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. S33–S47. doi: 10.1134/S0081543812050057 .
2. Baidakova N.V. On Jamet's estimates for the finite element method with interpolation at uniform nodes of a simplex. *Siberian Advances in Mathematics*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 1–22. doi: 10.3103/S1055134418010017 .
3. Klyachin V.A. Modified Delaunay empty sphere condition in the problem of approximation of the gradient. *Izvestiya: Mathematics*, 2016, vol. 80, no. 3, pp. 549–556. doi: 10.1070/IM8350 .
4. Subbotin Yu.N. The dependence of estimates of a multidimensional piecewise-polynomial approximation on the geometric characteristics of a triangulation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, no. 4, pp. 135–159.
5. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1972, vol. 46, no. 3, pp. 177–199. doi: 10.1007/BF00252458 .
6. Hannukainen A., Korotov S., Křížek M. On Synge-type angle condition for d-simplices. *Applications of Mathematics*, 2017, vol. 62, no. 1, pp. 1–13. doi: 10.21136/AM.2017.0132-16 .
7. Jamet P. Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés. *RAIRO Anal. Numer.*, 1976, vol. 10, no. 1, pp. 43–60.

Received September 18, 2018
Revised October 18, 2018
Accepted October 22, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00702).

Nataliya Vasil'evna Baidakova, Cand. Sci. (Phis.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: baidakova@imm.uran.ru .