ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.95

ЛИНЕЙНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА m-МЕРНОМ ТОРЕ. I[1]

Д. Б. Базарханов

В работе строится линейный метод восстановления псевдодифференциальных операторов на m-мерном торе с символами из специальных классов, использующий линейную спектральную информацию о символе оператора и о функции (конечные наборы их коэффициентов Фурье). Даются оценки погрешности восстановления в пространстве $L_r(\mathbb{T}^m)$ значений этих псевдодифференциальных операторов на элементах функциональных пространств типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля для ряда соотношений между r, параметрами классов символов и функциональных пространств (теорема 1). При доказательстве этих оценок ключевую роль играет ограниченность рассматриваемых псевдодифференциальных операторов между подходящими функциональными пространствами типа Никольского — Бесова (соответственно, Лизоркина — Трибеля) (теорема 2).

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор на m-мерном торе, класс символов (типа произведения), функциональное пространство типа Никольского — Бесова / Лизоркина — Трибеля, восстановление оператора, оценки погрешности восстановления.

D. B. Bazarkhanov. Linear recovery of pseudodifferential operators on classes of smooth functions on an m-dimensional torus. I.

We construct a linear method for the recovery of pseudodifferential operators on an m-dimensional torus with symbols from particular classes with the use of linear spectral information on the symbol of the operator and on the function (finite sets of their Fourier coefficients). Error bounds are given for the error of recovery in the space $L_r(\mathbb{T}^m)$ of values of these pseudodifferential operators on elements of Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel function spaces for a number of relations between r and the parameters of the symbol classes and the function spaces (Theorem 1). A key role in the proof of the bounds is played by the boundedness of the pseudodifferential operators between appropriate Nikol'skii–Besov (Lizorkin–Triebel) function spaces (Theorem 2).

Keywords: pseudodifferential operator on m-dimensional torus, class of symbols (of product type), Nikol'skii–Besov / Lizorkin–Triebel function space, recovery of operator, error bounds of recovery.

MSC: 41A45, 42B05, 35S05, 58J40

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-57-79

Посвящается Виталию Владимировичу Арестову
в связи с его семидесятипятилетием

1. Введение

1. Пусть X, Y— банаховы пространства, F — заданное множество элементов из X и $\mathfrak{H}$ — некоторая (линейная) совокупность линейных операторов $T : X \to Y$ ($\| \cdot \,|\, Y \|$ — норма пространства Y; если оператор T ограничен, то $\| T \,|\, X \to Y \|$ — его норма).

Задача приближенного восстановления (значений) оператора T (из совокупности $\mathfrak{H}$) на элементах $f \in \mathrm{F}$ по конечной (неполной) информации о f и T, рассматриваемая в работе, состоит в следующем.

Пусть заданы два счетных набора $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{d}_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}\}$ и $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{g}_{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}\}$ линейных функционалов на X и на $\mathfrak{H}$ соответственно

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{b}} : X \to \mathbb{C} : f \mapsto \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}(f) \quad (\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}), \qquad \mathfrak{g}_{\mathfrak{c}} : \mathfrak{H} \to \mathbb{C} : T \mapsto \mathfrak{g}_{\mathfrak{c}}(T) \quad (\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}).$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта AP05133257 МОН РК.

Требуется,

во-первых, $\forall N \in \mathbb{N}$ выбрать конечные наборы функционалов $\mathfrak{D}_N = \{\mathfrak{d}_\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_N\}$ (т. е. оператор информации о $f : \mathfrak{D}_N(f) = \{\mathfrak{d}_\mathfrak{b}(f) \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_N\}$, здесь $\mathfrak{B}_N \subset \mathfrak{B}$, $\#\mathfrak{B}_N = N$ или, по крайней мере, $\#\mathfrak{B}_N \asymp N$) и $\mathfrak{G}_N = \{\mathfrak{g}_\mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_N\}$ (т. е. оператор информации о $T : \mathfrak{G}_N(T) = \{\mathfrak{g}_\mathfrak{c}(T) \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_N\}$, здесь $\mathfrak{C}_N \subset \mathfrak{C}$, $\#\mathfrak{C}_N < \infty$), причем $\mathfrak{B}_{N_1} \subset \mathfrak{B}_{N_2}$, $\mathfrak{C}_{N_1} \subset \mathfrak{C}_{N_2}$ при $N_1 < N_2$, $\cup_{N\in\mathbb{N}}\mathfrak{B}_N = \mathfrak{B}$, $\cup_{N\in\mathbb{N}}\mathfrak{C}_N = \mathfrak{C}$);

во-вторых, построить билинейное отображение (метод восстановления)

$$\Upsilon_N : \mathfrak{D}_N(X) \times \mathfrak{G}_N(\mathfrak{H}) \to Y : \mathfrak{D}_N(f) \times \mathfrak{G}_N(T) \mapsto \Upsilon_N(\mathfrak{D}_N(f), \mathfrak{G}_N(T));$$

в-третьих, получить оценки для величины (погрешности в пространстве Y метода Υ_N восстановления значений оператора T на элементах из F по операторам информации $\mathfrak{D}_N$ и $\mathfrak{G}_N$)

$$\mathfrak{R}(T, \mathrm{F}; \mathfrak{D}_N, \mathfrak{G}_N, \Upsilon_N; Y) = \sup_{f\in\mathrm{F}} \|Tf - \Upsilon_N(\mathfrak{D}_N(f), \mathfrak{G}_N(T)) \mid Y\|, \tag{1.1}$$

достаточно хорошие для всех операторов T из $\mathfrak{H}$ (за счет выбора операторов информации $\mathfrak{D}_N$ и $\mathfrak{G}_N$ или, другими словами, множеств индексов $\mathfrak{B}_N$ и $\mathfrak{C}_N$). Кроме того, желательно использовать информацию об операторах T по возможности “экономно”, т. е. так, чтобы $\#\mathfrak{C}_N \to +\infty$ достаточно медленно (при $N \to +\infty$).

В предлагаемой работе эта задача восстановления изучается для псевдодифференциальных операторов ((тороидальных) ПДО) на m-мерном торе, имеющих вид

$$T_a : f \mapsto T_a f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}, \tag{1.2}$$

с символами $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$, принадлежащими классам $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon;\kappa] \equiv \Psi^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon;\kappa](\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, т. е. для $\mathfrak{H} = \{T_a \mid a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\varepsilon\vartheta}[\upsilon;\kappa]\}$. Далее, берутся $X = L_p(\mathbb{T}^m)$, $Y = L_r(\mathbb{T}^m)\,(1 < p\,, r < \infty)$, в качестве F — единичные шары функциональных пространств типа Никольского — Бесова $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ и типа Лизоркина — Трибеля $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, в качестве $\mathfrak{D}$ — набор $\{\mathfrak{d}_\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}^m\}$, где $\mathfrak{d}_\xi(f) = \widehat{f}(\xi)$ — коэффициенты Фурье функции f, в качестве $\mathfrak{G}$ — набор $\{\mathfrak{g}_{\xi,\zeta} \mid (\xi,\zeta) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m\}$, где $\mathfrak{g}_{\xi,\zeta}(a) = \widehat{a}(\zeta,\xi)$ — коэффициенты Фурье функции $a(\,\cdot\,,\xi)$.

2. Здесь и ниже используются следующие обозначения. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\#\Gamma$ — число элементов конечного множества Γ ($\#\Gamma = 0 \Leftrightarrow \Gamma = \varnothing$). Для $m \in \mathbb{N}$ пусть $\mathrm{z}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$; $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор. Для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $\langle x\rangle = \sqrt{1 + xx}$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max\{|x_k| : k \in \mathrm{z}_m\}$, $x \le y (x < y) \Leftrightarrow x_k \le y_k (x_k < y_k)$, $k \in \mathrm{z}_m$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ и $\check{f} \equiv \mathcal{F}_m^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т. е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$. Хорошо известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т. е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m\backslash\mathbb{Z}^m$.

$L_p(\mathbb{I}^m)$ $(0 < p \le \infty)$ — пространство измеримых функций $f\colon \mathbb{I}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, со стандартной (квази)нормой $\|f \mid L_p(\mathbb{I}^m)\|$ $\Big($здесь $\mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathtt{I}\}$, $\mathtt{I} = \Big(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)\Big)$. Для $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in L_1(\mathbb{T}^m)$

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{и} \quad \widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^m} g(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Будем использовать стандартные мультииндексные обозначения:

для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}_0^m$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}, \quad \beta \le \alpha;$$

для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$

$$\partial^\alpha f(x) \, (\equiv \partial_x^\alpha f(x)) = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} f(x), \quad \text{где} \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k \in \mathrm{z}_m;$$

для функции $h : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ операторы (кратной) разности порядка α (соответственно "вперед" и "назад") задаются формулами

$$\Delta^\alpha h\,(\xi) \equiv \Delta_\xi^\alpha\, h\,(\xi) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^m :\, \beta \le \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \cdot h\,(\xi+\beta),$$

$$\overline{\Delta}^\alpha h\,(\xi) \equiv \overline{\Delta}_\xi^\alpha\, h\,(\xi) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^m :\, \beta \le \alpha} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \cdot b\,(\xi-\beta).$$

3. Конструкция линейного метода восстановления ПДО. Пусть Λ — произвольное конечное множество из $\mathbb{Z}^m$ и

$$\mathrm{T}(\Lambda) = \Big\{ \, t(x) = \sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{t}\,(\xi) e^{2\pi i\, \xi x} \;\; \big| \;\; \widehat{t}\,(\xi) \in \mathbb{C}, \, \xi \in \Lambda \Big\}$$

— пространство тригонометрических полиномов со спектром Λ. Для распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ пусть

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}, \quad S_\Lambda(f, x) = \sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \tag{1.3}$$

— ее ряд Фурье и сумма Фурье, соответствующая спектру Λ.

Проведем элементарные формальные преобразования действия ПДО T_a на $S_\Lambda(f)$ $\Big($ниже $\widehat{a}(\zeta, \xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}^m} a(x, \xi) e^{-2\pi i \zeta x} dx$ — коэффициент Фурье функции $a(x, \xi)$, $\zeta \in \mathbb{Z}^m\Big)$:

$$T_a S_\Lambda(f)(x) = \sum_{\xi \in \Lambda} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$$

$$= \sum_{\xi \in \Lambda} \Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \widehat{a}(\zeta, \xi) e^{2\pi i \zeta x} \Big) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} = \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \Big(\sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{a}(\zeta - \xi, \xi) \widehat{f}(\xi) \Big) e^{2\pi i \zeta x},$$

тогда

$$S_\Lambda(T_a S_\Lambda(f), x) = \sum_{\zeta \in \Lambda} \Big(\sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{a}(\zeta - \xi, \xi) \widehat{f}(\xi) \Big) e^{2\pi i \zeta x}.$$

Ясно, что при "построении" полинома $S_\Lambda(T_a S_\Lambda(f))$ используются оператор информации о функции f (набор функционалов) $\mathfrak{D}_\Lambda := \{\mathfrak{d}_\xi \mid \xi \in \Lambda\}$ и оператор информации о ПДО T_a (набор функционалов) $\mathfrak{G}_\Lambda := \{\mathfrak{g}_{\xi,\zeta} \mid \xi \in \Lambda, \zeta \in \Lambda - \xi\}$, причем $\#\mathfrak{D}_\Lambda = \#\Lambda$ и $\#\mathfrak{G}_\Lambda = (\#\Lambda)^2$.

Определим теперь метод Υ_Λ восстановления ПДО T_a, использующий операторы информации $\mathfrak{D}_\Lambda$ и $\mathfrak{G}_\Lambda$, по формуле (пока с произвольным конечным $\Lambda \subset \mathbb{Z}^m$)

$$\Upsilon_\Lambda(\mathfrak{D}_\Lambda(f), \mathfrak{G}_\Lambda(T_a))(x) := S_\Lambda(T_a S_\Lambda(f), x) = \sum_{\zeta \in \Lambda} \Big(\sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{a}(\zeta - \xi, \xi) \widehat{f}(\xi) \Big) e^{2\pi i \zeta x}. \tag{1.4}$$

Метод восстановления Υ_Λ использует $M := \#\Lambda + (\#\Lambda)^2$ "единиц информации": $(\#\Lambda)^2$ — об операторе, $\#\Lambda$ — о функции.

2. Классы символов и функциональные пространства

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, и вектор $\mathtt{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с

$$|\mathtt{m}| = m \ (\mathtt{m} = m, \ \text{ если } \ n = 1; \ \ \mathtt{m} = \mathtt{1} \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^m, \ \text{ если } \ n = m.)$$

Представим $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_n}$ в виде

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \ \text{ где } \ x^\nu = (x_{k_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{k_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu},$$

здесь $k_0 = 0, k_\nu = m_1 + \cdots + m_\nu$.

Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{T}^m$, $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n \big(\mathrm{z} \ne \varnothing, \ \mathrm{z} = \{\nu_1, \ldots, \nu_{\#\mathrm{z}}\}$, $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_{\#\mathrm{z}} \le n\big)$ используем обозначения

$$z_{\mathrm{z}} = (z_{\nu_1}, \ldots, z_{\nu_{\#\mathrm{z}}}) \in \mathbb{R}^{\#\mathrm{z}}, \quad x^{\mathrm{z}} = (x^{\nu_1}, \ldots, x^{\nu_{\#\mathrm{z}}}) \in \mathbb{T}^{\mathtt{m}_{\mathrm{z}}} := \mathbb{T}^{m_{\nu_1}} \times \cdots \times \mathbb{T}^{m_{\nu_{\#\mathrm{z}}}},$$

в частности, $z_{\mathrm{z}_n} = z$, $x^{\mathrm{z}_n} = x$, $\mathbb{T}^{\mathtt{m}_{\mathrm{z}_n}} = \mathbb{T}^m$, $x = (x^{\mathrm{z}}, x^{\dot{\mathrm{z}}})$, где $\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [0,1]^n$, $\mathrm{K} = (\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_n)$, $\mathrm{L} = (\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Тогда символ $a(x, \xi)$ принадлежит классу $\widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{\varrho\delta}[\mathrm{K}, \mathrm{L}] := S^{\tau\mathtt{m}}_{\varrho\delta}[\mathrm{K}, \mathrm{L}](\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, если конечна величина

$$\|a \,|\, \widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{\varrho\delta}[\mathrm{K}, \mathrm{L}]\| := \sup\Big\{|\Delta^\alpha_\xi \partial^\beta_x a(x,\xi)| \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \langle \xi^\nu \rangle^{\varrho_\nu |\alpha^\nu| - \delta_\nu |\beta^\nu| - \tau_\nu} \ | \\ (x, \xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m, \alpha, \, \beta \in \mathbb{N}_0^m \colon |\alpha^\nu| \le \mathrm{K}_\nu, |\beta^\nu| \le \mathrm{L}_\nu, \nu \in \mathrm{z}_n\Big\}. \tag{2.1}$$

З а м е ч а н и е 1. При $n = 1$ класс символов $\widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{\varrho\delta}[\mathrm{K}, \mathrm{L}]$ есть аналог для тора $\mathbb{T}^m$ известного класса $S^\tau_{\varrho\delta}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ Л. Хермандера, который играет важную роль в теории дифференциальных операторов с переменными коэффициентами; см., например, [1]. При $n = m \ge 2$ эти классы содержат символы тороидальных ПДО смешанного типа. В случае $1 < n < m$ такие ПДО естественным образом возникают в связи с функциональными пространствами "типа произведения" (см., например, [2–5; 6, Ch. II, § 5.20–5.23, Ch. III, § 5.27]).

Пусть $\ell_q = \ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ $(1 \le q \le \infty)$ — пространство числовых последовательностей $(a_\kappa) = (a_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой

$$\|(a_\kappa) \,|\, \ell_q\| = \bigg(\sum_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n} |a_\kappa|^q\bigg)^{1/q} \ (1 \le q < \infty), \quad \|(a_\kappa) \,|\, \ell_\infty\| = \sup(|a_\kappa| \colon \kappa \in \mathbb{N}_0^n);$$

$\ell_q(L_p)$ (соответственно $L_p(\ell_q)$) — пространство функциональных последовательностей

$$(g_\kappa(x)) = (g_\kappa(x))_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n}, \quad x \in \mathbb{T}^m,$$

с конечной нормой

$$\|(g_\kappa) \,|\, \ell_q(L_p)\| = \|(\|g_\kappa \,|\, L_p\|) \,|\, \ell_q\|$$

(соответственно $\|(g_\kappa) \,|\, L_p(\ell_q\| = \|\|(g_\kappa(\cdot)) \,|\, \ell_q\| \,|\, L_p\|)$.

Теперь определим ("$\mathtt{m}$-кратное") разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Сначала выберем функцию $\eta_0 := \eta_0^{(m)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ такую, что

$$0 \le \eta_0(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad \eta_0(\xi) = 1, \text{ если } \ |\xi|_\infty \le 1; \quad \eta_0(\xi) = 0, \ \text{ если } \ |\xi|_\infty \ge 3/2;$$

положим $\eta(\xi) := \eta_0(2^{-1}\xi) - \eta_0(\xi)$ и $\eta_j(\xi) := \eta_j^{(m)}(\xi) := \eta(2^{-j+1}\xi)$, $j \in \mathbb{N}$.

Тогда $H^{(m)} := \{\eta_j^{(m)}(\xi),\ j \in \mathbb{N}_0\}$ — гладкое разбиение единицы (по “коридорам”) на $\mathbb{R}^m$, а

$$H^{(\mathtt{m})} := \otimes_{\nu \in \mathrm{z}_n} H^{(m_\nu)} := \Big\{\eta_\kappa(\xi) := \eta_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi) := \prod_{\nu\in\mathrm{z}_n} \eta_{\kappa_\nu}^{(m_\nu)}(\xi^\nu),\ \kappa = (\kappa_1,\dots,\kappa_n) \in \mathbb{N}_0^n\Big\}$$

— (“$\mathtt{m}$-кратное”) разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$: $\sum_{j=0}^\infty \eta_j^{(m)}(\xi) \equiv \sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} \eta_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi) \equiv 1,\quad \xi \in \mathbb{R}^m$.

Введем операторы $\Delta_\kappa^\star := \Delta_\kappa^{\star\mathtt{m}}$ и $\Delta_\kappa^\eta := \Delta_\kappa^{\eta\,\mathtt{m}}$ на $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$:

$$\Delta_\kappa^\eta(f,x) = \mathcal{D}_\kappa^\eta * f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \eta_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x},\quad \mathcal{D}_\kappa^\eta(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \eta_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x} \in \mathrm{T}(\rho(\mathtt{m},\eta,\kappa)),$$

$$\Delta_\kappa^\star(f,x) = \mathcal{D}_{\rho(\mathtt{m},\kappa)} * f(x) = \sum_{\xi\in\rho(\mathtt{m},\kappa)} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x},\quad \mathcal{D}_{\rho(\mathtt{m},\kappa)}(x) = \sum_{\xi\in\rho(\mathtt{m},\kappa)} e^{2\pi i\,\xi x} \in \mathrm{T}(\rho(\mathtt{m},\kappa)).$$

Здесь $f*g$ — свертка распределения f и бесконечно гладкой функции g: $f*g(x) = f(g(x-\cdot\,))$ $\Big($если $f,\,g \in L_1(\mathbb{T}^m)$, то как обычно, $f*g(x) := \int_{\mathbb{T}^m} f(x-y)g(y)dy\Big)$,

$$\rho(\mathtt{m},\eta,\kappa) := \big\{\xi\in\mathbb{Z}^m \mid \lfloor 2^{\kappa_\nu-1}\rfloor \le |\xi^\nu|_\infty < 3\cdot 2^{\kappa_\nu-1},\ \nu\in\mathrm{z}_n\big\},$$
$$\rho(\mathtt{m},\kappa) := \big\{\xi\in\mathbb{Z}^m \mid \lfloor 2^{\kappa_\nu-1}\rfloor \le |\xi^\nu|_\infty < 2^{\kappa_\nu},\ \nu\in\mathrm{z}_n\big\}\quad (\kappa\in\mathbb{N}_0^n)$$

($\lfloor u\rfloor$ — целая часть числа $u\in\mathbb{R}$). Ясно, что

$$\rho(\mathtt{m},\kappa) \subset \rho(\mathtt{m},\eta,\kappa) \subset \cup_{\lambda\in\{0,1\}^n} \rho(\mathtt{m},\kappa+\lambda). \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $s = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < q \le \infty$.

1) Пространство типа Никольского — Бесова $B_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}} \equiv B_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}(\mathbb{T}^m)$ $(0<p\le\infty)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, для которых конечна (квази)норма

$$\|\, f \mid B_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}\,\| \;=\; \|(2^{s\kappa}\Delta_\kappa^\eta(f,x)) \mid \ell_q(L_p)\|.$$

2) Пространство типа Лизоркина — Трибеля $L_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}} \equiv L_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}(\mathbb{T}^m)$ $(0<p<\infty)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, для которых конечна (квази)норма

$$\|\, f \mid L_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}\,\| \;=\; \|(2^{s\kappa}\Delta_\kappa^\eta(f,x)) \mid L_p(\ell_q)\|.$$

Единичные шары $\mathrm{B}_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}} \equiv \mathrm{B}_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}(\mathbb{T}^m)$ и $\mathrm{L}_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}} \equiv \mathrm{L}_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}(\mathbb{T}^m)$ этих пространств будем называть классами типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Комментарии и библиография по пространствам $B_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}$ и $L_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}$ приведены в [7]. Здесь отметим лишь следующее. При $n = m$ (т. е. $\mathtt{m} = \mathtt{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{N}^m$) пространства $B_{p\,q}^{s\,\mathtt{1}}$ и $L_{p\,q}^{s\,\mathtt{1}}$ суть пространства смешанной гладкости. В частности, $MW_p^s := L_{p\,2}^{s\,\mathtt{1}}$ $(1<p<\infty)$ и $MH_p^s := B_{p\,\infty}^{s\,\mathtt{1}}$ $(1\le p\le\infty)$ — пространства функций с ограниченной в L_p доминирующей смешанной производной и разностью соответственно. При $n = 1$ (т. е. $\mathtt{m} = m$) $B_{p\,q}^s := B_{p\,q}^{s\,m}$ и $L_{p\,q}^s := L_{p\,q}^{s\,m}$ — изотропные пространства Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля соответственно. Оценки приближения тригонометрическими полиномами и всплесками, а также поперечников Фурье классов $\mathrm{B}_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}$ и $\mathrm{L}_{p\,q}^{s\,\mathtt{m}}$, использованные здесь при получении оценок погрешности восстановления тороидальных ПДО, установлены в [7; 8].

Из класса $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},\mathrm{L}] := \Psi^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},\mathrm{L}](\mathbb{T}^m\times\mathbb{Z}^m) := \widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{\mathtt{1},\mathtt{0}}[\mathrm{K},\mathrm{L}]$ $(\mathtt{1},\,\mathtt{0}\in\mathbb{R}^n)$ при помощи дополнительных условий гладкости выделим (под)класс $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}] := \Psi^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}](\mathbb{T}^m\times\mathbb{Z}^m)$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon = (\upsilon_1,\dots,\upsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $1\le\theta\le\infty$, $\epsilon = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_n) \in [0,1]^n$, $\mathrm{K} = (\mathrm{K}_1,\dots,\mathrm{K}_n)$, $\mathrm{L} = (\mathrm{L}_1,\dots,\mathrm{L}_n) \in \mathbb{N}^n$. Тогда символ $a(x,\xi)$ из $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},\mathrm{L}]$ принадлежит классу $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}] := \Psi^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}](\mathbb{T}^m\times\mathbb{Z}^m)$, если конечна величина

$$\|a \mid \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]\| := \sup\Big\{\|\Delta_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\xi) \mid B_{\infty\,\theta}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\mathtt{m}_{\mathrm{z}}}\| \prod_{\nu\in\mathrm{z}} \langle\xi^\nu\rangle^{|\alpha^\nu|-\tau_\nu-\upsilon_\nu\epsilon_\nu} \times \prod_{\nu\in\dot{\mathrm{z}}} \langle\xi^\nu\rangle^{|\alpha^\nu|-\tau_\nu} \;\Big|$$
$$\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m : |\alpha^\nu| \le \mathrm{K}_\nu, |\beta^\nu| \le \mathrm{L}_\nu (\nu\in\mathrm{z}_n),\ (x^{\dot{\mathrm{z}}},\xi) \in \mathbb{T}^{\mathtt{m}_{\mathrm{z}}}\times\mathbb{Z}^m,\ \mathrm{z}\subset\mathrm{z}_n (\mathrm{z}\ne\varnothing)\Big\}.$$

(Здесь норма пространства $B_{\infty\,\theta}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\mathtt{m}_{\mathrm{z}}}(\mathbb{T}^{\mathtt{m}_{\mathrm{z}}})$ вычисляется по “переменной” x^{z}, $\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}$.)

3. Оценки сверху погрешности восстановления

Прежде всего определим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$\varsigma_\nu = \frac{s_\nu}{m_\nu} - \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\Big)_+, \quad \nu \in \mathrm{z}_n, \quad \varsigma := \min\{\varsigma_\nu : \nu \in \mathrm{z}_n\}, \quad \omega = \#\{\nu \in \mathrm{z}_n : \varsigma_\nu = \varsigma\}.$$

(Здесь $u_+ = \max\{u, 0\}$ для $u \in \mathbb{R}$.) Не ограничивая общности, считаем, что $\varsigma = \varsigma_1 = \ldots = \varsigma_\omega < \varsigma_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_\omega$. Выберем числа ς'_ν, $\nu \in \mathrm{z}_n$, из условий $\varsigma = \varsigma'_1 = \ldots = \varsigma'_\omega$, $\varsigma < \varsigma'_\nu < \varsigma_\nu$ при $\nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_\omega$. Наконец, положим $\gamma_\nu = \varsigma'_\nu m_\nu / \varsigma$, $\nu \in \mathrm{z}_n$.

По γ и $u \in \mathbb{R}_+$ определим спектры $\Lambda^\gamma_u \subset \mathbb{Z}^m$, $\Lambda^{\gamma,\eta}_u \subset \mathbb{Z}^m$, полагая

$$\Lambda^\gamma_u := \cup_{\kappa \in \mathbb{N}^n_0 :\, \gamma\kappa \le u} \rho(\mathtt{m}, \kappa), \quad \Lambda^{\gamma,\eta}_u := \cup_{\kappa \in \mathbb{N}^n_0 :\, \gamma\kappa \le u} \rho(\mathtt{m}, \eta, \kappa),$$

ввиду (2.2) верны включения ($u(\gamma) := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$)

$$\Lambda^\gamma_u \subset \Lambda^{\gamma,\eta}_u \subset \Lambda^\gamma_{u+u(\gamma)}. \tag{3.1}$$

Будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если найдется такая константа $C = C(F, H) > 0$, что верно неравенство $F(u) \le CH(u)$ для $u \ge u_0 > 0$; $F(u) \asymp H(u)$, если одновременно $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$.

Легко видеть, что верна оценка $\#\Lambda^\gamma_u \asymp 2^u u^{\omega-1}$ (следует применить лемму 5.1 из [7]; ее доказательство приведено в [8] (там это лемма A)).

Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует единственное $u_N \in \mathbb{R}_+$ такое, что $N = 2^{u_N} u_N^{\omega-1}$; обозначим $\Lambda(\gamma, N) := \Lambda^\gamma_{u_N}$. Следовательно, $\#\Lambda(\gamma, N) \asymp N$, $\#\Lambda(\gamma, N) + (\#\Lambda(\gamma, N))^2 \asymp N^2$.

Следующая теорема содержит оценки сверху для погрешности (1.1) метода $\Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}$ восстановления (это метод (1.4) с $\Lambda = \Lambda(\gamma, N)$) ПДО T_a вида (1.2) по операторам $\mathfrak{D}_{\Lambda(\gamma,N)}$ информации о функциях $f \in \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}$ ($\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$) и $\mathfrak{G}_{\Lambda(\gamma,N)}$ информации о символах $a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ в пространстве $L_r = L_r(\mathbb{T}^m)$.

Теорема 1. *Пусть* $s, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $\tau \in \mathbb{R}^n$: $\tau_\nu \le 0$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$, $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $1 < r < \infty$, $\epsilon \in [0, 1]^n$ *такие, что* $\varsigma > 0$ *и для любого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих условий*:

(i) $s_\nu - \tau_\nu < \upsilon_\nu$;

(ii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu < 1$ *и* $\theta \le q$;

(iii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu = \theta = q = 1$.

Далее, пусть

$$a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}], \quad \mathrm{K} = \Big(\mathit{f}\Big\lfloor\frac{m_1}{2}\Big\rfloor + \mathsf{f} + 4, \dots, \mathit{f}\Big\lfloor\frac{m_n}{2}\Big\rfloor + \mathsf{f} + 4\Big), \quad \mathrm{L} = \Big(\Big\lfloor\frac{m_1}{r}\Big\rfloor, \dots, \Big\lfloor\frac{m_n}{r}\Big\rfloor\Big),$$

$$(\mathrm{F}, \mathsf{f}, \mathit{f}) \in \{(\mathrm{B}, \mathsf{b}, \mathfrak{b}),\ (\mathrm{L}, \mathsf{l}, \mathfrak{l})\}, \quad \mathsf{b} = 3, \quad \mathsf{l} = 5.$$

Тогда верна оценка[2]

$$\mathfrak{R}\big(T_a, \mathrm{F}^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}, \mathfrak{D}_{\Lambda(\gamma,N)}, \mathfrak{G}_{\Lambda(\gamma,N)}, \Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}, L_r\big) \ll_a \Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^\varsigma (\log^{\omega-1} N)^{\mathit{f}(p,q,r)}, \tag{3.2}$$

где $\mathfrak{b}(p,q,r) = \Big(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{q}\Big)_+$, $\mathfrak{l}(p,q,r) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)_+$ *при* $r \le p$ *и* $\mathfrak{b}(p,q,r) = \Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\Big)_+$, $\mathfrak{l}(p,q,r) = 0$ *при* $p < r$ (*здесь* $p_* = \min\{p, 2\}$).

З а м е ч а н и е 3. Вопрос о точности (в смысле порядка) полученных в теореме 1 оценок погрешности (3.2) будет изучен во второй части работы. Там же будет исследована оптимальность в том или ином смысле (по крайней мере по порядку при $N \to +\infty$) предложенного метода восстановления и дано сравнение с известными методами.

[2]Здесь обозначение $\ll_a$ подчеркивает, что константа в определении $\ll$ зависит от a.

4. Ограниченность ПДО между пространствами гладких функций и распределений

Определим числа $\sigma_p := \max\Big\{1, \dfrac{1}{p}\Big\}$, $\sigma_{pq} := \max\Big\{1, \dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q}\Big\}$ $(0 < p,\, q \le \infty)$, далее положим $\tilde\sigma_{pq} := \sigma_{pq} - \dfrac{1}{2}$, $\tilde\sigma_{p\infty} := \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}$ $(0 < p,\, q < \infty)$.

Ключевым ингредиентом доказательства теоремы 1 является ограниченность из пространства $F^{s\mathtt{m}}_{pq}$ в пространство $F^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$ тороидальных ПДО T_a с символами из класса $\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$ (здесь $F \in \{B, L\}$).

Теорема 2. *Пусть* $s, \tau \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < p, q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\epsilon \in [0,1]^n$. *Далее, пусть* $a \in \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]$, $\mathrm{L} = \mathtt{0} \in \mathbb{R}^n$.

I. *Пусть* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mathtt{m}, p)$: $\mathrm{K}_\nu = 2\Big\lfloor \dfrac{m_\nu}{2} \Big\rfloor + 6 + \Big\lfloor m_\nu\Big(\sigma_p - \dfrac{1}{2}\Big)\Big\rfloor$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$. ПДО T_a *вида* (1.2) *является ограниченным оператором из* $B^{s\mathtt{m}}_{pq}$ *в* $B^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$, *если для каждого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих условий*:

(i) $\upsilon_\nu(\epsilon_\nu - 1) + m_\nu(\sigma_p - 1) < s_\nu - \tau_\nu < \upsilon_\nu$;

(ii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu < 1$, $\Big(1 + \Big(2 - \epsilon_\nu\Big)\dfrac{\upsilon_\nu}{m_\nu}\Big)^{-1} < p$ *и* $\theta \le q$;

(iii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu = \theta = q = 1$ *и* $1 \le p$.

II. *Пусть* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mathtt{m}, p, q)$: $\mathrm{K}_\nu = 2\Big\lfloor \dfrac{m_\nu}{2} \Big\rfloor + 6 + \lfloor m_\nu \tilde\sigma_{pq} \rfloor$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$. ПДО T_a *вида* (1.2) *является ограниченным оператором из* $L^{s\mathtt{m}}_{pq}$ *в* $L^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$ *(при* $p < \infty$*), если для каждого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих условий*:

(i) $\upsilon_\nu(\epsilon_\nu - 1) + m_\nu(\sigma_{pq} - 1) < s_\nu - \tau_\nu < \upsilon_\nu$;

(ii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu < 1$, $\Big(1 + (2 - \epsilon_\nu)\dfrac{\upsilon_\nu}{m_\nu}\Big)^{-1} < p$ *и* $\theta \le q$;

(iii) $s_\nu - \tau_\nu = \upsilon_\nu$, $\epsilon_\nu = \theta = q = 1$ *и* $\Big(1 + \dfrac{\upsilon_\nu}{m_\nu}\Big)^{-1} < p$.

З а м е ч а н и е 4. 1) Теорема 2 является аналогом для тора $\mathbb{T}^m$ основной теоремы работы [4]. Идея доказательства теоремы 2 восходит к Р. Койфману и И. Мейеру [9], применялась, в частности, М. Ямазаки [4] при доказательстве упомянутой теоремы (в случае евклидова пространства $\mathbb{R}^m$) и состоит в представлении символа в виде ряда элементарных символов, доказательстве ограниченности ПДО с элементарными символами с сопутствующими оценками и последующем "собирании" этих оценок для получения ограниченности исходного оператора. Кроме того, в доказательстве теоремы 2 применяется техника, развитая автором в статье 2016 г.[3] и использованная, в частности, при доказательстве теоремы 1 указанной статьи.

2) В связи с теоремой 2 отметим, что вопросы ограниченности тороидальных ПДО T_a с символами из классов $S^{\tau m}_{\varrho\delta}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ (см. определение 1 с $n = 1$ ($\Rightarrow \mathtt{m} = m$) и дифференциальными неравенствами (2.1), выполненными для всех мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m_0$) и их вариантов конечной гладкости, привлекли в последнее десятилетие большое внимание. Подробную историю вопроса и достаточно полную библиографию см. в работе [10], где, в частности, анонсированы аналоги для тора $\mathbb{T}^m$ известных теорем Хёрмандера—Хони (об ограниченности ПДО с символами из классов Хёрмандера на $L_2(\mathbb{R}^m)$) и Хёрмандера—Феффермана—Алварез—Хони (об ограниченности таких ПДО из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_r(\mathbb{R}^m)$ при $1 < p \le r < \infty$). Из теоремы 2 работы [10] следует, что (в обозначениях настоящей работы) если $u \le 0$, то ПДО T_a вида (1.2) с символом $a \in \widetilde{S}^{um}_{1,0}\Big[m + 1, \Big\lfloor \dfrac{m}{r} \Big\rfloor\Big]$ ограничен на $L_r(\mathbb{T}^m)$ при $1 < r < \infty$. Отсюда нетрудно получить ограниченность на $L_r(\mathbb{T}^m)$ ПДО T_a вида (1.2) с символом $a \in \widetilde{S}^{\tau\mathtt{m}}_{1,\mathtt{0}}[\mathrm{K}, \mathrm{L}]$, $\mathrm{K} = \mathtt{m} + \mathtt{1}$, $\mathrm{L} = \Big(\Big\lfloor \dfrac{m_1}{r} \Big\rfloor, \ldots, \Big\lfloor \dfrac{m_n}{r} \Big\rfloor\Big)$ при $1 < r < \infty$, если $\tau \in \mathbb{R}^n$: $\tau_\nu \le 0$, $\nu \in \mathrm{z}_n$.

[3] См. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2016, т. 22, № 4, с. 64–80.

5. Доказательство теоремы 1

Нам понадобится теорема Литлвуда—Пэли (подробный комментарий по ней см. [8]).

Теорема 3. *Пусть* $1 < r < \infty$. *Тогда существуют постоянные* $0 < c_{r,\mathtt{m}} < C_{r,\mathtt{m}}$ *такие, что для всех* $f \in L_r(\mathbb{T}^m)$

$$c_{r,\mathtt{m}}\|f \,|\, L_r\| \le \|(\Delta^\star_\kappa(f)) \,|\, L_r(\ell_2)\| \le C_{r,\mathtt{m}}\|f \,|\, L_r\|.$$

Для произвольного конечного $\Xi \subset \mathbb{N}_0^n$ обозначим $\Lambda[\Xi] := \cup_{\kappa\in\Xi}\rho(\mathtt{m},\kappa)$. Из теоремы 3 вытекают два простых следствия:

1) операторы сумм Фурье $S_{\Lambda[\Xi]} : L_r \to L_r$ (см. (1.3)) ограничены равномерно по Ξ:

$$\|S_{\Lambda[\Xi]} \,|\, L_r \to L_r\| \le C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}}\,; \tag{5.1}$$

2) для любой функции $f \in L_r$ верно неравенство

$$\|f - S_{\Lambda[\Xi]}(f) \,|\, L_r\| \le (1 + C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}}) \min\{\|f - t \,|\, L_r\| \mid t \in \mathrm{T}(\Lambda[\Xi])\}. \tag{5.2}$$

В силу п. 2) замечания 4 оператор $T_a \colon L_r \to L_r$ ограничен в условиях теоремы 1. Отсюда и из (5.1), (5.2) (принимая во внимание (3.1)) для любой функции $f \in L_r$ получаем

$$\begin{aligned}
\|T_af - \Upsilon_{\Lambda(\gamma,N)}(\mathfrak{D}_{\Lambda(\gamma,N)}(f), \mathfrak{G}_{\Lambda(\gamma,N)}(T_a)) \,|\, L_r\| &= \|T_af - S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_aS_{\Lambda(\gamma,N)}(f)) \,|\, L_r\| \\
&\le \|T_af - S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_af) \,|\, L_r\| + \|S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_a(f - S_{\Lambda(\gamma,N)}(f))) \,|\, L_r\| \\
&\le \|T_af - S_{\Lambda(\gamma,N)}(T_af) \,|\, L_r\| + (C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}})\|T_a \,|\, L_r \to L_r\|\|f - S_{\Lambda(\gamma,N)}(f) \,|\, L_r\| \\
&\le (1+C_{r,\mathtt{m}}/c_{r,\mathtt{m}})^2\Big(\Big\|T_af - \sum_{\kappa\gamma\le u_N-u(\gamma)}\Delta^\eta_\kappa(T_af) \,|\, L_r\Big\| + \|T_a \,|\, L_r \to L_r\|\Big\|f - \sum_{\kappa\gamma\le u_N-u(\gamma)}\Delta^\eta_\kappa(f) \,|\, L_r\Big\|\Big).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

По теореме 4.1 (см. еще замечание 4.1) работы [7] справедлива оценка (надо еще учесть определение u_N)

$$\sup\Big\{\Big\|f - \sum_{\kappa\gamma\le u_N-u(\gamma)}\Delta^\eta_\kappa(f) \,|\, L_r\Big\| \,\Big|\, f \in \mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}\Big\} \asymp \Big(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\Big)^\varsigma(\log^{\omega-1}N)^{\mathtt{f}(p,q,r)}. \tag{5.4}$$

Далее по теореме 2 оператор $T_a : F^{s\mathtt{m}}_{pq} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$ ограничен (в условиях теоремы 1). Поэтому для любой $f \in \mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}$ ее образ $g := T_af$ принадлежит $\|T_a \,|\, F^{s\mathtt{m}}_{pq} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\|\mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$, т. е. шару радиуса $\|T_a \,|\, F^{s\mathtt{m}}_{pq} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\|$ пространства $F^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$. (Здесь и ниже $(\mathrm{F}, F) \in \{(\mathrm{B}, B), (\mathrm{L}, L)\}$.) Поэтому

$$\begin{aligned}
&\sup\Big\{\Big\|T_af - \sum_{\kappa\gamma\le u_N-u(\gamma)}\Delta^\eta_\kappa(T_af) \,|\, L_r\Big\| \,\Big|\, f \in \mathrm{F}^{s\mathtt{m}}_{pq}\Big\} \\
&\le \|T_a \,|\, F^{s\mathtt{m}}_{pq} \to F^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\| \sup\Big\{\Big\|g - \sum_{\kappa\gamma\le u_N-u(\gamma)}\Delta^\eta_\kappa(g) \,|\, L_r\Big\| \,\Big|\, g \in \mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\Big\}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Положим $\bar\varsigma_\nu = \dfrac{s_\nu - \tau_\nu}{m_\nu} - \Big(\dfrac1p - \dfrac1r\Big)_+$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, $\bar\varsigma := \min\{\bar\varsigma_\nu : \nu \in \mathrm{z}_n\}$, $\varpi = \#\{\nu \in \mathrm{z}_n : \bar\varsigma_\nu = \bar\varsigma\}$.

Если $\mathrm{z}_{\omega 0}(\tau) := \{\nu \in \mathrm{z}_\omega \colon \tau_\nu = 0\} \ne \varnothing$, то $1 \le \varpi \le \omega$, $\bar\varsigma = \varsigma = \varsigma'_\nu = \bar\varsigma_\nu$, если $\nu \in \mathrm{z}_{\omega 0}(\tau)$, и $\bar\varsigma = \varsigma \le \varsigma'_\nu < \bar\varsigma_\nu$, если $\nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_{\omega 0}(\tau)$, и снова по теореме 4.1 и замечанию 4.1 из [7] верна оценка

$$\sup\Big\{\Big\|g - \sum_{\kappa\gamma\le u_N-u(\gamma)}\Delta^\eta_\kappa(g) \,|\, L_r\Big\| \,\Big|\, g \in \mathrm{F}^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\Big\} \asymp \Big(\frac{\log^{\varpi-1}N}{N}\Big)^\varsigma(\log^{\varpi-1}N)^{\mathtt{f}(p,q,r)}. \tag{5.6}$$

Если же $\mathrm{z}_{\omega 0}(\tau) = \varnothing$, то $\bar{\varsigma} > \varsigma$, и аналогичные рассуждения дают (в худшем случае)

$$\sup\Big\{\Big\|g - \sum_{\kappa\gamma \le u_N - u(\gamma)} \Delta_\kappa^\eta(g) \,\big|\, L_r\Big\| \,\Big|\, g \in \mathrm{F}_{pq}^{s-\tau\mathtt{m}}\Big\}$$

$$\ll \Big(\frac{\log^{n-1} N}{N}\Big)^{\bar{\varsigma}} (\log^{n-1} N)^{\mathtt{f}(p,q,r)} = \bar{o}\Big(\Big(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\Big)^{\varsigma} (\log^{\omega-1} N)^{\mathtt{f}(p,q,r)}\Big). \tag{5.7}$$

Теперь требуемая оценка погрешности (3.2) вытекает из полученных соотношений (5.3)–(5.7). Теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2

6.1. Предварительные сведения

Для непустого конечного множества $\Lambda \in \mathbb{Z}^m$ пусть

$$d(\Lambda) = \max\{|\xi - \zeta|_\infty : \xi, \zeta \in \Lambda\}, \quad \bar{d}(\Lambda) = \max(1, d(\Lambda)).$$

Для $\rho(m,\eta,j) := \{\xi \in \mathbb{Z}^m : \lfloor 2^{j-1} \rfloor \le |\xi|_\infty < 3 \cdot 2^{j-1}\}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ простые вычисления дают

$$\bar{d}(\rho(m,\eta,0)) = 2, \quad \bar{d}(\rho(m,\eta,j)) = 3 \cdot 2^j \ \text{ при } \ j \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Положим $\Lambda(\mathtt{m},\mathtt{e},\mathrm{M}) := \{\xi \in \mathbb{Z}^m \,|\, |\xi^\nu|_\infty \le \mathtt{e}_\nu \mathrm{M}_\nu, \nu \in \mathrm{z}_n\}$, где $\mathtt{e} \in \mathbb{N}^n$ и $\mathrm{M} \in \mathbb{N}_0^n$. Ясно, что $\Lambda(\mathtt{m},\mathtt{e},\mathrm{M}) = \Lambda(m_1,\mathtt{e}_1,\mathrm{M}_1) \times \ldots \times \Lambda(m_n,\mathtt{e}_n,\mathrm{M}_n)$, где $\Lambda(m_\nu,\mathtt{e}_\nu,\mathrm{M}_\nu) := \{\xi^\nu \in \mathbb{Z}^{m_\nu} \,|\, |\xi^\nu|_\infty \le \mathtt{e}_\nu \mathrm{M}_\nu\}$, а также $\bar{d}(\Lambda(m_\nu,\mathtt{e}_\nu,\mathrm{M}_\nu)) = 2\mathtt{e}_\nu \mathrm{M}_\nu$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$.

Пространство бесселевых потенциалов $H^u(\mathbb{R}^m)$ $(u \in \mathbb{R})$ определяется следующим образом:

$$H^u(\mathbb{R}^m) := \big\{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) : \|g \,|\, H^u\| := \|\mathcal{F}(g)(\xi)\langle\xi\rangle^u \,|\, L_2(\mathbb{R}^m)\| < \infty\big\}.$$

Предложение 1. I. *Пусть* $0 < p \le \infty$,

$$\mathtt{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}_+^n : u_\nu > m_\nu\Big(\sigma_p - \frac{1}{2}\Big) \quad (\nu \in \mathrm{z}_n).$$

Существует постоянная $C = C(\mathtt{m},p,\mathtt{u}) > 0$ *такая, что для любого конечного множества* $\Lambda^{(\mathtt{m})} \subset \mathbb{Z}^m$ *вида* $\Lambda^{(\mathtt{m})} = \Lambda^{(m_1)} \times \cdots \times \Lambda^{(m_n)} \ne \varnothing$, *где* $\Lambda^{(m_\nu)} \subset \mathbb{Z}^{m_\nu}$, *неравенство*

$$\Big\|\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} m(\xi)\widehat{t}(\xi)e^{2\pi i\xi x} \,\big|\, L_p\Big\| \le C \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \big\|\, \mathrm{m}^\nu(\bar{d}(\Lambda^{(m_\nu)})\,\cdot) \,\big|\, H^{u_\nu}\big\| \, \|t \,|\, L_p\|$$

верно для всех функций $\mathrm{m}(x) = \mathrm{m}^1(x^1)\times\cdots\times \mathrm{m}^n(x^n)$ *с* $\mathrm{m}^\nu \in H^{u_\nu}(\mathbb{R}^{m_\nu})$ *и полиномов* $t \in T(\Lambda^{(\mathtt{m})})$.

II. *Пусть* $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$,

$$\mathtt{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}_+^n : u_\nu > m_\nu \tilde{\sigma}_{pq} \quad (\nu \in \mathrm{z}_n).$$

Существует постоянная $C = C(\mathtt{m},p,q,\mathtt{u}) > 0$ *такая, что для любой совокупности* $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_\kappa^{(\mathtt{m})})_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n}$ *конечных множеств* $\Lambda_\kappa^{(\mathtt{m})} \subset \mathbb{Z}^m$ *вида* $\Lambda_\kappa^{(\mathtt{m})} = \Lambda_\kappa^{(m_1)} \times\cdots\times \Lambda_\kappa^{(m_n)} \ne \varnothing$, *где* $\Lambda_\kappa^{(m_\nu)} \subset \mathbb{Z}^{m_\nu}$, *неравенство*

$$\Big\|\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} m_\kappa(\xi)\widehat{t}_\kappa(\xi)e^{2\pi i\xi x} \,\big|\, L_p(\ell_q)\Big\| \le C \sup_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n} \Big\{\prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \big\|\, \mathrm{m}_{\kappa_\nu}^\nu(\bar{d}(\Lambda_\kappa^\nu)\,\cdot) \,\big|\, H^{u_\nu}\big\|\Big\} \|(t_\kappa) \,|\, L_p(\ell_q)\|$$

верно для всех последовательностей (m_κ) *функций вида* $\mathrm{m}_\kappa(x) = \mathrm{m}_{\kappa_1}^1(x^1)\cdots \mathrm{m}_{\kappa_n}^n(x^n)$ *с* $\mathrm{m}_{\kappa_\nu}^\nu \in H^{u_\nu}(\mathbb{R}^{m_\nu})$ *и последовательностей* (t_κ) *полиномов* $t_\kappa \in T(\Lambda_\kappa^{(\mathtt{m})})$.

Доказательство. Это предложение при $1 = n \le m$, а также его непериодический аналог для $\mathbb{R}^m$ при $1 = n \le m$ и $n = k = 2$, доказаны в [11, §1.5.2, 1.6.3, 2.4.9; 12, §3.3.4, 3.4.1, 3.6.4, 1.8.3, 1.10.3]. Комбинируя рассуждения, использованные там, нетрудно получить его доказательство в общем случае. □

6.2. Подготовительные конструкции

Нам понадобятся

A) Системы пробных функций $\Psi^{(\mathtt{m})}$, $\Phi^{(\mathtt{m})}$, $X_\star^{(\mathtt{m})}$ и $\Phi^{(\mathtt{m})}$.

1) Выберем функции $\psi_0 := \psi_0^{(m)}$, $\psi_1 := \psi_1^{(m)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ такие, что

$$\psi_0(\xi) = 1 \text{ при } |\xi|_\infty \le 3/2, \quad \operatorname{supp}(\psi_0) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi|_\infty \le 2\},$$

$$\psi_1(\xi) = 1 \text{ при } 1 \le |\xi|_\infty \le 3, \quad \operatorname{supp}(\psi_1) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^m : 1/2 \le |\xi|_\infty \le 4\}.$$

Положим $\psi_j(\xi) := \psi_j^{(m)}(\xi) := \psi_1(2^{1-j}\xi)$, $j \in \mathbb{N}$, $\Psi := \Psi^{(m)} := \{\psi_j : j \in \mathbb{N}_0\}$,

$$\Psi^{(\mathtt{m})} := \otimes_{\nu \in \mathrm{z}_n} \Psi^{(m_\nu)} := \Big\{\psi_\kappa(\xi) := \psi_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi) := \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \psi_{\kappa_\nu}^{(m_\nu)}(\xi^\nu) : \kappa \in \mathbb{N}_0^n\Big\},$$

при этом ясно, что $\eta_j^{(m)}(\xi)\psi_j^{(m)}(\xi) \equiv \eta_j^{(m)}(\xi)$, $\eta_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi)\psi_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi) \equiv \eta_\kappa^{(\mathtt{m})}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, для всех $j \in \mathbb{N}_0$ и $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$, где $\eta_j^{(m)} \in H^{(m)}$, $\eta_\kappa^{(\mathtt{m})} \in H^{(\mathtt{m})}$.

2) Выберем систему функций $\Phi := \Phi^{(m)} := \{\phi_\alpha := \phi_\alpha^{(m)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^m\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющую следующим условиям:

(i) $\operatorname{supp} \widehat{\phi_{\mathtt{0}}} \subseteq (-1,1)^m$, здесь $\mathtt{0} \in \mathbb{R}^m$;

(ii) $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\phi_{\mathtt{0}}}(\zeta + \xi) \equiv 1$, $\zeta \in \mathbb{R}^m$;

(iii) $\phi_{\mathtt{0}}(\xi) = \delta_{\mathtt{0}\,\xi}$, $\xi \in \mathbb{Z}^m$ ($\delta_{\xi\,\zeta}$ — символ Кронекера, $\xi, \zeta \in \mathbb{Z}^m$);

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}^m$ имеем $\partial^\alpha \phi_{\mathtt{0}}(\xi) = \overline{\Delta}^\alpha \phi_\alpha(\xi)$.

Существование таких пробных функций ϕ_α нетрудно доказать, отправляясь от одномерного случая (см., например, [13, Lemma 4.5.1]). Положим

$$\Phi^{(\mathtt{m})} := \Big\{\phi_\alpha^{(\mathtt{m})}(\xi) := \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \phi_{\alpha^\nu}^{(m_\nu)}(\xi^\nu) : \alpha \in \mathbb{N}_0^m\Big\}.$$

3) По разбиению единицы $H^{(m)}$ определим последовательности функций (для удобства здесь и далее считаем $\eta_j^{(m)}(\xi) \equiv 0$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, при $j < 0$):

$$\chi_{j1}^{(m)}(\xi) := \sum_{i \le -2} \eta_{j+i}^{(m)}(\xi),\ \chi_{j2}^{(m)}(\xi) := \sum_{-1 \le i \le 1} \eta_{j+i}^{(m)}(\xi), \quad \chi_{j3}^{(m)}(\xi) := \sum_{i \ge 2} \eta_{j+i}^{(m)}(\xi)\ (j \in \mathbb{N}_0),$$

$$\varphi_{0\zeta}^{(m)}(\xi) := \eta_0^{(m)}(\xi) \cdot e^{\frac{\pi i}{2}\zeta\xi}, \quad \varphi_{1\zeta}^{(m)}(\xi) := \eta_1^{(m)}(\xi) \cdot e^{\frac{\pi i}{4}\zeta\xi}, \quad \varphi_{j\zeta}^{(m)}(\xi) := \varphi_{1\zeta}^{(m)}(2^{1-j}\xi),\ j \in \mathbb{N}\ (\zeta \in \mathbb{Z}^m).$$

Ясно, что

$$\chi_{j1}^{(m)}(\xi) + \chi_{j2}^{(m)}(\xi) + \chi_{j3}^{(m)}(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad \chi_{j1}^{(m)}(\xi) = \eta_0^{(m)}(2^{2-j}\xi), \quad \chi_{j3}^{(m)}(\xi) = 1 - \eta_0^{(m)}(2^{-1-j}\xi).$$

Далее, положим ($\kappa \in \mathbb{N}_0^n$, $\iota \in \mathrm{z}_3^n := \{1,2,3\}^n$, $\zeta \in \mathbb{Z}^m$)

$$X^{(\mathtt{m})} := \Big\{\chi_{\kappa\iota}(\xi) := \chi_{\kappa\iota}^{(\mathtt{m})}(\xi) := \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \chi_{\kappa_\nu \iota_\nu}^{(m_\nu)}(\xi^\nu)\Big\}, \quad \Phi_\star^{(\mathtt{m})} := \Big\{\varphi_{\kappa\zeta}(\xi) := \varphi_{\kappa\zeta}^{(\mathtt{m})}(\xi) := \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \varphi_{\kappa_\nu \zeta^\nu}^{(m_\nu)}(\xi^\nu)\Big\}.$$

B) П р и м е р. Пусть $\mathtt{K}(m) = 2\Big\lfloor \dfrac{m}{2} \Big\rfloor + 2$. Легко видеть, что функция

$$h^{(m)}(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \langle x - \xi \rangle^{-\mathtt{K}(m)}$$

непрерывна на $\mathbb{T}^m$, поэтому $\|h^{(m)}|C(\mathbb{T}^m)\| := \max\{|h^{(m)}(x)| : x \in \mathbb{T}^m\} < \infty$.

C) Формула Лейбница для оператора конечной разности и формула суммирования по частям: для функций g, $h:\mathbb{Z}^m\to\mathbb{C}$ и мультииндекса $\alpha\in\mathbb{N}_0^m$ имеем

$$\Delta^\alpha(g(\xi)\,h(\xi))\equiv\Delta^\alpha_\xi(g(\xi)\,h(\xi))=\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^m:\,\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot\Delta^\beta g(\xi)\cdot\overline{\Delta}^{\alpha-\beta}h(\xi+\beta),\tag{6.2}$$

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}g(\xi)\cdot\Delta^\alpha h(\xi)=(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\overline{\Delta}^\alpha g(\xi)\cdot h(\xi).\tag{6.3}$$

D) Элементарное неравенство (Петре): пусть $u\in\mathbb{R}$, тогда для любых $\xi,\zeta\in\mathbb{R}^m$

$$\langle\xi+\zeta\rangle^u\le 2^{|u|}\langle\xi\rangle^u\langle\zeta\rangle^{|u|}.\tag{6.4}$$

E) Простое равенство $(1-\Delta_{(m)\xi})^l e^{-2\pi i\zeta\xi}=\langle\zeta\rangle^{2l}e^{-2\pi i\zeta\xi}$, где $\Delta_{(m)}:=\dfrac{1}{4\pi^2}(\partial_1^2+\ldots+\partial_m^2)$ $(\Delta_{(m)\xi})$ — m-мерный оператор Лапласа (действующий по переменной ξ), $l\in\mathbb{N}$.

F) Неравенство: $\forall g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $\forall N\in\mathbb{R}_+$ $\exists C(g,N)>0$: $|g(\xi)|\le C(g,N)\langle\xi\rangle^{-N}$.

6.3. Технические леммы

Лемма 1. I. *Пусть* $1\le q<\infty$, $a_{ij}\ge 0$ $(i,j\in\mathbb{N}_0: i\ge j)$, *тогда*

$$\Big(\sum_{i=0}^\infty\Big(\sum_{j=0}^i a_{ij}\Big)^q\Big)^{1/q}\le\sum_{j=0}^\infty\Big(\sum_{i=j}^\infty a_{ij}^q\Big)^{1/q},\quad \sup_{i\ge0}\sum_{j=0}^i a_{ij}\le\sum_{j=0}^\infty\sup_{i\ge j}a_{ij}.\tag{6.5}$$

II. *Пусть* $0<q<\infty$, $u>0$, $a_j\ge 0$ $(j\in\mathbb{N}_0)$, *тогда*

$$\Big(\sum_{i=0}^\infty\Big(2^{-iu}\sum_{j=0}^i a_j\Big)^q\Big)^{1/q}\le C_{qu}\Big(\sum_{j=0}^\infty\Big(2^{-ju}a_j\Big)^q\Big)^{1/q},\tag{6.6}$$

$$\sup_{i\ge0}2^{-iu}\sum_{j=0}^i a_j\le C_u\sup_{j\ge0}a_j,\tag{6.7}$$

где постоянная C_{qu} $(C_u=:C_{\infty u})$ *зависит только от* q *и* u (u).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства (6.5) — простые следствия неравенства треугольника для $\|\cdot\,|\,\ell_q(\mathbb{N}_0)\|$ $(1\le q\le\infty)$. Доказательство (6.6) при $q\ge1$, см., например, в [14, разд. 5.6, формула (19)]. Пусть $q<1$, последовательно применяя неравенство Йенсена $(\|\cdot\,|\,\ell_1(\mathbb{N}_0)\|\le\|\cdot\,|\,\ell_q(\mathbb{N}_0)\|)$, меняя порядок суммирования и вычисляя сумму "хвоста" геометрической прогрессии, получаем

$$\sum_{i=0}^\infty\Big(2^{-iu}\sum_{j=0}^i a_j\Big)^q\le\sum_{i=0}^\infty 2^{-iuq}\sum_{j=0}^i a_j^q=\sum_{j=0}^\infty 2^{-juq}a_j^q2^{juq}\sum_{i=j}^\infty 2^{-iuq}=\frac{1}{1-2^{-uq}}\sum_{j=0}^\infty(2^{-ju}a_j)^q,$$

т. е. неравенство (6.6) с $C_{qu}=(1-2^{-uq})^{-1/q}$.

Докажем (6.7). Предположим, что $\sup_{j\ge0}2^{-ju}a_j<\infty$ (иначе доказывать нечего). Тогда неравенство (6.7) верно с $C_u=2^u(2^u-1)^{-1}$, так как для любого $i\ge0$

$$2^{-iu}\sum_{j=0}^i a_j\le\big(\sup_{j\ge0}2^{-ju}a_j\big)2^{-iu}\sum_{j=0}^i 2^{ju}\le\frac{2^u}{2^u-1}\big(\sup_{j\ge0}2^{-ju}a_j\big).\qquad\square$$

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}, u > 0$. Для всех $j \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ и $\zeta \in \mathbb{Z}^m$ имеют место оценки*

$$\|\varphi_{j\zeta}^{(m)}(\bar{d}(\rho(m,\eta,j))x) \,|\, H^u(\mathbb{R}^m)\| \le \begin{cases} 12^{2u-\frac{m}{2}}\|\eta_0 \,|\, H^u(\mathbb{R}^m)\|\langle\zeta\rangle^u & (j=0), \\ 24^{3u-\frac{m}{2}}\|\eta_1 \,|\, H^u(\mathbb{R}^m)\|\langle\zeta\rangle^u & (j\ge 1), \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\|\eta_j^{(m)}(d2^{j+l}x) \,|\, H^u(\mathbb{R}^m)\| \le \begin{cases} 2^{\frac{3u-m}{2}}d^{u-\frac{m}{2}}\|\eta_0 \,|\, H^u(\mathbb{R}^m)\|2^{(u-\frac{m}{2})l} & (j=0), \\ 2^{\frac{3u-m}{2}}d^{u-\frac{m}{2}}\|\eta_1 \,|\, H^u(\mathbb{R}^m)\|2^{(u-\frac{m}{2})(l-j)} & (j\ge 1). \end{cases} \tag{6.9}$$

Доказательство легко следует из определения нормы пространства $H^u(\mathbb{R}^m)$, свойств преобразования Фурье, элементарного неравенства Петре (см. подразд. 6.2, часть D)) и простых оценок, если принять во внимание свойства функций систем $\Phi_\star^{(\mathtt{m})}$ (см. подразд. 6.2, часть A), п. 3)) и $H^{(m)}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $1 \le p,\, q \le \infty$, $\varnothing \ne \mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n$. Для любых $f \in L_1(\mathbb{T}^{\mathtt{m}_\mathrm{z}})$ и $(g_\kappa(x))_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} \subset L_p(\ell_q)$ верно неравенство ($*_\mathrm{z}$ — свертка по переменной x^z)*

$$\|\big(f *_\mathrm{z} g_\kappa\big) \,|\, L_p(\ell_q)\| \le \|f \,|\, L_1(\mathbb{T}^{\mathtt{m}_\mathrm{z}})\|\|\big(g_\kappa\big) \,|\, L_p(\ell_q)\|.$$

Доказательство. Действительно, последовательно применяя обобщенное неравенство Минковского для ℓ_q (см. [15, теорема 201]) и для L_p, получаем

$$\|\big(f *_\mathrm{z} g_\kappa(x)\big) \,|\, \ell_q\| \le \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathtt{m}_\mathrm{z}}} |f(y^\mathrm{z})|\, \|\big(g_\kappa(x^\mathrm{z}-y^\mathrm{z}, x^{\dot{\mathrm{z}}})\big) \,|\, \ell_q\| dy^\mathrm{z},$$

$$\|\big(f *_\mathrm{z} g_\kappa(x)\big) \,|\, L_p(\ell_q)\| \le \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathtt{m}_\mathrm{z}}} |f(y^\mathrm{z})|\, \|\big(g_\kappa(\cdot^\mathrm{z}-y^\mathrm{z}, \cdot^{\dot{\mathrm{z}}})\big) \,|\, L_p(\ell_q)\| dy^\mathrm{z} = \|f \,|\, L_1(\mathbb{T}^{\mathtt{m}_\mathrm{z}})\|\|\big(g_\kappa\big) \,|\, L_p(\ell_q)\|. \quad \square$$

Из формулы суммирования Пуассона (см. [16], гл. 7, теорема 2.4, следствие 2.6 (формула (2.7)) вытекает

Лемма 4. *Для любой функции $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и ее периодизации $\widetilde{g}(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} g(x+\xi)$ имеют место равенство $\widetilde{g}(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{g}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$ и оценка $\|\widetilde{g} \,|\, L_1(\mathbb{T}^m)\| \le \|g \,|\, L_1(\mathbb{R}^m)\|$ ($\widehat{g} = \mathcal{F}(g)$ — преобразование Фурье g).* $\square$

6.4. Теорема представления полиномами

Теорема 4. *Пусть $0 < q \le \infty$, $\mathtt{e} \in \mathbb{N}^n$. Пусть далее $(t_\kappa(x))_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n}$ — последовательность тригонометрических полиномов $t_\kappa \in \mathrm{T}(\Lambda(\mathtt{m},\mathtt{e},2^\kappa))$, $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$.*

I. *Пусть $0 < p \le \infty$. Тогда ряд*

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} t_\kappa(x) \tag{6.10}$$

сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ к распределению $f \in B_{pq}^{s\mathtt{m}}$, если выполнены следующие условия:

(i) $(2^{s\kappa}t_\kappa(x)) \in \ell_q(L_p)$;

(ii) *для каждого $\nu \in \mathrm{z}_n$ или $s_\nu > m_\nu(\sigma_p - 1)$, или $\widehat{t_\kappa}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{Z}^m$ с $|\xi^\nu|_\infty \le \mathtt{h}_\nu 2^{\kappa_\nu}$ и всех $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ (с некоторыми фиксированными $\mathtt{h}_\nu \in (0,1)$, $\nu \in \mathrm{z}_n$).*

При этом $\|f \,|\, B_{pq}^{s\mathtt{m}}\| \ll \inf\{\|(2^{s\kappa}t_\kappa(x)) \,|\, \ell_q(L_p)\|\}$, где $\inf$ берется по всем представлениям (6.10), удовлетворяющим условиям (i), (ii) и сходящимся к f.

II. *Пусть $0 < p < \infty$. Тогда ряд (6.10) сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ к распределению $f \in L_{pq}^{s\mathtt{m}}$, если выполнены следующие условия:*

(i) $(2^{s\kappa}t_\kappa(x)) \in L_p(\ell_q)$;

(ii) *для каждого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *или* $s_\nu > m_\nu(\tilde{\sigma}_{pq} - 1/2)$, *или* $\widehat{t_\kappa}(\xi) = 0$ *для всех* $\xi \in \mathbb{Z}^m$ *с* $|\xi^\nu|_\infty \leq \mathtt{h}_\nu 2^{\kappa_\nu}$ *и всех* $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ (*с некоторыми фиксированными* $\mathtt{h}_\nu \in (0,1)$, $\nu \in \mathrm{z}_n$).

При этом $\|f \,|\, L^{s\mathtt{m}}_{pq}\| \ll \inf\{\|(2^{s\kappa} t_\kappa(x)) \,|\, L_p(\ell_q)\|\}$, *где* $\inf$ *берется по всем представлениям* (6.10), *удовлетворяющим условиям* (i), (ii) *данной части и сходящимся к* f.

Доказательство. Сначала предположим, что в условиях теоремы имеет место сходимость ряда (6.10) в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$.

Итак, пусть

$$f = \sum_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n} t_\kappa \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m),$$

если последовательность (t_κ) удовлетворяет условиям части I или II.

Докажем утверждение II. Обозначим $\mathrm{z}_+ = \{\nu \in \mathrm{z}_n : s_\nu > m_\nu(\sigma_{pq} - 1)\}$, $\mathrm{z}_- = \{\nu \in \mathrm{z}_n : s_\nu \leq m_\nu(\sigma_{pq} - 1)\}$, ниже для $z \in \mathbb{R}^n$ $z_+ := z_{\mathrm{z}_+}$, $z_- := z_{\mathrm{z}_-}$. Тогда, очевидно,

$$\Delta^\eta_\lambda(f, x) = \sum_{\kappa \geq 0} \Delta^\eta_\lambda(t_\kappa, x) = \sum_{\kappa \geq 0 : \kappa \geq \lambda - \mathtt{E}, \kappa_- \leq \lambda_- + \mathtt{H}_-} \Delta^\eta_\lambda(t_\kappa, x) \quad \text{в} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m),$$

здесь $\mathtt{E} := (1 + \log \mathtt{e}_1, \ldots, 1 + \log \mathtt{e}_n)$, $\mathtt{H}_- := (\log(3/(2\mathtt{h}_\nu)) : \nu \in \mathrm{z}_-)$ ($\log$ — это логарифм по основанию 2).

Поэтому последовательно применяя неравенство Йенсена ($\|\cdot \,|\, \ell_1\| \leq \|\cdot \,|\, \ell_r\|$, $r := \min\{1, p, q\}$), меняя индекс суммирования ($\kappa' = \kappa - \lambda$), применяя неравенства Минковского для $\ell_{q/r}$ и $L_{p/r}$ и используя предложение 1, часть II (с фиксированными $u_\nu \in (m_\nu \tilde{\sigma}_{pq}, s_\nu + m_\nu/2)$, если $\nu \in \mathrm{z}_+$, и $u_\nu \in (m_\nu \tilde{\sigma}_{pq}, \lfloor m_\nu \tilde{\sigma}_{pq} \rfloor + 1)$, если $\nu \in \mathrm{z}_-$), с учетом леммы 2, (6.9), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\|f \,|\, L^{s\mathtt{m}}_{pq}\| &= \|(2^{s\lambda} \Delta^\eta_\lambda(f, x)) \,|\, L_p(\ell_q)\| \\
&\leq \Big\| \Big(2^{s\lambda r} \sum_{\kappa : \kappa \geq \lambda - \mathtt{E}, \kappa_- \leq \lambda_- + \mathtt{H}_-} |\Delta^\eta_\lambda(t_\kappa, x)|^r \Big)^{1/r} \,\Big|\, L_p(\ell_q) \Big\| \\
&= \Big\{ \Big\| \Big(2^{s\lambda r} \sum_{\kappa : \kappa \geq \lambda - \mathtt{E}, \kappa_- \leq \lambda_- + \mathtt{H}_-} |\Delta^\eta_\lambda(t_\kappa, x)|^r \Big) \,\Big|\, L_{p/r}(\ell_{q/r}) \Big\| \Big\}^{1/r} \\
&= \Big\{ \Big\| \Big(\sum_{\kappa : \kappa \geq -\mathtt{E}, \kappa_- \leq \mathtt{H}_-} 2^{-s\kappa r} |2^{s(\kappa+\lambda)} \Delta^\eta_\lambda(t_{\kappa+\lambda}, x)|^r \Big) \,\Big|\, L_{p/r}(\ell_{q/r}) \Big\| \Big\}^{1/r} \\
&\leq \Big\{ \Big\| \Big(\sum_{\kappa : \kappa \geq -\mathtt{E}, \kappa_- \leq \mathtt{H}_-} 2^{-s\kappa r} |2^{s(\kappa+\lambda)} \Delta^\eta_\lambda(t_{\kappa+\lambda}, x)|^r \Big) \,\Big|\, L_{p/r}(\ell_{q/r}) \Big\| \Big\}^{1/r} \\
&\leq \Big\{ \sum_{\kappa : \kappa \geq -\mathtt{E}, \kappa_- \leq \mathtt{H}_-} 2^{-s\kappa r} \big\| \big(2^{s(\kappa+\lambda)} \Delta^\eta_\lambda(t_{\kappa+\lambda}, x) \big) \,\big|\, L_p(\ell_q) \big\|^r \Big\}^{1/r} \\
&= \Big\{ \sum_{\kappa : \kappa \geq -\mathtt{E}, \kappa_- \leq \mathtt{H}_-} 2^{-s\kappa r} \big\| \big(\mathcal{D}^\eta_\lambda * (2^{s(\kappa+\lambda)} t_{\kappa+\lambda}(x)) \big) \,\big|\, L_p(\ell_q) \big\|^r \Big\}^{1/r} \\
&\ll \Big\{ \sum_{\kappa : \kappa \geq -\mathtt{E}, \kappa_- \leq \mathtt{H}_-} 2^{-s\kappa r} \sup_\lambda \Big\{ \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \big\| \eta^{(m_\nu)}_{\lambda_\nu} (\mathtt{e}_\nu 2^{\kappa_\nu + \lambda_\nu + 2}) \,\big|\, H^{u_\nu}(\mathbb{R}^{m_\nu}) \big\|^r \Big\} \\
&\times \big\| \big(2^{s(\kappa+\lambda)} t_{\kappa+\lambda}(x) \big) \,\big|\, L_p(\ell_q) \big\|^r \Big\}^{1/r} \ll \Big\{ \sum_{\kappa :\ \kappa \geq -\mathtt{E}, \kappa_- \leq \mathtt{H}_-} 2^{-(s - u + \frac{1}{2}\mathtt{m})\kappa r} \Big\}^{1/r} \\
&\times \big\| \big(2^{s\kappa} t_\kappa(x) \big) \,\big|\, L_p(\ell_q) \big\| \ll \big\| \big(2^{s\kappa} t_\kappa(x) \big) \,\big|\, L_p(\ell_q) \big\| < +\infty.
\end{aligned}$$

Из нее следует, что $f \in L^{s\mathtt{m}}_{pq}$ и верно неравенство $\|f \,|\, L^{s\mathtt{m}}_{pq}\| \ll \|\big(2^{s\kappa} t_\kappa(x)\big) \,|\, L_p(\ell_q)\|$; это завершает доказательство теоремы для пространств Лизоркина — Трибеля. Случай пространств

Никольского — Бесова рассматривается аналогично (надо лишь вместо части II предложения 1 использовать часть I).

Остается установить сходимость ряда (6.10) в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$. Стандартные рассуждения (см., например, [12, Ch. 3] в случае $n = 1$) показывают, что оба пространства $B^{s\mathtt{m}}_{pq}$ и $L^{s\mathtt{m}}_{pq}$ (квази)банаховы и (непрерывно) вложены в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$. Далее, применяя неравенство Йенсена $\|\cdot \mid \ell_p\| \le \|\cdot \mid \ell_q\|$ при $p \ge q$ и обобщенное неравенство Минковского для пространства $\ell_{q/p}$ при $p < q$, нетрудно получить неравенство $\|\cdot \mid \ell_{\max\{p,q\}}(L_p)\| \le \|\cdot \mid L_p(\ell_q)\|$, из которого следует (непрерывное) вложение $L^{s\mathtt{m}}_{pq} \hookrightarrow B^{s\mathtt{m}}_{p\max\{p,q\}}$. Далее, легко видеть, что

$$B^{s\mathtt{m}}_{p\max\{p,q\}} \hookrightarrow B^{s-\tau\mathtt{m}}_{p1} \ \text{ при } \ \tau \in \mathbb{R}^n_+ \ \text{ и } \ \|(2^{(s-\tau)\kappa} t_\kappa) \mid \ell_1(L_p)\| \ll \|(2^{s\kappa} t_\kappa) \mid \ell_{\max\{p,q\}}(L_p)\|.$$

Поэтому для любой вложенной последовательности конечных множеств $\{\Xi_N\}$, исчерпывающей $\mathbb{N}^n_0$ ($\varnothing \ne \Xi_N \subset \Xi_{N+1} \subset \mathbb{N}^n_0$, $\#\Xi_N < \infty$, $\cup_{N\in\mathbb{N}}\Xi_N = \mathbb{N}^n_0$), полагая $f_N(x) := \sum_{\kappa\in\Xi_N} t_\kappa(x)$, в силу уже доказанного имеем неравенство ($M > N$)

$$\|f_M - f_N \mid B^{s-\tau\mathtt{m}}_{p1}\| \ll \sum_{\kappa\in\Xi_M\setminus\Xi_N} 2^{(s-\tau)\kappa}\|t_\kappa(x) \mid L_p\| \to 0 \quad N \to \infty.$$

(конечная сумма тривиально сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$). Следовательно, в силу полноты $B^{s-\tau\mathtt{m}}_{p1}$ существует распределение $f \in B^{s-\tau\mathtt{m}}_{p1}$ такое, что $f_N \to f$ при $N \to \infty$ в $B^{s-\tau\mathtt{m}}_{p1}$, а потому и в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$. Ясно, что предел $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ не зависит от выбора последовательности $\{\Xi_N\}$. Таким образом, сходимость ряда (6.10) в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ установлена.

Теорема 4 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 5. 1) Утверждение, обратное теореме 4, также верно. Это следует из определения 2 и того легко проверяемого факта, что для любого распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ ряд $\sum_\kappa \Delta^\eta_\kappa(f, x)$ сходится к нему в $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$. Более того, в условиях части I (соответственно, II) имеем $\|f \mid B^{s\mathtt{m}}_{pq}\| \asymp \inf\{\|(2^{s\kappa}t_\kappa(x)) \mid \ell_q(L_p)\|\}$ (соответственно, $\|f \mid L^{s\mathtt{m}}_{pq}\| \asymp \|\big(2^{s\kappa}t_\kappa(x)\big) \mid L_p(\ell_q)\|$), где inf берется по всем представлениям (6.10), удовлетворяющим условиям (i), (ii) части I (соответственно, II) и сходящимся к f.

2) При $s > (\sigma_p - 1)\mathtt{m}$ и $s > (\sigma_{pq} - 1)\mathtt{m}$ для пространств $B^{s\mathtt{m}}_{pq}$ и $L^{s\mathtt{m}}_{pq}$ соответственно теорема 4 (вместе с ее обращением, см. п. 1)) — это теорема представления Никольского тригонометрическими полиномами, в частности, при $1 \le p, q \le \infty$ для пространств $B^s_{pq}(\mathbb{T}^m)$ и их непериодических аналогов $B^s_{pq}(\mathbb{R}^m)$ (и, соответственно, представления целыми функциями экспоненциального типа) — это классический результат С. М. Никольского [17] ($q = \infty$) и О. В. Бесова [18] ($1 \le q < \infty$); дальнейшие подробности (достаточно полные историю вопроса и библиографию) можно найти, например, в [14, гл. 5, 8] (см. также замечания к гл. 5, 6, 8 в конце книги), [11, гл. 2; 12, Ch. 2, 3]. Здесь лишь отметим, что теорема 4 — естественный аналог для тора $\mathbb{T}^m$ теоремы 2.1 работы [4].

6.5. Доказательство теоремы 2

Для сокращения письма далее будем использовать соглашения: для $u \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$ $z > u (z < u, z \le u, z \ge u) \Leftrightarrow z_\nu > u \ (z_\nu < u, z_\nu \le u, z_\nu \ge u)$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, $z + u := (z_1 + u, \dots, z_n + u)$, $u^z := (u^{z_1}, \dots, u^{z_n})$, $z \cdot x = (z_1 x^1, \dots, z_n x^n)$.

Доказательство теоремы разобъем на несколько шагов.

1. Итак, пусть $a(x,\xi)$ — произвольный символ из класса $\widetilde{\Psi}^{\tau\,\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathtt{0}]$. Построим его “продолжение” $a^{\mathtt{r}} \colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, полагая

$$a^{\mathtt{r}}(x,\xi) := \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} \phi^{(\mathtt{m})}_{\mathtt{0}}(\xi - \zeta)a(x,\zeta), \quad (x,\,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m; \tag{6.11}$$

ясно, что $a^{\mathtt{r}}(x,\xi) \equiv a(x,\xi)$, $(x,\,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$.

Принимая во внимание свойства $\Phi^{(\mathtt{m})}$ и формулу (6.3), получаем для $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$

$$\partial_\xi^\alpha a^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} a(x,\zeta)\partial_\xi^\alpha \phi_{\mathtt{0}}^{(\mathtt{m})}(\xi-\zeta)$$

$$= \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} a(x,\zeta)\overline{\Delta}^\alpha \phi_\alpha^{(\mathtt{m})}(\xi-\zeta) = (-1)^{|\alpha|}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} \phi_\alpha^{(\mathtt{m})}(\xi-\zeta)\Delta_\zeta^\alpha a(x,\zeta). \tag{6.12}$$

Используя свойства систем $H^{(\mathtt{m})}$ и $\Psi^{(\mathtt{m})}$, получаем еще одно разложение символа $a^{\mathtt{r}}(x,\xi)$:

$$a^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} a^{\mathtt{r}}(x,\xi)\psi_\kappa(\xi)\eta_\kappa(\xi), \tag{6.13}$$

при этом

$$\operatorname{supp} a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\psi_\kappa(2^{\kappa+2}\cdot\xi) \subset \mathbb{T}^m \times \Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)^m.$$

Поэтому $a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\psi_\kappa(2^{\kappa+2}\cdot\xi)$ как функция переменной ξ может быть разложена в ряд Фурье на $\mathrm{I}^m = \Big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big]^m$:

$$a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\psi_\kappa(2^{\kappa+2}\cdot\xi) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)e^{2\pi i\zeta\xi}, \tag{6.14}$$

где для $\zeta \in \mathbb{Z}^m$

$$a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x) = \int_{\mathrm{I}^m} a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\psi_\kappa(2^{\kappa+2}\cdot\xi)e^{-2\pi i\zeta\xi}d\xi. \tag{6.15}$$

Отсюда находим (функции $\varphi_{\kappa\zeta}$ определены в разд. 6.2, часть A), п. 3))

$$a^{\mathtt{r}}(x,\xi)\psi_\kappa(\xi)\eta_\kappa(\xi) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)\varphi_{\kappa\zeta}(\xi), \quad (x,\xi)\in\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^m,$$

следовательно,

$$a^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} a_\zeta^{\mathtt{r}}(x,\xi), \quad a_\zeta^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)\varphi_{\kappa\zeta}(\xi), \quad (x,\xi)\in\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^m. \tag{6.16}$$

Таким образом,

$$a(x,\xi) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m} a_\zeta^{\mathtt{r}}(x,\xi), \quad a_\zeta^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)\varphi_{\kappa\zeta}(\xi), \quad (x,\xi)\in\mathbb{T}^m\times\mathbb{Z}^m. \tag{6.17}$$

2. Изучим функции $a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)(\kappa\in\mathbb{N}_0^n, \zeta\in\mathbb{Z}^m)$. Сначала оценим норму $\|a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(\cdot)\,|\,L_\infty\|$. Пусть $\mathtt{k}_\nu = \Big\lfloor\frac{\mathtt{K}_\nu}{2}\Big\rfloor$, $\mathtt{K}_\nu = 2\mathtt{k}_\nu$, $\nu\in\mathrm{z}_n$. Из (6.15) (с учетом частей C), E) подразд. 6.2), интегрируя по частям, получаем

$$a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x) = \prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}\int_{\mathrm{I}^m} e^{-2\pi i\zeta\xi}\Big[\Big(\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}(1-\Delta_{(m_\nu)\xi^\nu})^{\mathtt{k}_\nu}\Big)\big(a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\psi_\kappa(2^{\kappa+2}\cdot\xi)\big)\Big]d\xi. \tag{6.18}$$

Представим оператор $\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}(1-\Delta_{(m_\nu)\xi^\nu})^{\mathtt{k}_\nu}$ в виде ($\mathtt{k}(\mathtt{m}) = (\mathtt{k}_1,\ldots,\mathtt{k}_n)$)

$$\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}(1-\Delta_{(m_\nu)\xi^\nu})^{\mathtt{k}_\nu} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m:|\alpha^\nu|\le\mathtt{K}_\nu} \mathrm{C}(\alpha,\mathtt{k}(\mathtt{m}))\partial_\xi^\alpha, \tag{6.19}$$

тогда, полагая $\mathrm{z}_0=\mathrm{z}_0(\kappa)=\{\nu\in\mathrm{z}_n:\kappa_\nu=0\}$, $\mathrm{z}_1=\mathrm{z}_n\setminus\mathrm{z}_0$, имеем

$$\Big(\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}(1-\Delta_{(m_\nu)\xi^\nu})^{\mathtt{k}_\nu}\Big)(a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\psi_\kappa(2^{\kappa+2}\cdot\xi))=\sum_{\alpha:|\alpha^\nu|\le\mathtt{K}_\nu}\mathrm{C}(\alpha,\mathtt{k}(\mathtt{m}))\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}$$

$$\partial_\xi^\beta a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)\prod_{\nu\in\mathrm{z}_0}(\partial_{\xi^\nu}^{\alpha^\nu-\beta^\nu}\psi_0^{m_\nu})(4\xi^\nu)2^{2|\alpha^\nu|+\kappa_\nu|\beta^\nu|}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_1}(\partial_{\xi^\nu}^{\alpha^\nu-\beta^\nu}\psi_1^{m_\nu})(8\xi^\nu)2^{3|\alpha^\nu|+(\kappa_\nu-1)|\beta^\nu|}. \tag{6.20}$$

Далее, из (6.12) (с учетом части F) подразд. 6.2) (для $\phi_{\beta^\nu}^{(m_\nu)}(\xi^\nu)$, $\nu\in\mathrm{z}_n$), подразд. 6.2, частей D), B)) находим

$$|\partial_\xi^\beta a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)|\le\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}|\phi_\beta^{(\mathtt{m})}(2^{\kappa+2}\cdot\xi-\zeta)||\Delta_\zeta^\beta a(x,\zeta)|\le\|a\,|\,\widetilde{S}_{1,0}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},0]\|$$

$$\times\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}C(\phi_{\beta^\nu}^{(m_\nu)},\mathtt{K}_\nu+1+\lfloor|\tau_\nu-|\beta^\nu|\rfloor)\sum_{\zeta^\nu\in\mathbb{Z}^{m_\nu}}\langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu-\zeta^\nu\rangle^{-\mathtt{K}_\nu-1-\lfloor|\tau_\nu-|\beta^\nu||\rfloor}\langle\zeta^\nu\rangle^{\tau_\nu-|\beta^\nu|}$$

$$\le\|a\,|\,\widetilde{S}_{1,0}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},0]\|\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}2^{|\tau_\nu-|\beta^\nu||}C(\phi_{\beta^\nu}^{(m_\nu)},\mathtt{K}_\nu+1+\lfloor|\tau_\nu-|\beta^\nu||\rfloor)\langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\tau_\nu-|\beta^\nu|}$$

$$\times\sum_{\zeta^\nu\in\mathbb{Z}^{m_\nu}}\langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu-\zeta^\nu\rangle^{-\mathtt{K}_\nu}\le\|a\,|\,\widetilde{S}_{1,0}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},0]\|\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}2^{|\tau_\nu-|\beta^\nu||}\|h^{(m_\nu)}\,|\,C(\mathbb{T}^{m_\nu})\|$$

$$\times C(\phi_{\beta^\nu}^{(m_\nu)},\mathtt{K}_\nu+1+\lfloor|\tau_\nu-|\beta^\nu||\rfloor)\langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\tau_\nu-|\beta^\nu|}. \tag{6.21}$$

Подставляя правую часть (6.20) в (6.18) и используя оценку (6.21), получаем

$$|a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)|\le\|a\,|\,\widetilde{S}_{1,0}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},0]\|\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}C(\psi_0^{(m_\nu)},\psi_1^{(m_\nu)},\mathtt{l}(m_\nu))\|h^{(m_\nu)}\,|\,C(\mathbb{T}^{m_\nu})\|\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}$$

$$\times\sum_{\alpha:|\alpha^\nu|\le\mathtt{L}(m_\nu)}\sum_{\beta\le\alpha}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\mathrm{C}(\phi_{\beta^\nu}^{(m_\nu)},\mathtt{K}_\nu,\lfloor|\tau_\nu-|\beta^\nu||\rfloor)2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|}\int\limits_{\mathrm{I}^{m_\nu}}\langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\tau_\nu-|\beta^\nu|}d\xi^\nu$$

$$\le\Big(\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}C(\psi_0^{(m_\nu)},\psi_1^{(m_\nu)},\phi_{\beta^\nu}^{(m_\nu)}(|\beta^\nu|\le\mathtt{K}_\nu),\mathtt{k}_\nu,\tau_\nu)\|h^{(m_\nu)}\,|\,C(\mathbb{T}^{m_\nu})\|\Big)$$

$$\times\|a\,|\,\widetilde{S}_{1,0}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},0]\|2^{\kappa\tau}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}.$$

Итак,

$$\|a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(\cdot)\,|\,L_\infty\|\ll\|a\,|\,\widetilde{S}_{1,0}^{\tau\mathtt{m}}[\mathrm{K},0]\|2^{\kappa\tau}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}. \tag{6.22}$$

Теперь установим оценки величин $\|a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(\cdot)\,|\,B_{\infty\theta}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\mathtt{m}_{\mathrm{z}}}\|$ $(\mathrm{z}\subset\mathrm{z}_n,\mathrm{z}\ne\varnothing)$. Подставим (6.20) в (6.18):

$$a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(x)=\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}\sum_{\alpha:|\alpha^\nu|\le\mathtt{K}_\nu}\mathrm{C}(\alpha,\mathtt{k}(\mathtt{m}))\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_1}2^{3|\alpha^\nu|+(\kappa_\nu-1)|\beta^\nu|}$$

$$\times\prod_{\nu\in\mathrm{z}_0}2^{2|\alpha^\nu|+\kappa_\nu|\beta^\nu|}\int\limits_{\mathrm{I}^m}\partial_\xi^\beta a^{\mathtt{r}}(x,2^{\kappa+2}\cdot\xi)e^{-2\pi i\zeta\xi}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_0}(\partial_{\xi^\nu}^{\alpha^\nu-\beta^\nu}\psi_0^{m_\nu})(4\xi^\nu)\prod_{\nu\in\mathrm{z}_1}(\partial_{\xi^\nu}^{\alpha^\nu-\beta^\nu}\psi_1^{m_\nu})(8\xi^\nu)d\xi.$$

Отсюда по определению нормы пространства $B_{\infty\vartheta}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\mathtt{m}_{\mathrm{z}}}$ имеем

$$\|a_{\kappa\zeta}^{\mathtt{r}}(\,\cdot\,,x^{\dot{\mathrm{z}}})\,|\,B_{\infty\theta}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\mathtt{m}_{\mathrm{z}}}\|\le C(\mathtt{k}(\mathtt{m}))\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}\sum_{\alpha:|\alpha^\nu|\le\mathtt{K}_\nu}\sum_{\beta\le\alpha}\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|}$$

$$\times \left\| \left(2^{\upsilon_z\lambda_z} \sup_{x^z} \left| \int\limits_{\mathbf{T}^{m_z}} \mathcal{D}^{\eta}_{\lambda_z}(y^z) \left[\int\limits_{\mathrm{I}^m} \partial^{\beta}_{\xi} a^{\mathtt{r}}((x^z - y^z, x^{\dot{z}}), 2^{\kappa+2}\cdot\xi) e^{-2\pi i\zeta\xi} \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times \prod_{\nu\in z_0} (\partial^{\alpha^\nu-\beta^\nu}_{\xi^\nu} \psi_0^{(m_\nu)})(4\xi^\nu) \prod_{\nu\in z_1} (\partial^{\alpha^\nu-\beta^\nu}_{\xi^\nu} \psi_1^{(m_\nu)})(8\xi^\nu) d\xi \right] dy^z \right| \right)_{\lambda_z} \Big| \ell_\theta(\mathbb{N}_0^{\# z}) \right\|$$

$$\le C(\mathtt{k}(\mathtt{m})) \prod_{\nu\in z_n} \mathrm{C}(\psi_0^{(m_\nu)}, \psi_1^{(m_\nu)}) \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu} \sum_{\beta:|\beta^\nu|\le \mathtt{K}_\nu} \prod_{\nu\in z_n} 2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|}$$

$$\times \left\| \left(\int\limits_{\mathrm{I}^m} d\xi 2^{\lambda_z\upsilon_z} \sup_{x^z} \left| \int\limits_{\mathbf{T}^{m_z}} \mathcal{D}^{\eta}_{\lambda_z}(y^z) \partial^{\beta}_{\xi} a^{\mathtt{r}}((x^z - y^z, x^{\dot{z}}), 2^{\kappa+2}\cdot\xi) dy^z \right| \right)_{\lambda_z} \Big| \ell_\theta(\mathbb{N}_0^{\# z}) \right\|. \tag{6.23}$$

Снова используя соотношение (6.12), получим

$$\left| \int\limits_{\mathbf{T}^{m_z}} \mathcal{D}^{\eta}_{\lambda_z}(y^z) \partial^{\beta}_{\xi} a^{\mathtt{r}}((x^z - y^z, x^{\dot{z}}), 2^{\kappa+2}\cdot\xi) dy^z \right|$$

$$= \sum_{\varkappa\in\mathbb{Z}^m} |\phi^{(\mathtt{m})}_{\beta}(2^{\kappa+2}\cdot\xi - \varkappa)| \left| \int\limits_{\mathbf{T}^{m_z}} \mathcal{D}^{\eta}_{\lambda_z}(y^z) \Delta^{\beta}_{\varkappa} a((x^z - y^z, x^{\dot{z}}), \varkappa) dy^z \right|.$$

и продолжим оценку (6.23), применяя последовательно обобщенное неравенство Минковского (подразд. 6.2, часть F)) $\big($с $g = \phi^{(m_\nu)}_{\beta^\nu}$, $\mathtt{N}_\nu = \mathtt{K}_\nu + |\tau_\nu - |\beta^\nu| + \epsilon_\nu\upsilon_\nu|$ при $\nu \in z$, $\mathtt{N}_\nu = \mathtt{K}_\nu + |\tau_\nu - |\beta^\nu||$ при $\nu \in \dot{z}$), определение 3, части D), B) подразд. 6.2$\big)$

$$\le C(\mathtt{k}(\mathtt{m})) \prod_{\nu\in z_n} C\big(\psi_0^{(m_\nu)}, \psi_1^{(m_\nu)}, \phi^{(m_\nu)}_{\beta^\nu}(|\beta^\nu| \le \mathtt{K}_\nu), \tau_\nu, \epsilon_\nu, \upsilon_\nu\big) \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}$$

$$\times \sum_{\beta} \prod_{\nu\in z_n} 2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|} \int\limits_{\mathrm{I}^m} \sum_{\varkappa\in\mathbb{Z}^m} \prod_{\nu\in z_n} \langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu - \varkappa^\nu\rangle^{-\mathtt{N}_\nu} \big\|\Delta^{\beta}_{\varkappa} a((\,\cdot\,, x^{\dot{z}}), \varkappa) \,|\, B^{\upsilon_z \mathtt{m}_z}_{\infty\theta}\big\| d\xi$$

$$\le C(\mathtt{k}(\mathtt{m})) \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]\big\| \prod_{\nu\in z_n} C(\psi_0^{(m_\nu)}, \psi_1^{(m_\nu)}, \phi^{(m_\nu)}_{\beta^\nu}(|\beta^\nu| \le \mathtt{K}_\nu), \tau_\nu, \epsilon_\nu, \upsilon_\nu) \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}$$

$$\times \sum_{\beta} \prod_{\nu\in z_n} 2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|} \int\limits_{\mathrm{I}^m} \sum_{\varkappa\in\mathbb{Z}^m} \prod_{\nu\in z_n} \langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu - \varkappa^\nu\rangle^{-\mathtt{N}_\nu} \prod_{\nu\in z_n} \langle\varkappa^\nu\rangle^{\tau_\nu - |\beta^\nu|} \prod_{\nu\in z} \langle\varkappa^\nu\rangle^{\upsilon_\nu\epsilon_\nu} d\xi$$

$$\le C(\mathtt{k}(\mathtt{m})) \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]\big\| \prod_{\nu\in z_n} \widetilde{C}\big(\psi_0^{(m_\nu)}, \psi_1^{(m_\nu)}, \phi^{(m_\nu)}_{\beta^\nu}(|\beta^\nu| \le \mathtt{K}_\nu), \tau_\nu, \epsilon_\nu, \upsilon_\nu\big) \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}$$

$$\times \sum_{\beta} \prod_{\nu\in z_n} 2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|} \int\limits_{\mathrm{I}^m} \prod_{\nu\in z} \langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\epsilon_\nu\upsilon_\nu} \prod_{\nu\in z_n} \langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\tau_\nu - |\beta^\nu|} h^{(m_\nu)}(2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu) d\xi$$

$$\le C(\mathtt{k}(\mathtt{m})) \prod_{\nu\in z_n} \widetilde{C}\big(\psi_0^{(m_\nu)}, \psi_1^{(m_\nu)}, \phi^{(m_\nu)}_{\beta^\nu}(|\beta^\nu| \le \mathtt{K}_\nu), \tau_\nu, \epsilon_\nu, \upsilon_\nu\big) \big\|h^{(m_\nu)} \,|\, C(\mathbb{T}^{m_\nu})\big\| \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}$$

$$\times \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]\big\| \sum_{\beta} \prod_{\nu\in z_n} 2^{\kappa_\nu|\beta^\nu|} \int\limits_{\mathrm{I}^m} \prod_{\nu\in z} \langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\epsilon_\nu\upsilon_\nu} \prod_{\nu\in z_n} \langle 2^{\kappa_\nu+2}\xi^\nu\rangle^{\tau_\nu - |\beta^\nu|} d\xi.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\|a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}(\,\cdot\,, x^{\dot{z}}) \,|\, B^{\upsilon_z \mathtt{m}_z}_{\infty\theta}\| \ll \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon; \mathrm{K}, \mathrm{L}]\big\| \, 2^{\tau\kappa} \prod_{\nu\in z} 2^{\upsilon_\nu\epsilon_\nu\kappa_\nu} \prod_{\nu\in z_n} \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathtt{K}_\nu}, \quad x^{\dot{z}} \in \mathbb{T}^{(m_{\dot{z}})}. \tag{6.24}$$

3. Используя систему $X^{(\mathtt{m})}$, представим функцию $a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}(x)$ в виде

$$a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}(x) = \sum_{\iota\in z_3^n} a^{\mathtt{r}\,\iota}_{\kappa\zeta}(x), \quad a^{\mathtt{r}\,\iota}_{\kappa\zeta}(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{a}^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}(\xi) \chi_{\kappa\iota}(\xi) e^{2\pi i\xi x}, \quad \iota \in z_3^n. \tag{6.25}$$

Пусть сначала $f \in L^{s\mathtt{m}}_{pq}(\mathbb{T}^m)$. Простые преобразования дают $\big($см. (1.2), (6.17) и часть A) подразд. 6.2 (определение системы $\Phi^{(\mathtt{m})}_{\star}$)$\big)$

$$T_a f(x) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}(x) f_{\kappa\zeta}(x), \quad \text{где} \quad f_{\kappa\zeta}(x) := \widetilde{\varphi}_{\kappa\zeta} * f(x), \quad \widetilde{\varphi}_{\kappa\zeta}(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \varphi_{\kappa\zeta}(\xi) e^{2\pi i\xi x}.$$

Поэтому

$$T_a f(x) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\sum_{\iota\in\mathrm{z}_3^n} g^{\iota}_{\zeta}(x), \quad \text{где} \quad g^{\iota}_{\zeta}(x) := \sum_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} a^{\mathtt{r}\,\iota}_{\kappa\zeta}(x) f_{\kappa\zeta}(x). \tag{6.26}$$

Ясно, что

$$f_{\kappa\zeta}(x) = f * \widetilde{\varphi}_{\kappa\zeta} * \sum_{\lambda\in\mathbb{N}_0^n:|\kappa-\lambda|_\infty\le 1} \mathcal{D}^{\eta}_{\lambda}(x) = \Big(\sum_{\lambda\in\mathbb{N}_0^n:|\kappa-\lambda|_\infty\le 1} \Delta^{\eta}_{\lambda}(f,\cdot)\Big) * \widetilde{\varphi}_{\kappa\zeta}(x).$$

Используя это представление $f_{\kappa\zeta}$ и применяя предложение 3, часть II $\big($с $\mathtt{u} = (u_1,\dots,u_n)$ таким, что $u_\nu \in (m_\nu\tilde{\sigma}_{pq}, \lfloor m_\nu\tilde{\sigma}_{pq}\rfloor + 1)$, $\nu\in\mathrm{z}_n\big)$, с учетом леммы 2, (6.8) оценим норму последовательности $(2^{\kappa s} f_{\kappa\zeta}(x))_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n}$ в пространстве $L_p(\ell_q)$

$$\|(2^{s\kappa} f_{\kappa\zeta}(\cdot))_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} \,|L_p(\ell_q)\| \le C(\mathtt{m},p,q,\mathtt{u})$$

$$\times \sup_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n}\Big\{\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\big\|\varphi_{\kappa_\nu\zeta^\nu}(\bar{d}(\rho(m_\nu,\eta,\kappa_\nu))\,\cdot) \,|\, H^{u_\nu}\big\|\Big\}\Big\|\Big(2^{s\kappa}\sum_{\lambda\in\mathbb{N}_0^n:|\kappa-\lambda|_\infty\le 1}\Delta^{\eta}_{\lambda}(f,\,\cdot\,)\Big)_{\kappa\in\mathbb{N}_0^n} \,|\, L_p(\ell_q)\Big\|$$

$$\le \mathrm{C}\big(\mathtt{m},p,q,\mathtt{u},n,s,\eta_0^{(m_\nu)},\nu\in\mathrm{z}_n\big)\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{u_\nu}\big\|(2^{s\lambda}\Delta^{\eta}_{\lambda}(f,\,\cdot\,))_{\lambda\in\mathbb{N}_0^n} \,|\, L_p(\ell_q)\big\| \ll \|\,f\,|\,L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{u_\nu}. \tag{6.27}$$

4. Теперь переходим к оценке норм функций $g^{\iota}_{\zeta}(x)$ в пространстве $L^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$. Фиксируем произвольный $\iota\in\mathrm{z}_3^n$, обозначим $\mathrm{z}(i) := \mathrm{z}(\iota,i) := \{\nu\in\mathrm{z}_n : \iota_\nu = i\}$, i=1,2,3, тогда $\mathrm{z}_n = \mathrm{z}(1)\cup\mathrm{z}(2)\cup\mathrm{z}(3)$. Для определенности считаем, что $\mathrm{z}(i)\ne\varnothing$, i=1,2,3 (в оставшихся случаях рассуждения лишь упрощаются). Простые преобразования дают (ниже для $z\in\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^m$ $z(i) := z_{\mathrm{z}(i)}$, $x[i] := x^{\mathrm{z}(i)}$, $\dot{x}[i] := x^{\dot{\mathrm{z}}(i)}$, $\dot{z}(i) := z_{\dot{\mathrm{z}}(i)}$, $\dot{\mathrm{z}}(i) = \mathrm{z}_n\setminus\mathrm{z}(i)$, например, $\dot{z}(1) = (z(2),z(3))$; $*_i$ — свертка по переменной $x[i]$)

$$\sum_{\kappa(3)\ge 0} a^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\zeta}(x) f_{\kappa\zeta}(x) = \sum_{\lambda(3)\ge 0}\sum_{\kappa(3)\le\lambda(3)-2} b^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x) f_{\kappa\zeta}(x).$$

Здесь $b^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x) := a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta} * \Theta^{\iota}_{\dot{\kappa}(3)\lambda(3)}(x) \equiv c^{\mathtt{r}}_{\kappa\lambda(3)\zeta} *_1 \Theta^{(1)}_{\kappa(1)}(x)$, $c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x) := ((a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta} *_2 \Theta^{(2)}_{\kappa(2)}) *_3 \Theta^{(3)}_{\lambda(3)})(x)$, $\Theta^{\iota}_{\dot{\kappa}(3)\lambda(3)}(x) := \Theta^{(1)}_{\kappa(1)}(x[1])\Theta^{(2)}_{\kappa(2)}(x[2])\Theta^{(3)}_{\lambda(3)}(x[3])$, где

$$\Theta^{(1)}_{\kappa(1)}(x[1]) := \sum_{\xi[1]\in\mathbb{Z}^{\mathtt{m}(1)}} e^{2\pi i\xi[1]x[1]}\eta^{(\mathtt{m}(1))}_{0(1)}(2^{2-\kappa(1)}\cdot\xi[1]), \quad \Theta^{(3)}_{\lambda(3)}(x[3]) := \sum_{\xi[3]\in\mathbb{Z}^{\mathtt{m}(3)}} \eta^{(\mathtt{m}(3))}_{\lambda(3)}(\xi[3]) e^{2\pi i\xi[3]x[3]},$$

$$\Theta^{(2)}_{\kappa(2)}(x[2]) := \sum_{\xi[2]\in\mathbb{Z}^{\mathtt{m}(2)}} e^{2\pi i\xi[2]x[2]}\sum_{\omega(2)\in\mathbb{Z}^{\mathtt{m}(2)}:|\omega(2)|_\infty\le 1}\eta^{\mathtt{m}(2)}_{(\kappa+\omega)(2)}(\xi[2]).$$

Следовательно,

$$g^{\iota}_{\zeta}(x) = \sum_{\kappa(1)\ge 0}\sum_{\kappa(2)\ge 0}\sum_{\lambda(3)\ge 0} h^{\iota}_{(\dot{\kappa}(3),\lambda(3))\zeta}(x), \quad \text{где} \quad h^{\iota}_{(\dot{\kappa}(3),\lambda(3))\zeta}(x) = \sum_{\kappa(3)\le\lambda(3)-2} b^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x) f_{\kappa\zeta}(x)$$

$$= \Theta^{(1)}_{\kappa(1)}(x[1]) *_1 \bar{h}^{\iota}_{(\dot{\kappa}(3),\lambda(3))\zeta}(x), \quad \bar{h}^{\iota}_{(\dot{\kappa}(3),\lambda(3))\zeta}(x) := \sum_{\kappa(3)\le\lambda(3)-2} c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x) f_{\kappa\zeta}(x).$$

Легко видеть, что спектр полинома $b^{\mathrm{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}$ содержится во множестве

$$\Big\{\xi\in\mathbb{Z}^m\colon |\xi^\nu|_\infty\le 3\cdot 2^{\kappa_\nu-3},\ \nu\in\mathrm{z}(1),\ \lfloor 2^{\kappa_\nu-2}\rfloor\le|\xi^\nu|_\infty\le 3\cdot 2^{\kappa_\nu},\ \nu\in\mathrm{z}(2),$$
$$\lfloor 2^{\lambda_\nu-1}\rfloor\le|\xi^\nu|_\infty\le 3\cdot 2^{\lambda_\nu-1},\ \nu\in\mathrm{z}(3)\Big\}.$$

Поэтому спектр произведения $b^{\mathrm{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}f_{\kappa\zeta}$ (а следовательно, и спектр полинома $h^{\iota}_{(\dot\kappa(3),\lambda(3))\zeta}$) содержится во множестве

$$\Big\{\xi\in\mathbb{Z}^m\colon \frac14\lfloor 2^{\kappa_\nu-1}\rfloor\le|\xi^\nu|_\infty\le\frac{15}{4}2^{\kappa_\nu-1},\ \nu\in\mathrm{z}(1),\ |\xi^\nu|_\infty\le 9\cdot 2^{\kappa_\nu-1},\ \nu\in\mathrm{z}(2),$$
$$\frac14\lfloor 2^{\lambda_\nu-1}\rfloor\le|\xi^\nu|_\infty\le\frac{15}{4}2^{\lambda_\nu-1},\ \nu\in\mathrm{z}(3)\Big\},$$

так как $f_{\kappa\zeta}\in\mathrm{T}(\rho(\mathtt{m},\eta,\kappa))$.

Далее, легко проверить, что при выполнении любого из условий (i)–(iii) части II теоремы 2 имеет место строгое неравенство

$$s_\nu-\tau_\nu+\upsilon_\nu(1-\epsilon_\nu)>m_\nu(\sigma_{pq}-1),\quad \nu\in\mathrm{z}_n. \tag{6.28}$$

Определим вектор $w=(w_1,\dots,w_n)$, полагая $w_\nu=s_\nu-\tau_\nu$ при $\nu\in\mathrm{z}(1)\cup\mathrm{z}(3)$, $w_\nu=s_\nu-\tau_\nu+\upsilon_\nu(1-\epsilon_\nu)$ при $\nu\in\mathrm{z}(2)$.

Последовательно используя монотонность нормы $\|\cdot\,|\,L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|$ по дифференциальному показателю s (так как $s-\tau\le w$) и теорему 4 (имея в виду замечание о спектре полиномов $h^{\iota}_{(\dot\kappa(3),\lambda(3))\zeta}$ и (6.28)), получим

$$\|\,g^\iota_\zeta\,|\,L^{s-\tau\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|\ \le\ \|\,g^\iota_\zeta\,|\,L^{w\,\mathtt{m}}_{p\,q}\|\ll\|\,(2^{(\dot\kappa(3),\lambda(3))w}h^\iota_{(\dot\kappa(3),\lambda(3))\zeta})\,|\,L_p(\ell_q)\,\|=:\mathrm{J}^\iota_\zeta(p,q). \tag{6.29}$$

Пусть $\mathrm{z}''(3):=\{\nu\in\mathrm{z}(3)\colon s_\nu-\tau_\nu=\upsilon_\nu\}$, $\mathrm{z}'(3)=\mathrm{z}(3)\setminus\mathrm{z}''(3)$ (ниже для $z\in\mathbb{R}^n$ $z':=z_{\mathrm{z}'(3)}$, $z'':=z_{\mathrm{z}''(3)}$, $\mathbb{N}_0':=\mathbb{N}_0^{\#\mathrm{z}'(3)}$, $\mathbb{N}_0'':=\mathbb{N}_0^{\#\mathrm{z}''(3)}$, $\ell_q':=\ell_q(\mathbb{N}_0')$, $\ell_q'':=\ell_q(\mathbb{N}_0'')$). Если $\mathrm{z}''(3)\ne\varnothing$, то $1\le\theta\le q\le\infty$ (см. условия (ii), (iii) части II теоремы 2), поэтому применяя $\#\mathrm{z}''(3)$ раз часть I леммы 1 (с $(i,j)=(\lambda_\nu,\kappa_\nu)$, $\nu\in\mathrm{z}''(3)$), получим для числовых последовательностей $(c_{\kappa''\lambda''}|\kappa'',\lambda''\in\mathbb{N}_0''\colon\kappa''\le\lambda''-2)$ и $(d_{\kappa''}|\kappa''\in\mathbb{N}_0'')$ неравенство

$$\mathrm{J}''(3):=\Big\|\Big(2^{(s-\tau)''\lambda''}\sum_{\kappa''\le\lambda''-2}c_{\kappa''\lambda''}d_{\kappa''}\Big)_{\lambda''}\,\Big|\,\ell_q''\Big\|\le\sum_{\kappa''\in\mathbb{N}_0''}\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu)\epsilon_\nu\kappa_\nu}\Big)$$
$$\times|d_{\kappa''}|\ \Big\|\Big(\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu)(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)c_{\kappa''\lambda''}\Big)_{\lambda''}\,\Big|\,\ell_q''\Big\|=:\mathrm{J}_1''(3).$$

Если $q=1$ (в частности, это так, если $\exists\nu\in\mathrm{z}_n\colon\epsilon_\nu=1$; тогда $\theta=q=1$ (см. условие (iii) части II теоремы 2)), то очевидно,

$$\mathrm{J}_1''(3)\le\sup_{\kappa''}\Big\|\Big(\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu)(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)c_{\kappa''\lambda''}\Big)_{\lambda''}\,\Big|\,\ell_q''\Big\|\ \Big\|\Big(\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu)\epsilon_\nu\kappa_\nu}\Big)d_{\kappa''}\Big)_{\kappa''}\,\Big|\,\ell_q''\Big\|.$$

Если $q>1$ (следовательно, $\epsilon_\nu<1\ \forall\nu\in\mathrm{z}_n$), то по неравенству Гёльдера для рядов продолжим оценку $\Big(q'=\dfrac{q}{q-1}$, если $q<\infty,\ q'=1$, если $q=\infty\Big)$

$$\mathrm{J}_1''(3)\le\Big\|\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu)(\epsilon_\nu-1)\kappa_\nu}\Big)_{\kappa''}\,\Big|\,\ell_{q'}''\Big\|$$
$$\times\sup_{\kappa''}\Big\|\Big(\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu)(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)c_{\kappa''\lambda''}\Big)_{\lambda''}\,\Big|\,\ell_q''\Big\|\ \Big\|\Big(2^{(s-\tau)''\kappa''}d_{\kappa''}\Big)_{\kappa''}\,\Big|\,\ell_q''\Big\|.$$

Итак, при $\mathrm{z}''(3)\neq\varnothing$ из неравенства Иенсена ($\|\cdot\mid\ell_q\|\le\|\cdot\mid\ell_p\|$, $0<p\le q\le\infty$) получаем

$$\mathrm{J}''(3)\ll\sup_{\kappa''}\Big\|\Big(\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)c_{\kappa''\lambda''}\Big)_{\lambda''}\mid\ell''_\theta\Big\|\,\Big\|\Big(2^{(s-\tau)''\kappa''}d_{\kappa''}\Big)_{\kappa''}\mid\ell''_q\Big\|. \tag{6.30}$$

Если $\mathrm{z}'(3)\neq\varnothing$, то простые оценки и часть II леммы 1 (с $(i,j)=(\lambda_\nu,\kappa_\nu)$, $u=u_\nu=\upsilon_\nu-s_\nu+\tau_\nu$, $\nu\in\mathrm{z}'(3)$) дают для числовых последовательностей $(e_{\kappa'\lambda'}|\kappa',\lambda'\in\mathbb{N}_0':\kappa'\le\lambda'-2)$ и $(f_{\kappa'}|\kappa'\in\mathbb{N}_0')$

$$\Big\|\Big(2^{(s-\tau)'\lambda'}\sum_{\kappa'\le\lambda'-2}e_{\kappa'\lambda'}f_{\kappa'}\Big)_{\lambda'}\mid\ell'_q\Big\|$$

$$=\Big\|\Big(2^{(s-\tau-\upsilon)'\lambda'}\sum_{\kappa'\le\lambda'-2}\Big(\prod_{\mathrm{z}'(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)e_{\kappa'\lambda'}\Big(\prod_{\mathrm{z}'(3)}2^{\upsilon_\nu\epsilon_\nu\kappa_\nu}\Big)f_{\kappa'}\Big)_{\lambda'}\mid\ell'_q\Big\|$$

$$\le\Big(\sup_{\kappa',\lambda'}|e_{\kappa'\lambda'}|\prod_{\mathrm{z}'(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)\Big\|\Big(2^{(s-\tau-\upsilon)'\lambda'}\sum_{\kappa'\le\lambda'-2}|f_{\kappa'}|\prod_{\mathrm{z}'(3)}2^{\upsilon_\nu\epsilon_\nu\kappa_\nu}\Big)_{\lambda'}\mid\ell'_q\Big\|$$

$$\le\Big(\prod_{\mathrm{z}'(3)}C_{q\upsilon_\nu-s_\nu+\tau_\nu}\Big)\Big(\sup_{\kappa',\lambda'}|e_{\kappa'\lambda'}|\prod_{\mathrm{z}'(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)\Big\|\Big(f_{\kappa'}\prod_{\mathrm{z}'(3)}2^{(s_\nu-\tau_\nu-\upsilon_\nu(1-\epsilon_\nu))\kappa_\nu}\Big)_{\kappa'}\mid\ell'_q\Big\|. \tag{6.31}$$

Применяя неравенства (6.30) с $c_{\kappa''\lambda''}=2^{-\tau\kappa}c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x)$ и $d_{\kappa''}=2^{\tau\kappa}f_{\kappa\zeta}(x)$ и (6.31) с

$$e_{\kappa'\lambda'}=\sup_{\kappa''}\Big\|\Big(\prod_{\mathrm{z}''(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}2^{-\tau\kappa}c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x)\Big)_{\lambda''}\mid\ell''_\theta\Big\|\quad\text{и}\quad f_{\kappa'}=\big\|\big(2^{(s-\tau)''\kappa''}2^{\tau\kappa}f_{\kappa\zeta}(x)\big)_{\kappa''}\mid\ell''_q\big\|$$

и простые оценки, имеем для произвольного $\kappa(1)$ $\big($ниже $\ell_q^{(i)}:=\ell_q(\mathbb{N}_0^{\#\mathrm{z}(i)})$, $i=1,2,3$, $\ell_q^{(4)}:=\ell_q(\mathbb{N}_0^{\#\dot{\mathrm{z}}(1)})$, $\dot{\mathrm{z}}(1)=\mathrm{z}(2)\cup\mathrm{z}(3)$; снова для определенности считаем, что $\mathrm{z}'(3)\neq\varnothing$, $\mathrm{z}''(3)\neq\varnothing\big)$

$$J^\iota_{\kappa(1)\zeta}(q,x):=\|\,(2^{(\dot\kappa(3),\lambda(3))w}\bar{h}^\iota_{(\dot\kappa(3),\lambda(3))\zeta}(x))\mid\ell_q^{(4)}\|$$

$$\ll\Big\|\Big(2^{\dot w(3)\dot\kappa(3)}\sup_{\kappa',\lambda'}\Big\{\sup_{\kappa''}\Big[\Big\|\Big(2^{-\tau\kappa}c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x)\prod_{\mathrm{z}(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)_{\lambda''}\mid\ell''_\theta\Big\|\Big]\Big\}$$

$$\times\Big\|\big(2^{(s-\tau)(3)\kappa(3)}2^{\tau\kappa}f_{\kappa\zeta}(x)\big)_{\kappa(3)}\mid\ell_q^{(3)}\Big\|\Big)_{\kappa(2)}\mid\ell_q^{(2)}\Big\|$$

$$\le\sup_{\dot\kappa(1)}\Big\{\sup_{\lambda'}\Big[\Big\|\Big(\prod_{\mathrm{z}(2)}2^{\upsilon_\nu(1-\epsilon_\nu)\kappa_\nu}\prod_{\mathrm{z}(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}2^{-\tau\kappa}c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x)\Big)_{\lambda''}\mid\ell''_\theta\Big\|\Big]\Big\}\|\big(2^{s\kappa}f_{\kappa\zeta}(x)\big)_{\dot\kappa(1)}\mid\ell_q^{(4)}\|$$

$$\le\sup_{\kappa(3)}\Big\{\sup_{\kappa(2)}\Big[\Big\|\Big(\prod_{\mathrm{z}(2)}2^{\upsilon_\nu(1-\epsilon_\nu)\kappa_\nu}\prod_{\mathrm{z}(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}2^{-\tau\kappa}c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x)\Big)_{\lambda(3)}\mid\ell_\theta^{(3)}\Big\|\Big]\Big\}\|\big(2^{s\kappa}f_{\kappa\zeta}(x)\big)_{\dot\kappa(1)}\mid\ell_q^{(4)}\|.$$

Нетрудно видеть, что (в виду (6.24))

$$\sup_{\kappa(2)}\Big[\Big\|\Big(2^{-\tau\kappa}c^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\lambda(3)\zeta}(x)\prod_{\mathrm{z}(2)}2^{\upsilon_\nu(1-\epsilon_\nu)\kappa_\nu}\prod_{\mathrm{z}(3)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)_{\lambda(3)}\mid\ell_\theta^{(3)}\Big\|\Big]\ll\sup_{\kappa(2)}\Big[\Big\|\Big(2^{-\tau\kappa}d^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\zeta\dot\lambda(1)}(x)$$

$$\times\prod_{\dot{\mathrm{z}}(1)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)_{\dot\lambda(1)}\mid\ell_\theta^{(4)}\Big\|\Big]\le\sup_{\kappa(2)}\Big[\Big\|\Big(2^{-\tau\kappa}\|d^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\zeta\dot\lambda(1)}(x)\mid L_\infty(\mathbb{T}^{\dot{\mathtt{m}}(1)})\|\prod_{\dot{\mathrm{z}}(1)}2^{\upsilon_\nu(\lambda_\nu-\epsilon_\nu\kappa_\nu)}\Big)_{\dot\lambda(1)}\mid\ell_\theta^{(4)}\Big\|\Big]$$

$$=\sup_{\kappa(2)}\Big[\|a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}(\,\cdot\,,x[1])\mid B^{\dot\upsilon(1)\dot{\mathtt{m}}(1)}_{\infty\theta}\|2^{-\tau\kappa}\prod_{\dot{\mathrm{z}}(1)}2^{-\upsilon_\nu\epsilon_\nu\kappa_\nu}\Big]\ll\|a\mid\widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]\|\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}\langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathrm{K}_\nu},$$

где

$$d^{\mathtt{r}\iota}_{\kappa\zeta\dot\lambda(1)}(x)=\Big(\Big(a^{\mathtt{r}}_{\kappa\zeta}*_2\sum_{\xi[2]\in\mathbb{Z}^{\mathtt{m}(2)}}\eta^{(\mathtt{m}(2))}_{\lambda(2)}(\xi[2])e^{2\pi i\,\xi[2]x[2]}\Big)*_3\sum_{\xi[3]\in\mathbb{Z}^{\mathtt{m}(3)}}\eta^{(\mathtt{m}(3))}_{\lambda(3)}(\xi[3])e^{2\pi i\,\xi[3]x[3]}\Big)(x).$$

Следовательно, $(\forall x \in \mathbb{T}^m,\ \forall \kappa(1) \in \mathbb{N}_0^{\#\mathrm{z}(1)})$

$$J^{\iota}_{\kappa(1)\zeta}(q,x) \ll \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]\big\| \prod_{\nu\in \mathrm{z}_n} \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathrm{K}_\nu} \big\|\big(2^{s\kappa} f_{\kappa\zeta}(x)\big)_{\dot\kappa(1)} \,|\, \ell_q^{(4)}\big\|. \tag{6.32}$$

Из леммы 4 и определения $\Theta^{(1)}_{\kappa(1)}(x[1]))$ получаем (для любого $\kappa(1)$)

$$\big\|\Theta^{(1)}_{\kappa(1)} \,|\, L_1(\mathbb{T}^{\mathtt{m}(1)})\big\| = \prod_{\mathrm{z}(1)} \Big\| \sum_{\xi^\nu} \eta_0^{(m_\nu)}(2^{2-\kappa_\nu}\xi^\nu) e^{2\pi i \xi^\nu x^\nu} \,|\, L_1(\mathbb{T}^{m_\nu})\Big\| \le \prod_{\mathrm{z}(1)} \big\|\mathcal{F}^{-1}_{m_\nu}(\eta_0^{(m_\nu)}) \,|\, L_1(\mathbb{R}^{m_\nu})\big\|.$$

Поэтому и по лемме 3 (с $p=\infty$, $\mathrm{z}=\mathrm{z}(1)$, $f=\Theta^{(1)}_{\kappa(1)}$ и $(\bar h^{\iota}_{(\dot\kappa(3),\lambda(3))\zeta})$, $\ell_q^{(4)}$ вместо (g_κ), ℓ_q) из (6.32) находим, что для любого $\kappa(1)$

$$\big\|\,(2^{(\dot\kappa(3),\lambda(3))w} h^{\iota}_{(\dot\kappa(3),\lambda(3))\zeta}(x)) \,|\, \ell_q^{(4)}\big\| \ll \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]\big\| \prod_{\nu\in \mathrm{z}_n} \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathrm{K}_\nu} \big\|\big(2^{s\kappa} f_{\kappa\zeta}(x)\big)_{\dot\kappa(1)} \,|\, \ell_q^{(4)}\big\|,$$

и завершаем оценку правой части (6.29):

$$\mathrm{J}^{\iota}_{\zeta}(p,q) \ll \|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]\| \prod_{\nu\in \mathrm{z}_n} \langle\zeta^\nu\rangle^{1-\mathrm{K}_\nu} \|\big(2^{s\kappa} f_{\kappa\zeta}\big) \,|\, L_p(\ell_q)\|. \tag{6.33}$$

Итак, из (6.26), (6.29), (6.33), (6.27) (с учетом части B) подразд. 6.2 и выбора $\mathtt{u}$) следует ограниченность ПДО T_a из $L^{s\mathtt{m}}_{pq}$ в $L^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}$:

$$\big\|T_a f \,|\, L^{s-\tau\mathtt{m}}_{pq}\big\| \ll \big\|a \,|\, \widetilde{\Psi}^{\tau\mathtt{m}}_{\epsilon\,\theta}[\upsilon;\mathrm{K},\mathrm{L}]\big\| \big\|f \,|\, L^{s\mathtt{m}}_{pq}\big\|.$$

Таким образом, для пространств типа Лизоркина — Трибеля утверждение теоремы 2 полностью доказано. Случай пространств типа Никольского — Бесова разбирается аналогично (и чуть проще), надо лишь в соответствующих местах применять часть I предложения 3 (вместо части II).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987. 696 с.
2. **Chang S.-Y.A., Fefferman R.** Some recent developments in Fourier analysis and H^p–theory on product domains// Bull. Amer Math. Soc. 1985. Vol. 12. P.1–43.
3. **Fefferman R.** Harmonic analysis on product spaces // Ann. Math. 1987. Vol. 126, no. 1. P. 109–130. doi: 10.2307/1971346.
4. **Yamazaki M.** Boundedness of product type pseudodifferential operators on spaces of Besov type // Math. Nachr. 1987. Vol. 133, no. 1. P. 297–315. doi: 10.1002/mana.19871330120.
5. **Carbery A., Seeger A.** H^p and L^p variants of multiparameter Calderon–Zygmund theory // Trans. Amer Math. Soc. 1992. Vol. 334, no. 2. P. 719–747.
6. **Stein E.M.** Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. 716 p.
7. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИ РАН. 2010. Т. 269. С. 8–30.
8. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II // Analysis Math. 2012. Vol. 38, no. 4. C. 249–289. doi: 10.1007/s10476-012-0401-3.
9. **Coifman R., Meyer Y.** Au-dela des operateurs pseudo–differentiels. Asterisque. 1978. Vol. 57. P. 1–185.
10. **Базарханов Д.Б.** $(L_p - L_q)$-ограниченность некоторых псевдодифференциальных операторов на n-мерном торе // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 6. С. 938–942.
11. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. 448 р.

12. **Schmeisser H. J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987. 300 p.
13. **Ruzhansky M., Turunen V.** Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics. Basel: Birkhäuser Springer, 2009. 709 p.
14. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. Москва: Наука, 1977. 456 с.
15. **Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е., Полиа Г.** Неравенства. Москва: Иностр. лит., 1948. 456 с.
16. **Стейн И., Вейс. Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 336 с.
17. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
18. **Бесов О. В.** Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Тр. МИАН. 1961. Т. 60. С. 42–81.

Поступила 09.08.2018
После доработки 06.11.2018
Принята к публикации 12.11.2018

Базарханов Дауренбек Болысбекович
канд. физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы
e-mail: dauren.mirza@gmail.com

REFERENCES

1. Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudodifferential operators.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985, 525 p. ISBN: 9783540499381 . Translated to Russian under the title *Analiz lineinykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 3. Psevdodifferentsial'nye operatory.* Moscow: Mir Publ., 1987, 696 p.
2. Chang S.-Y.A., Fefferman R. Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains. *Bull. Amer Math. Soc.*, 1985, vol. 12, pp. 1–43. doi: 10.1090/S0273-0979-1985-15291-7 .
3. Fefferman R. Harmonic analysis on product spaces. *Ann. Math.*, 1987, vol. 126, no. 1, pp. 109–130. doi: 10.2307/1971346 .
4. Yamazaki M. Boundedness of product type pseudodifferential operators on spaces of Besov type. *Math. Nachr.*, 1987, vol. 133, no. 1, pp. 297–315. doi: 10.1002/mana.19871330120 .
5. Carbery A., Seeger A. H^p and L^p variants of multiparameter Calderon–Zygmund theory. *Trans. Amer Math. Soc.*, 1992, vol. 334, no. 2, pp. 719–747. doi: 10.2307/2154479 .
6. Stein E.M. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993, 716 p.
7. Bazarkhanov D.B. Wavelet approximation and Fourier widths of classes of periodic functions of several variables. I. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 2–24. doi: 10.1134/S0081543810020021 .
8. Bazarkhanov D.B. Wavelet approximation and Fourier widths of classes of periodic functions of several variables. II. *Analysis Math.*, 2012, vol. 38, no. 4, pp. 249–289. doi: 10.1007/s10476-012-0401-3 .
9. Coifman R., Meyer Y. Au-dela des operateurs pseudo–differentiels. *Asterisque*, 1978, vol. 57, pp. 1–185.
10. Bazarkhanov D.B. $(L_p - L_q)$-boundedness of pseudodifferential operators on the n-dimensional torus. *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 6, pp. 873–877. doi: 10.1134/S000143461711027X .
11. Triebel H. *Theory of function spaces.* Birkhauser, 1983. 281 p. ISBN: 3764313811 . Translated to Russian under the title *Teoriya funktsional'nykh prostranstv.* Moscow: Mir Publ., 1986.
12. Schmeisser H.J., Triebel H. *Topics in Fourier analysis and function spaces.* Chichester: J. Wiley & Sons, 1987, 300 p. ISBN: 0-471-90895-9 .
13. Ruzhansky M., Turunen V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics.* Basel; Birkhauser: Springer, 2009, 709 p. DOI: 10.1007/978-3-7643-8514-9 .
14. Nikolski S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* New York, Springer-Verlag, 1975. Original Russian text (2nd ed.) published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya. 2-e izd.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 455 p.

15. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press, 1934, 340 p. ISBN(2nd ed.): 0-521-05206-8 . Translated to Russian under the title *Neravenstva.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1948, 456 p.
16. Stein E.M. and Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.
17. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables. In: Azarin V.S. et al (eds.), *Thirteen papers on functions of real and complex variables.* Providence: American Math. Soc., 1969, 278 p. (pp. 1–38). ISBN: 978-1-4704-3291-1 .
18. Besov O.V. Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension. *American Math. Soc., Transl., II*, 1964, vol. 40, pp. 85–126.

Received August 09, 2018
Revised November 06, 2018
Accepted November 12, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP05133257).

Dauren B. Bazarkhanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, 050010 Kazakhstan, e-mail: dauren.mirza@gmail.com .