ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 519.83

РЕЛАКСАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИТЕРАЦИЙ[1]

А. Г. Ченцов, Д. М. Хачай

Для дифференциальной игры сближения-уклонения используется вариант метода программных итераций, называемый итерациями стабильности. Множество успешной разрешимости одной из задач, порождающих игру, определяется в виде предела итерационной процедуры в пространстве множеств, элементами которых являются позиции игры. Последняя определяется в дальнейшем парой замкнутых множеств, одно из которых является целевым в задаче о сближении (задача игрока I), а второе определяет фазовые ограничения в данной задаче. Для позиций, не принадлежащих множеству разрешимости задачи сближения, представляет интерес определение наименьшего "размера" окрестности двух упомянутых множеств, при которых игрок I располагает возможностью гарантированного осуществления наведения на соответствующую данному "размеру" окрестность целевого множества в пределах аналогичной окрестности второго множества, т. е. множества, определяющего фазовые ограничения задачи. Аналогичные построения рассматриваются и для множеств, реализующихся на каждом этапе итерационной процедуры. Используется связь этих построений с ранее упомянутым наименьшим "размером" окрестностей множеств — параметров дифференциальной игры — в смысле гарантированной осуществимости наведения при замене исходных множеств вышеупомянутыми окрестностями.

Ключевые слова: дифференциальная игра сближения-уклонения, метод программных итераций, гарантированное наведение.

A. G. Chentsov, D. M. Khachai. Relaxation of the pursuit–evasion differential game and iterative methods.

A variant of the program iteration method called stability iterations is used for a differential game of pursuit–evasion. The successful solvability set of one of the problems generating the game is found as a limit of the iterative procedure in the space of sets whose elements are positions of the game. The game is defined by a pair of closed sets, one of the which is the objective set in the pursuit problem (the first player's problem) and the other specifies the state constraints in this problem. For the positions not belonging to the solvability set of the pursuit problem, it is interesting to determine the smallest "size" of a neighborhood of the two mentioned sets for which the first player can implement the guidance to the neighborhood of the objective set corresponding to this "size" within the similar neighborhood of the second set, i.e., the set specifying the state constraints. Similar constructions are considered for the sets realized at each stage of the iterative procedure. We use the connection of these constructions with the mentioned smallest "size" of neighborhoods of the sets that are parameters of the differential game in the sense of guaranteed realizability of guidance under the replacement of the original sets by these neighborhoods.

Keywords: differential game of pursuit–evasion, program iteration method, guaranteed guidance.

MSC: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-246-269

Введение

В статье рассматривается нелинейная дифференциальная игра (ДИ) сближения-уклонения, определяемая в настоящем изложении парой замкнутых множеств в пространстве позиций. Данная постановка соответствует [1; 2]; для упомянутой ДИ в [1] установлена фундаментальная теорема об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Согласно этой теореме множество, определяющее фазовые ограничения (ФО), допускает разбиение в сумму двух (дизъюнктных) подмножеств (п/м), определяющих множества успешной разрешимости задач сближения и уклонения. При условии существования седловой точки в маленькой игре, т. е. при выполнении условия Айзекса, вышеупомянутая альтернатива реализуется в классах

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00505.

чистых позиционных стратегий; в более общем случае требуется привлекать контрстратегии одного из игроков или смешанные стратегии. В связи с исследованием структуры ДИ отметим важную роль позиционной формализации Н. Н. Красовского и конструкции на основе негладкого анализа, предложенные и развитые А. И. Субботиным. Известно, что вышеупомянутое разбиение отвечает также решению ДИ в классах квазистратегий (в связи с прикладными задачами, приводящими к постановкам теории ДИ, и понятием квазистратегий см. [3–5]; многозначные варианты квазистратегий рассматривались в [6–8] и в других работах). Построение альтернативного разбиения сводится к определению множества успешной разрешимости игрока I (т. е. множества позиционного поглощения, максимального стабильного моста Н. Н. Красовского), заинтересованного в гарантированной осуществимости сближения. Для построения данного множества применялись различные методы. В работах В. Н. Ушакова и его учеников использовались процедуры, отвечающие схеме на основе динамического программирования (см. [9–11]). Наряду с этим для решения ДИ традиционно использовались программные конструкции, в частности это касается класса регулярных ДИ (см. [2; 12; 13] и другие).

Для решения ДИ в общем случае был предложен метод программных итераций (МПИ) (см. [6; 7; 14–16]). Один из вариантов МПИ используется и в настоящей работе, мы называем его итерациями стабильности [17; 18]. С этим вариантом удалось связать подход к решению еще одной задачи, а именно, задачи уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления (см. [19–21]). Точнее, на каждом этапе итерационной процедуры мы получаем множество разрешимости задачи уклонения с вышеупомянутым дополнительным ограничением.

При этом оказывается [18, теорема 9.1, следствие 9.1], что данная задача уклонения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача строгого уклонения, т. е. уклонения по отношению к некоторым окрестностям множеств, являющихся параметрами задачи. В этой связи возникает вопрос о том, с каким именно "запасом" возможно решение задачи уклонения (с ограничением на число переключений или без данного ограничения) для той или иной позиции из множества разрешимости игрока-уклониста. Данный запас можно оценить, используя факт альтернативной разрешимости и привлекая к рассмотрению задачу сближения, решение которой рассматривается в классе квазистратегий. При этом исходная задача сближения подвергается своеобразной релаксации: ослабляются фазовые ограничения, а целевое множество заменяется той или иной его замкнутой окрестностью, "размер" которой можно оптимизировать. Изучению этого вопроса посвящена, в частности, и настоящая работа. Отметим, что достаточно подробное содержательное обсуждение задачи уклонения с ограничением на число переключений приведено в [18, разд. 1].

Напомним, что в [1; 2] предполагалось, что целевое множество и множество, определяющее ФО, являются замкнутыми в пространстве позиций с топологией покоординатной сходимости. В [18] и некоторых других работах рассматривается более общий случай, отвечающий ситуации, когда множество, формирующее ФО, необязательно замкнуто в вышеупомянутом смысле, но имеет замкнутые сечения. В настоящей работе данный случай не рассматривается: обсуждается ДИ с замкнутыми множествами (т. е. замкнуто и множество, определяющее ФО). С учетом этого условимся называть данную ДИ замкнутой.

1. Общие определения и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика. *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Каждому объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z: $z \in \{z\}$. Множеству X сопоставляем семейство $\mathcal{P}(X)$ всех п/м X и полагаем $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, получаем семейство всех непустых п/м X.

Дадим определение следа семейства на множество. Пусть $\mathcal{A}$ — непустое семейство и B —

множество, тогда *след семейства* $\mathcal{A}$ на множество B определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)).$$

Если A и B — непустые множества, то B^A есть по определению множество всех отображений из A в B.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство (ТП), тогда $\mathbb{C}_X[\tau]$ — семейство всех замкнутых п/м X: $\mathbb{C}_X[\tau] \triangleq \{X \setminus G\colon G \in \tau\}$. В дальнейшем, как правило, используются метризуемые пространства, т. е. ТП, порождаемые метриками. Соответственно будем использовать ε-окрестности непустых множеств, отвечающих используемой метрике.

Если E — множество и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma^0_E(\mathcal{E})$ условимся обозначать σ-алгебру п/м E, порожденную [21, гл. I] семейством $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}$ — топология на E, то $\sigma^0_E(\mathcal{E})$ есть σ-алгебра борелевских п/м E. Для всякой σ-алгебры ξ в виде (E, ξ) имеем стандартное измеримое пространство (ИП). Для всякого (стандартного) ИП (E, ξ) через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\xi]$ обозначаем множество всех неотрицательных счетно-аддитивных мер на σ-алгебре ξ. В случае, когда ξ есть по определению σ-алгебра борелевских множеств в некотором ТП, меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\xi]$ называют *борелевскими.* Если топология порождена метрикой, то [22, гл. 1] упомянутые меры автоматически являются регулярными.

В последующем изложении мы фиксируем $n \in \mathbf{N}$ и промежуток $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta_0$. Рассматриваем $T \times \mathbb{R}^n$ в качестве пространства позиций, которое оснащаем метрикой ρ вида

$$((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \longmapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\})\colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \to [0, \infty[,$$

где (здесь и ниже) $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Разумеется, метрика ρ порождает топологию покоординатной сходимости, обозначаемую ниже через $\mathbf{t}$; получаем метризуемое ТП

$$(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t}). \tag{1.1}$$

Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, то через $\rho(\cdot, H) \triangleq (\rho(z, H))_{z \in T \times \mathbb{R}^n}$ обозначим функцию обычного расстояния в $(T \times \mathbb{R}^n, \rho)$ до множества H; см.[18, с. 289]. Тогда для $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ получаем в виде

$$S_0(H, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z, H) \le \varepsilon\} \tag{1.2}$$

замкнутую ε-окрестность H, т. е. $S_0(H, \varepsilon) \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП (1.1). Иными словами, $\mathcal{F} = \mathbb{C}_{T \times \mathbb{R}^n}(\mathbf{t})$ есть по определению семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в обычном смысле, $\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \subset \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$.

Определение (1.2) имеет смысл дополнить: если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$S_0(H, 0) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z, H) \le 0\} = \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z, H) = 0\}, \tag{1.3}$$

получая замыкание H в ТП (1.1). Теперь мы располагаем зависимостью

$$\varepsilon \longmapsto S_0(H, \varepsilon)\colon [0, \infty[\to \mathcal{F}. \tag{1.4}$$

Напомним, что (см. (1.3)) при $H \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ справедливо равенство $S_0(H, 0) = H$.

2. Обобщенные управления и траектории

В настоящем разделе в краткой форме излагается достаточно традиционная конструкция расширения задачи управления [8, гл. 4; 18, разд. 3]. Для произвольного $t \in T$ определим конечномерные компакты $[t, \vartheta_0]$, $Y_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P$ и $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q$, оснащаемые σ-алгебрами борелевских п/м $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{C}_t$ соответственно; через λ_t условимся обозначать сужение меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{T}_t$. При этом [23, с. 17] $\Omega_t = Y_t \times Q$. Если $K \in \mathcal{P}(Y_t)$, то $K \times Q \subset \Omega_t$; при $K \in \mathcal{K}_t$

имеем цилиндр $K \times Q \in \mathcal{C}_t$, а при $\Gamma \in \mathcal{T}_t$ получается, что $\Gamma \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$ и $\Gamma \times P \in \mathcal{K}_t$. Тогда нужные варианты обобщенных управлений (ОУ) характеризуются [18, (3.1)–(3.3)] следующим образом:

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda_t(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(\Gamma \times P) = \lambda_t(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}, \tag{2.2}$$

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(K \times Q) = \mu(K) \ \ \forall K \in \mathcal{K}_t\} \qquad \forall \mu \in \mathcal{R}_t. \tag{2.3}$$

Содержательная интерпретация ОУ из множеств (2.1)–(2.3) соответствует [18, с. 288]. Сейчас отметим только, что ОУ $\eta \in \mathcal{H}_t$ являются аналогами пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ обычных программных управлений.

Каждое из множеств (2.1)–(2.3) является непустым метризуемым компактом с относительной *-слабой топологией (подробнее см. [18, разд. 3]).

Через $\mathcal{B}$ условимся обозначать далее σ-алгебру борелевских п/м Q; если $v \in Q$, то $\delta_v \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{B}]$ определяем традиционно, т. е. как сужение меры Дирака на $\mathcal{B}$. Для более точного определения нужного варианта ОУ заметим, что при $t \in T$ полуалгебра $\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B} \triangleq \{K \times B \colon K \in \mathcal{K}_t, \ B \in \mathcal{B}\}$ измеримых прямоугольников порождает σ-алгебру $\mathcal{C}_t$ [22, с. 307–308]. Тогда при $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ через $\mu \otimes v$ обозначаем произведение мер μ и δ_v. При этом $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$.

Перейдем к построению обобщенных траекторий, следуя условиям А. В. Кряжимского [24]. Фиксируем непрерывное отображение (вектор-функцию) $f \colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$. Полагая, что при $t \in T$ $C_n([t, \vartheta_0])$ есть по определению множество всех непрерывных отображений из $[t, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$ (называемых ниже *n-вектор-функциями*), при $x(\cdot) \triangleq (x(\xi))_{\xi \in [t, \vartheta_0]} \in C_n([t, \vartheta_0])$ в виде

$$(\xi, u, v) \longmapsto f(\xi, x(\xi), u, v) \colon \Omega_t \to \mathbb{R}^n$$

имеем непрерывное (даже равномерно непрерывное) отображение на метризуемом компакте. Тогда при $\eta \in \mathcal{H}_t$ и $\theta \in [t, \vartheta_0]$ определен покомпонентно интеграл

$$\int\limits_{[t,\theta[\times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\, \eta\, (d(\xi, u, v)) \in \mathbb{R}^n.$$

Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, то

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \Big\{ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \mid x(t)$$

$$= x_* + \int\limits_{[t_*,t[\times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\, \eta\, (d(\xi, u, v)) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0] \Big\}$$

есть обобщенная интегральная воронка уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{2.4}$$

отвечающая фиксации позиции (t_*, x_*) и ОУ η. Следуя [24], полагаем, что при всяком выборе $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ множество решений (2.4) одноэлементно. С учетом этого полагаем, что

$$\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \tag{2.5}$$

таково, что $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}$. Полагаем так же, как и в [24], что выполнено условие равномерной ограниченности обобщенных траекторий (2.5). Для его формулировки введем следующее обозначение: если $\varkappa \in [0, \infty[$, то полагаем $\mathbb{B}_n(\varkappa) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varkappa\}$. Тогда упомянутое условие имеет вид

$$\forall a \in [0, \infty[\ \ \exists b \in [0, \infty[\colon \varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \ \ \forall t \in T \ \ \forall x \in \mathbb{B}_n(a) \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta_0].$$

С учетом [18, (3.7)] получаем, что при $t \in T$ и $v \in Q$ отображение

$$(x, \mu) \to \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v) \colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{R}_t \to C_n([t, \vartheta_0])$$

непрерывно в смысле естественной топологии произведения $\mathbb{R}^n$ с топологией покоординатной сходимости и $\mathcal{R}_t$ с относительной *-слабой топологией. Как следствие получаем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$ непустой компакт

$$\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) \colon \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \tag{2.6}$$

в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. Вектор-функции $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v)$, где $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, $v \in Q$, являются элементами компакта (2.6); будем их называть *v-траекториями*, стартующими из позиции (t_*, x_*).

3. Окрестностные свойства замкнутой дифференциальной игры сближения-уклонения и минимакс в классе квазистратегий

В настоящем разделе используем определения и положения, отмеченные в работе [18, разд. 4], применяя их в более частном случае замкнутой ДИ. С учетом этого зафиксируем множества

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F})\,\&\,(\mathbf{N} \in \mathcal{F}), \tag{3.1}$$

первое из которых является целевым для игрока I, а второе формирует фазовые ограничения в виде сечений $\mathbf{N}\langle t\rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \mathbf{N}\}$ $\forall t \in T$. Всюду в дальнейшем предполагаем, что $\mathbf{M} \neq \varnothing$ и $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$. Из (3.1) вытекает, что $\mathbf{M} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$. Следуя [18, (4.2), (4.3)], вводим операторы стабильности

$$\mathbb{A}[M] \colon \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n), \tag{3.2}$$

где $M \in \mathcal{F}$. В качестве M будем использовать $\mathbf{M}$ или $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$. Полезно отметить, что при $M \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}$ в силу [18, (4.3)] и (2.6) имеем

$$\begin{gathered}\mathbb{A}[M](F) = \{(t, x) \in F \mid \forall v \in Q\ \ \exists x(\cdot\,) \in \mathcal{X}_\pi(t, x, v)\ \ \exists \theta \in [t, \vartheta_0] \colon \\ ((\theta, x(\theta)) \in M)\,\&\,((\xi, x(\xi)) \in F\ \ \forall \xi \in [t, \theta])\}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Кроме того, если $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}|_N$, то

$$\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F}|_N, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{F}|_N = \{\widetilde{F} \in \mathcal{F} \mid \widetilde{F} \subset N\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})$. С учетом (3.4) получаем, что

$$\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F}\ \ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall N \in \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F}|_N.$$

Из (3.3) вытекает, что

$$\mathbb{A}[M](F) = \mathbb{A}[M \cap F](F)\ \ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F}. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е. В связи с (3.5) отметим два простых свойства оператора (3.2). Прежде всего

$$\mathbb{A}[M](F) \subset F\ \ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n).$$

Легко видеть (см. (3.3)), что имеет место свойство изотонности

$$\begin{gathered}\forall M_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall F_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall M_2 \in \mathcal{F}\ \ \forall F_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \\ ((M_1 \subset M_2)\,\&\,(F_1 \subset F_2)) \Rightarrow (\mathbb{A}[M_1](F_1) \subset \mathbb{A}[M_2](F_2)).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Напомним, что имеет место следующий аналог свойства секвенциальной непрерывности (в порядковом смысле) [18, предложение 4.3]: если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon \mathbb{N}\to\mathcal{F}$, $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon \mathbb{N}\to\mathcal{F}$, $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $F\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и при этом

$$((M_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow M)\,\&\,((F_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow F), \tag{3.7}$$

то $M\in\mathcal{F}$, $F\in\mathcal{F}$ и

$$(\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow \mathbb{A}[M](F). \tag{3.8}$$

В данном свойстве существенна импликация (3.7) $\Rightarrow$ (3.8). С учетом (1.4), в частности, имеем отображения

$$\varepsilon\longmapsto S_0(\mathbf{M},\varepsilon)\colon [0,\infty[\to\mathcal{F}, \tag{3.9}$$

$$\varepsilon\longmapsto S_0(\mathbf{N},\varepsilon)\colon [0,\infty[\to\mathcal{F}. \tag{3.10}$$

Поэтому располагаем операторами $\mathbb{A}[\mathbf{M}]$ и $\mathbb{A}[S_0(\mathbf{M},\varepsilon)]$ при $\varepsilon\in[0,\infty[$.

Напомним, что [18, разд. 5] каждой паре $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathcal{F}$ сопоставляются последовательность множеств $(\mathcal{W}_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0}\colon \mathbb{N}_0\to\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и предельное множество

$$\mathcal{W}(M,N)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{W}_k(M,N)\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n),$$

при этом

$$(\mathcal{W}_0(M,N)=N)\,\&\,(\mathcal{W}_{k+1}(M,N)=\mathbb{A}[M](\mathcal{W}_k(M,N))\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0) \tag{3.11}$$

и $\mathcal{F}\subset\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ определено в [18, разд. 4]; согласно [18, (10.1)] при $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathcal{F}$

$$(\mathcal{W}_k(M,N)\in\mathcal{F}|_N\ \ \forall k\in\mathbf{N}_0)\,\&\,(\mathcal{W}(M,N)\in\mathcal{F}|_N). \tag{3.12}$$

В нашем случае (при $N\in\mathcal{F}$) справедливо вложение $\mathcal{F}|_N\subset\mathcal{F}$, а тогда из (3.12) следует, в частности, что $\forall M\in\mathcal{F}\ \forall N\in\mathcal{F}$

$$(\mathcal{W}_k(M,N)\in\mathcal{F}\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0)\,\&\,(\mathcal{W}(M,N)\in\mathcal{F}). \tag{3.13}$$

Заметим, что согласно (3.3) при $M\in\mathcal{F}$, $F\in\mathcal{F}$ $M\cap F\subset\mathbb{A}[M](F)$. Как следствие из (3.11) имеем

$$M\cap\mathcal{W}_k(M,N)\subset\mathcal{W}_{k+1}(M,N); \tag{3.14}$$

тогда (см. (3.11), (3.14)), в частности, получаем вложение

$$M\cap N\subset\mathcal{W}_1(M,N).$$

Далее, имеем по индукции (см. (3.14)), что

$$M\cap N\subset M\cap\mathcal{W}_k(M,N)\qquad\forall k\in\mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Также согласно (3.11) $M\cap N\subset N=\mathcal{W}_0(M,N)$. Как следствие (см. (3.15)) получаем

$$M\cap N\subset\mathcal{W}(M,N). \tag{3.16}$$

Свойства (3.15) и (3.16) имеют место при любых $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathcal{F}$. В частности,

$$(\mathbf{M}\subset\mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N})\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0)\,\&\,(\mathbf{M}\subset\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})). \tag{3.17}$$

В силу (3.17) получаем, что

$$(\mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N})\neq\varnothing\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0)\,\&\,(\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})\neq\varnothing), \tag{3.18}$$

где
$$\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(\mathbf{M},\mathbf{N}). \tag{3.19}$$

Напомним, что при $\varepsilon \in [0,\infty[$ согласно (3.7)–(3.11) определены (см. (3.13)) последовательность

$$(\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)))_{k\in\mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{F} \tag{3.20}$$

и предельное множество
$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)) \in \mathcal{F}; \tag{3.21}$$

при этом (см. (3.11))

$$(\mathcal{W}_0(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)) = S_0(\mathbf{N},\varepsilon))\,\&\,(\mathcal{W}_{k+1}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))$$
$$= \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M},\varepsilon)](\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)))\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \tag{3.22}$$

и, кроме того,
$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)). \tag{3.23}$$

Напомним, что согласно построениям разд. 1, связанным с (1.4) в нашем случае $\mathbf{M} \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{N} \in \mathcal{F}$, имеем
$$(S_0(\mathbf{M},0) = \mathbf{M})\,\&\,(S_0(\mathbf{N},0) = \mathbf{N}). \tag{3.24}$$

Поэтому при $\varepsilon = 0$ построения (3.20)–(3.24) сводятся к (3.17)–(3.19). Следовательно, существенным для нас является второе свойство в (3.17): $\mathbf{M} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ есть непустое замкнутое (см.(3.1)) подмножество $\mathcal{W}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. Далее рассмотрим естественную связь (3.17) и (3.21). Для этого будем рассматривать множества $S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\ \varepsilon \in [0,\infty[$. При этом (см. (3.1))

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,\infty[} S_0(\mathbf{M},\varepsilon) = T \times \mathbb{R}^n.$$

Как следствие получаем, что

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,\infty[} (S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N},\varepsilon)) = T \times \mathbb{R}^n.$$

С учетом (3.9), (3.10) и (3.16)

$$S_0(\mathbf{M},\varepsilon) = S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N},\varepsilon) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)). \tag{3.25}$$

Тогда имеем равенство
$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon\in[0,\infty[} \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon)).$$

Это означает, что $\forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n\ \ \exists \varepsilon \in [0,\infty[: (t,x) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))$. Таким образом, при $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\Sigma_0(t,x) \triangleq \{\varepsilon \in [0,\infty[\ |\ (t,x) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), S_0(\mathbf{N},\varepsilon))\} \tag{3.26}$$

есть непустое подмножество $[0,\infty[$, а поэтому определено значение

$$\varepsilon_0(t,x) \triangleq \inf(\Sigma_0(t,x)) \in [0,\infty[. \tag{3.27}$$

Предложение 1. *Если* $(t_*,x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*,x_*) \in \Sigma_0(t_*,x_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о получается применением [18, следствие 5.2] в сочетании с (3.6), (3.11).

В качестве следствия отметим (см. (3.26)), что

$$(t,x)\in\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon_0(t,x)),S_0(\mathbf{N},\varepsilon_0(t,x)))\qquad\forall(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n.$$

Введем сейчас один вариант функционала на траекториях процесса. Если $t_*\in T,\ x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и $\theta\in[t_*,\vartheta_0]$, то полагаем, что

$$\omega(t_*,x(\cdot),\theta)=\sup\left(\{\rho((\theta,x(\theta)),\mathbf{M});\max_{t_*\le t\le\theta}\rho((t,x(t)),\mathbf{N})\}\right),\tag{3.28}$$

$\omega(t_*,x(\cdot),\theta)\in[0,\infty[$. Как следствие определяем при $t_*\in T$

$$\gamma_{t_*}\colon C_n([t_*,\vartheta_0])\to[0,\infty[$$

посредством условий $\forall\ x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$

$$\gamma_{t_*}(x(\cdot))\triangleq\min_{\theta\in[t_*,\vartheta_0]}\omega(t_*,x(\cdot),\theta).\tag{3.29}$$

Минимум в (3.29) достигается, поскольку $\rho((\cdot,x(\cdot)),\mathbf{M})$ и $\rho((\cdot,x(\cdot)),\mathbf{N})$ — равномерно непрерывные функции (см. также (3.28)).

Предложение 2. *Пусть $t_*\in T,\ x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и задано число $\varepsilon_*\in[0,\infty[$. Тогда эквивалентны следующие два положения*:

1) $\exists\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]\colon((\vartheta,x(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},\varepsilon_*))\,\&\,((t,x(t))\in S_0(\mathbf{N},\varepsilon_*)\ \ \forall t\in[t_*,\vartheta])$;
2) $\gamma_{t_*}(x(\cdot))\le\varepsilon_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинно 1). Подберем $\vartheta_*\in[t_*,\vartheta_0]$ так, чтобы

$$((\vartheta_*,x(\vartheta_*))\in S_0(\mathbf{M},\varepsilon_*))\,\&\,((t,x(t))\in S_0(\mathbf{N},\varepsilon_*)\ \ \forall t\in[t_*,\vartheta_*]).\tag{3.30}$$

Это означает, в частности, что

$$\rho((\vartheta_*,x(\vartheta_*)),\mathbf{M})\le\varepsilon_*.\tag{3.31}$$

Кроме того, из соотношения (3.30) вытекает неравенство $\rho((t,x(t)),\mathbf{N})\le\varepsilon_*\ \ \forall t\in[t_*,\vartheta_*]$. Поэтому

$$\max_{t_*\le t\le\vartheta_*}\rho((t,x(t)),\mathbf{N})\le\varepsilon_*.\tag{3.32}$$

Согласно (3.28), (3.31) и (3.32)

$$\omega(t_*,x(\cdot),\vartheta_*)\le\varepsilon_*.\tag{3.33}$$

Но согласно (3.29) имеем неравенство $\gamma_{t_*}(x(\cdot))\le\omega(t_*,x(\cdot),\vartheta_*)$, а поэтому $\gamma_{t_*}(x(\cdot))\le\varepsilon_*$ (см. (3.33)); тем самым установлено положение 2). Итак, из 1) следует 2).

Покажем обратное. В самом деле, пусть верно

$$\gamma_{t_*}(x(\cdot))\le\varepsilon_*.$$

Это означает в силу (3.29), что для некоторого $\theta_*\in[t_*,\vartheta_0]$ имеет место неравенство

$$\omega(t_*,x(\cdot),\theta_*)\le\varepsilon_*.\tag{3.34}$$

При этом согласно (3.28)

$$\omega(t_*,x(\cdot),\theta_*)=\sup\left(\{\rho((\theta_*,x(\theta_*)),\mathbf{M});\max_{t_*\le t\le\theta_*}\rho((t,x(t)),\mathbf{N})\}\right).\tag{3.35}$$

Из (3.34) и (3.35) вытекает, что

$$\rho((\theta_*, x(\theta_*)), \mathbf{M}) \leq \varepsilon_*, \tag{3.36}$$

и вместе с тем

$$\max_{t_* \leq t \leq \theta_*} \rho((t, x(t)), \mathbf{N}) \leq \varepsilon_*. \tag{3.37}$$

Из (1.2) и (3.36) следует, что

$$((\theta_*, x(\theta_*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \,\&\, (\max_{t_* \leq t \leq \theta_*} \rho((t, x(t)), \mathbf{N}) \leq \varepsilon_*). \tag{3.38}$$

С другой стороны, из (3.37) следует $\rho((t, x(t)), \mathbf{N}) \leq \varepsilon_* \ \ \forall t \in [t_*, \theta_*]$. Итак, получаем

$$(t, x(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*) \qquad \forall t \in [t_*, \theta_*].$$

Таким образом (см. (3.38)), истинна импликация: из 2) следует 1).

Предложение 2 доказано.

Напомним, что $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$. Тогда при $\varepsilon \in [0, \infty[\ \ S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \subset S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)$.

В дальнейшем будем рассматривать в качестве допустимых процедур управления первого игрока многозначные квазистратегии, определяемые в виде неупреждающих операторов на пространствах управлений-мер. Для этого, в свою очередь, полезно напомнить некоторые свойства измеримых пространств, используемых в разд. 2. Дополним построения, приведенные там. Для произвольного $t \in T$ зададимся компактом $Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q$ и σ-алгеброй $\mathcal{D}_t$ борелевских подмножеств Z_t. При этом для моментов времени $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$ $\mathcal{D}_{t_2} = \mathcal{D}_{t_1}|_{Z_{t_2}} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset Z_{t_2}\}$. Далее, при $t \in T$ имеем свойство $\Gamma \times Q \in \mathcal{D}_t \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t$. С учетом этого рассматриваем множество мер, которые в свою очередь являются аналогами борелевских отображений из $[t, \vartheta_0]$ в Q, а именно: $\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(\Gamma \times Q) = \lambda_t(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}$. Используем $\mathcal{E}_t$ в качестве множества обобщенных управлений второго игрока. Кроме того, отметим, что $D \underline{\times} P \triangleq \{(t, u, v) \in \Omega_t \mid (t, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t$. С учетом этого получаем, что (см. [25, (4.3)])

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \qquad \forall \nu \in \mathcal{E}_t.$$

Тем самым было введено семейство программ [8, с. 162] второго игрока на отрезке $[t, \vartheta_0]$.

Нам потребуются операции сужения и склеивания обобщенных управлений. Для этого напомним одно общее понятие и введем соответствующее обозначение: если X и Y — непустые множества, $h \in Y^X$ и $\widetilde{X} \in \mathcal{P}'(X)$, то $(h|\widetilde{X}) \triangleq (h(x))_{x \in \widetilde{X}} \in Y^{\widetilde{X}}$. В частности, в качестве X может использоваться семейство, а в качестве h — функция множества.

В случае $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$ имеем [25, разд. 4], что

$$\mathcal{C}_{t_2} = \mathcal{C}_{t_1}|_{\Omega_{t_2}} = \{H \in \mathcal{C}_{t_1} \mid H \subset \Omega_{t_2}\},$$

$$\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} = \mathcal{C}_{t_1}|_{[t_1, t_2[\times P \times Q} = \{H \in \mathcal{C}_{t_1} \mid H \subset [t_1, t_2[\times P \times Q\},$$

$$\mathcal{D}_{t_1}^{t_2} = \mathcal{D}_{t_1}|_{[t_1, t_2[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset [t_1, t_2[\times Q\},$$

получая при этом σ-алгебры множеств. В этой связи отметим, что (см. [25, (4.4)])

$$\mathcal{H}_{t_2} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_2}) \colon \eta \in \mathcal{H}_{t_1}\}, \qquad \mathcal{E}_{t_2} = \{(\nu \mid \mathcal{D}_{t_2}) \colon \nu \in \mathcal{E}_{t_1}\}.$$

Если $t_* \in T$, то полагаем, что $\widetilde{A}_{t_*}$ есть множество всех обобщенных многозначных квазистратегий (см. [25]) первого игрока на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$:

$$\widetilde{A}_{t_*} \triangleq \Big\{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0] \colon$$

$$((\nu_1 \mid \mathcal{D}_{t_*}^{\theta}) = (\nu_2 \mid \mathcal{D}_{t_*}^{\theta})) \Rightarrow (\{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^{\theta}) \colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^{\theta}) \colon \eta \in \alpha(\nu_2)\})\Big\}.$$

При $\alpha \in \widetilde{A}_{t_*}$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ имеем в виде $\alpha(\nu)$ непустое подмножество $\Pi_{t_*}(\nu)$; в частности, $\alpha(\nu) \subset \mathcal{H}_{t_*}$. Поэтому определено следующее множество-объединение (см. [25, (10.2)])

$$\widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha) \triangleq \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}_{t_*}),$$

являющееся множеством всех (совокупных) обобщенных управлений-мер, порождаемых квазистратегией $\alpha \in \widetilde{A}_{t_*}$. Из (3.26) и предложения 1 с учетом [25, предложение 10.3, следствие 10.2] вытекает следующее предложение.

Предложение 3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*) = \inf_{\alpha \in \widetilde{A}_{t_*}} \sup_{\eta \in \widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha)} \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot\,, t_*, x_*, \eta))$$

и при этом $\exists \tilde{\alpha}_* \in \widetilde{A}_{t_*} \colon \varepsilon_0(t_*, x_*) = \sup\limits_{\eta \in \widetilde{\Pi}_{t_*}(\tilde{\alpha}_*)} \gamma_{t_*}(\varphi(\cdot\,, t_*, x_*, \eta))$.

Таким образом установлено, что функция $\varepsilon_0 \colon T \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$, определяемая посредством (3.27), совпадает для каждой фиксированной позиции с минимаксом функционала платы γ в классе квазистратегий.

4. Аппроксимативная реализация зависимости $\varepsilon_0(t, x)$, $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

В настоящем разделе рассматриваются множества, реализующиеся на том или ином этапе итерационной процедуры. Полагаем, что

$$\Sigma_0^{(s)}(t, x) \triangleq \{\varepsilon \in [0, \infty[\, \mid (t, x) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon))\} \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Предложение 4. *Если* $s \in \mathbb{N}_0$ *и* $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\Sigma_0(t, x) \subset \Sigma_0^{(s)}(t, x)$.

Доказательство. Фиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Получаем множества $\Sigma_0(t_*, x_*)$ и $\Sigma_0^{(m)}(t_*, x_*)$. Пусть $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$. Тогда $\varepsilon_* \in [0, \infty[$ и при этом $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$, где согласно (3.23)

$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)) \subset \mathcal{W}_m(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)).$$

Отсюда получаем, что $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_m(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$; поэтому $\varepsilon_* \in \Sigma_0^{(m)}(t_*, x_*)$. Поскольку выбор ε_* был произвольным, установлено вложение $\Sigma_0(t_*, x_*) \subset \Sigma_0^{(m)}(t_*, x_*)$. Однако выбор m и позиции (t_*, x_*) также был произвольным, тем самым предложение 4 доказано.

Из предложения 4 вытекает, что $\varepsilon_0(t, x) \in \Sigma_0^{(s)}(t, x) \;\; \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \;\; \forall s \in \mathbb{N}_0$. Тогда, в частности, при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbf{N}_0$ в виде $\Sigma_0^{(s)}(t, x)$ имеем непустое подмножество $[0, \infty[$, а потому определено значение $\inf(\Sigma_0^{(s)}(t, x)) \in [0, \infty[$.

Полагаем в дальнейшем, что

$$\varepsilon_0^{(s)}(t, x) \triangleq \inf(\Sigma_0^{(s)}(t, x)) \qquad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{4.2}$$

Посредством (4.2) при каждом $s \in \mathbf{N}_0$ теперь определена функция

$$\varepsilon_0^{(s)} \colon T \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[.$$

В свою очередь из (4.2) и предложения 4 вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(s)}(t, x) \leq \varepsilon_0(t, x) \qquad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{4.3}$$

Обозначая через $\leqq$ поточечный порядок в множестве всех неотрицательных функций из $\mathbb{R}^{T \times \mathbb{R}^n}$, из (4.3) получаем, что $\varepsilon_0^{(s)} \leqq \varepsilon_0 \;\; \forall s \in \mathbb{N}_0$.

Предложение 5. *Если $s \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то непременно $\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$.*

Доказательство. Фиксируем $s \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Согласно (4.1)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)) \qquad \forall \varepsilon \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*). \tag{4.4}$$

Напомним, что согласно (4.2) $\varepsilon^* \triangleq \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) = \inf(\Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)) \in [0, \infty[$. Тогда для некоторой последовательности $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$ имеет место монотонная сходимость

$$(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \downarrow \varepsilon^*, \tag{4.5}$$

т. е. ε^* есть предел последовательности $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и при этом $\delta_{j+1} \le \delta_j \ \forall j \in \mathbb{N}$. В силу (4.5) имеем, что

$$((S_0(\mathbf{M}, \delta_k))_{k\in\mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*)) \,\&\, ((S_0(\mathbf{N}, \delta_k))_{k\in\mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*)). \tag{4.6}$$

Согласно [18, предложение 5.3] из (4.6) вытекает сходимость

$$(\mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \delta_k), S_0(\mathbf{N}, \delta_k)))_{k\in\mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*)). \tag{4.7}$$

В силу (4.4) имеем, однако, свойство $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \delta_k), S_0(\mathbf{N}, \delta_k)) \ \ \forall k \in \mathbf{N}$. Поэтому из (4.7) вытекает включение

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon^*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon^*)). \tag{4.8}$$

Предложение доказано (см. (4.1)).

В свою очередь, из (4.3) следует, в частности, корректность определения точной верхней грани $\sup(\{\varepsilon_0^{(s)}(t, x) \colon s \in \mathbb{N}_0\}) \in [0, \varepsilon_0(t, x)]$ при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$.

Предложение 6. *Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0(t_*, x_*) = \sup(\{\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) \colon s \in \mathbb{N}_0\})$.*

Доказательство. Для краткости полагаем, что $\Xi \triangleq \{\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) \colon s \in \mathbb{N}_0\}$, получая $\Xi \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon^*])$, где $\varepsilon^* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_*) \in [0, \infty[$. Таким образом, $\varepsilon_* \triangleq \sup(\Xi) \in [0, \varepsilon^*]$. Итак, $0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon^*$. Покажем, что $\varepsilon_* = \varepsilon^*$. В самом деле, допустим противное: $\varepsilon_* \ne \varepsilon^*$. Тогда имеем неравенство $\varepsilon_* < \varepsilon^*$. Вместе с тем согласно (3.27) $\varepsilon^* = \inf(\Sigma_0(t_*, x_*))$, где $\Sigma_0(t_*, x_*)$ — непустое подмножество $[0, \infty[$. Поэтому $\varepsilon_* \notin \Sigma_0(t_*, x_*)$, а это означает в силу (3.26), что

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)). \tag{4.9}$$

Согласно (3.23) и (4.9) для некоторого $r \in \mathbb{N}_0$

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)). \tag{4.10}$$

В силу (4.1) и (4.10) имеем

$$\varepsilon_* \notin \Sigma_0^{(r)}(t_*, x_*). \tag{4.11}$$

При этом согласно (4.3) $\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \le \varepsilon_0(t_*, x_*) = \varepsilon^*$. В связи с (4.10) напомним равенство (см. (4.1))

$$\Sigma_0^{(r)}(t_*, x_*) = \{\varepsilon \in [0, \infty[\mid (t_*, x_*) \in \mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon))\}. \tag{4.12}$$

При этом, учитывая предложение 5, получаем, что $\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \in \Sigma_0^{(r)}(t_*, x_*)$, причем

$$\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \le \varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in \Sigma_0^{(r)}(t_*, x_*).$$

По определению Ξ справедливо неравенство

$$\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*) \le \varepsilon_*. \tag{4.13}$$

Из (4.1), учитывая свойства гарантии $\varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)$, имеем

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*))). \tag{4.14}$$

В то же время согласно (4.11) и (4.12) получаем

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)). \tag{4.15}$$

Однако из (4.13) вытекает $(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*))\,\&\,(S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$. Как следствие получаем вложение

$$\mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0^{(r)}(t_*, x_*)) \subset \mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*)). \tag{4.16}$$

Наконец, согласно (4.14) и (4.16) получаем включение $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_r(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*))$, что противоречит (4.15). Тем самым, мы показали, что $\varepsilon_* = \varepsilon^*$.

Предложение 6 полностью доказано.

Сформулируем еще одно утверждение, устанавливающее соотношение между значениями $\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*)$ и $\varepsilon_0^{(s+1)}(t_*, x_*)$, где $s \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$.

Предложение 7. *Пусть* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $s \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) \le \varepsilon_0^{(s+1)}(t_*, x_*).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и значение $s \in \mathbb{N}_0$. По определению $\varepsilon_*^{(s)} \triangleq \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$, поэтому согласно (4.1)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(s)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(s)})).$$

С учетом (4.1) и предложения 5 имеем для $\varepsilon_*^{(s+1)} \triangleq \varepsilon_0^{(s+1)}(t_*, x_*)$, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_{s+1}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(s+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(s+1)})).$$

При этом в силу (3.3) и (3.22) получаем

$$\mathcal{W}_{s+1}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(s+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(s+1)})) \subset \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(s+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(s+1)})).$$

Следовательно, позиция (t_*, x_*) принадлежит множеству — итерации с номером s, т. е.

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*^{(s+1)}), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*^{(s+1)})).$$

Таким образом, получаем $\varepsilon_*^{(s+1)} \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*)$ согласно (4.1), поэтому $\varepsilon_*^{(s)} \le \varepsilon_*^{(s+1)}$, что означает справедливость предложения 7.

Тем самым, установлено, что имеет место следующее свойство:

$$\varepsilon_0^{(s)} \leqq \varepsilon_0^{(s+1)} \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0.$$

5. Оператор преобразования функций, определенных на пространстве позиций

В настоящем разделе конструируется программный оператор, который определяет, как будет показано ниже, при $s \in \mathbb{N}_0$ преобразование $\varepsilon_0^{(s)}$ в $\varepsilon_0^{(s+1)}$ без непосредственного обращения к множествам вида (3.20). Для этого будет использована программная конструкция, допускающая естественную идейную аналогию с работой [26]. Вариант метода программных итераций в [26] соответствует дифференциальной игре с нефиксированным моментом окончания; в связи с конструкциями метода программных итераций отметим также работы [27–30]. Далее потребуются некоторые новые понятия и обозначения; последние будут подобны соответствующим обозначениям [26].

Прежде всего введем функцию $\psi\colon T \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ посредством условия

$$\psi(t, x) \triangleq \rho((t, x), \mathbf{M}) \qquad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

По свойствам функции расстояния от точки до непустого множества $\mathbf{M}$ имеем, что $\psi \in C(T \times \mathbb{R}^n)$, где (здесь и ниже) $C(T \times \mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных вещественнозначных функций на $T \times \mathbb{R}^n$. Заметим, что

$$\psi^{-1}([0, c]) \in \mathcal{F} \qquad \forall c \in [0, \infty[; \tag{5.2}$$

(5.2) означает в силу неотрицательности ψ свойство полунепрерывности снизу.

В дальнейшем для всякого непустого множества H через $\mathfrak{R}_+(H)$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных функций на H.

В связи с (5.2) уместно, следуя [26, § 2], ввести в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} \triangleq \{g \in \mathfrak{R}_+(T \times \mathbb{R}^n) \mid g^{-1}([0, c]) \in \mathcal{F} \;\; \forall c \in [0, \infty[\}. \tag{5.3}$$

Кроме того, нам потребуется множество

$$\mathfrak{M}_\psi \triangleq \{g \in \mathfrak{M} \mid g \leqq \psi\}; \tag{5.4}$$

ясно, что $\psi \in \mathfrak{M}_\psi$. Итак, (5.4) есть непустое подмножество $\mathfrak{M}$.

Предложение 8. *Если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbb{N}_0$, то $\Sigma_0^{(s)}(t, x) = [\varepsilon_0^{(s)}(t, x), \infty[$.*

Доказательство является очевидным следствием (4.1) и положений [30, с. 32].

Предложение 9. *Если $b \in [0, \infty[$ и $s \in \mathbb{N}_0$, то*

$$(\varepsilon_0^{(s)})^{-1}([0, b]) = \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$. В силу (4.1) $b \in \Sigma_0^{(s)}(t, x)$, а тогда согласно (4.2) $\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*) \leq b$. Это означает, что $(t_*, x_*) \in (\varepsilon_0^{(s)})^{-1}([0, b])$. Итак,

$$\mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)) \subset (\varepsilon_0^{(s)})^{-1}([0, b]). \tag{5.5}$$

Пусть, напротив, $(t^*, x^*) \in (\varepsilon_0^{(s)})^{-1}([0, b])$, т. е. $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_0^{(s)}(t^*, x^*) \leq b$. Согласно предложению 8 $\Sigma_0^{(s)}(t^*, x^*) = [\varepsilon_0^{(s)}(t^*, x^*), \infty[$, а потому $b \in \Sigma_0^{(s)}(t^*, x^*)$ и, следовательно (см. (4.1)),

$$(t^*, x^*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)),$$

чем завершается проверка вложения, противоположного (5.5).

Предложение 10. *Если $b \in [0, \infty[$, то $(\varepsilon_0)^{-1}([0, b]) = \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$.*

Доказательство. Если $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b))$, то в силу (3.26) $b \in \Sigma_0(t_*, x_*)$, а потому согласно (3.27) $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leq b$. Иными словами, $(t_*, x_*) \in (\varepsilon_0)^{-1}([0, b])$. Имеем вложение

$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)) \subset (\varepsilon_0)^{-1}([0, b]). \tag{5.6}$$

Пусть $(t^*, x^*) \in (\varepsilon_0)^{-1}([0, b])$. Тогда $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_0(t^*, x^*) \leq b$. Поэтому, учитывая (1.2) и [30, с. 32], имеем

$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t^*, x^*)), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_0(t^*, x^*))) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)). \tag{5.7}$$

В силу предложения 1, (3.26) и (5.7) получаем включение

$$(t^*, x^*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, b)),$$

чем и завершается проверка вложения, противоположного (5.6).

Предложение 10 доказано.

Из (3.20) и предложения 9 вытекает, что $(\varepsilon_0^{(s)})^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}\ \ \forall b \in [0, \infty[\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0$. Тогда из (5.3) получаем, что

$$\varepsilon_0^{(s)} \in \mathfrak{M} \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{5.8}$$

Аналогичным образом из (3.21) и предложения 10 следует, что $(\varepsilon_0)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}\ \ \forall b \in [0, \infty[$. Учитывая (5.3), имеем

$$\varepsilon_0 \in \mathfrak{M}. \tag{5.9}$$

Предложение 11. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leq \psi(t_*, x_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом вложения $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ получаем, что $\rho((t_*, x_*), \mathbf{N}) \leq \rho((t_*, x_*), \mathbf{M}) = \psi(t_*, x_*)$. Это означает, что $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, \psi(t_*, x_*)) \cap S_0(\mathbf{N}, \psi(t_*, x_*))$ (см. (1.2), (1.4)). При этом, однако,

$$S_0(\mathbf{M}, \psi(t_*, x_*)) \subset S_0(\mathbf{N}, \psi(t_*, x_*)). \tag{5.10}$$

Полагая для краткости $\widetilde{M} \triangleq S_0(\mathbf{M}, \psi(t_*, x_*))$ и $\widetilde{N} \triangleq S_0(\mathbf{N}, \psi(t_*, x_*))$, получаем из (5.10), что $\widetilde{M} \subset \widetilde{N}$. Вместе с тем, как показано выше, $(t_*, x_*) \in \widetilde{M}$. При этом $\widetilde{M} \in \mathcal{F}$ и $\widetilde{N} \in \mathcal{F}$. Более того (см. [18, с. 291]),

$$(\widetilde{M} = \mathbb{A}[\widetilde{M}](\widetilde{M})) \Rightarrow (\widetilde{M} \subset \mathcal{W}(\widetilde{M}, \widetilde{N})). \tag{5.11}$$

Учитывая (3.3), получаем, что $\mathbb{A}[\widetilde{M}](\widetilde{M}) \subset \widetilde{M}$.

С другой стороны, если $(t^*, x^*) \in \widetilde{M}$, то непременно

$$\forall v \in Q\ \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t^*, x^*, v)\ \ \exists \theta \in [t^*, \vartheta_0]\colon ((\theta, x(\theta)) \in \widetilde{M})\,\&\,((t, x(t)) \in \widetilde{M}\ \ \forall t \in [t^*, \theta]).$$

Поэтому в силу (3.3) $(t^*, x^*) \in \mathbb{A}[\widetilde{M}](\widetilde{M})$. Итак, $\widetilde{M} \subset \mathbb{A}[\widetilde{M}](\widetilde{M})$; тем самым, мы показали равенство $\widetilde{M} = \mathbb{A}[\widetilde{M}](\widetilde{M})$.

В силу (5.11) $\widetilde{M} \subset \mathcal{W}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$. Исходя из определения множеств $\widetilde{M}, \widetilde{N}$, а также (3.26), получаем следующее включение

$$\psi(t_*, x_*) \in \Sigma_0(t_*, x_*).$$

С учетом (3.27) реализуется требуемое неравенство $\varepsilon_0(t_*, x_*) \leq \psi(t_*, x_*)$.

Предложение доказано.

Из предложения 11 следует, что $\varepsilon_0 \leqq \psi$. Поэтому из (5.4) и (5.9) получаем включение

$$\varepsilon_0 \in \mathfrak{M}_\psi. \tag{5.12}$$

С другой стороны, учитывая (4.3) и предложение 11, имеем, что

$$\varepsilon_0^{(s)}(t, x) \leq \psi(t, x) \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n.$$

Это означает, что $\varepsilon_0^{(s)} \leqq \psi\ \ \forall s \in \mathbb{N}_0$. Наконец, в силу (5.4) и (5.8) получаем, что

$$\varepsilon_0^{(s)} \in \mathfrak{M}_\psi \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{5.13}$$

Предложение 12. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\exists c \in [0, \infty[\colon \psi(t, x(t)) \leq c \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из условия равномерной ограниченности, получаем для некоторого числа $a \in]0, \infty[$ свойство

$$\|x(\xi)\| \leq a \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall \xi \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.14}$$

В силу (5.14) имеем по неравенству треугольника, что

$$\|x(t) - x_*\| \leq 2a \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Как следствие получаем, что для $b \triangleq \sup(\{\vartheta_0 - t_0; 2a\}) \in]0, \infty[$

$$\rho((t, x(t)), (t_*, x_*)) \leq b \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Определим при $(t^*, x^*) \in \mathbf{M}$ значение $\bar{c} \triangleq b + \rho((t_*, x_*), (t^*, x^*))$. Тогда $\bar{c} \in]0, \infty[$ и при этом, вновь используя неравенство треугольника, получаем, что

$$\psi(t, x(t)) \leq \rho((t, x(t)), (t^*, x^*)) \leq \bar{c} \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Предложение доказано.

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то (поскольку $g \leqq \psi$) имеем из предложения 12, что для некоторого $c \in [0, \infty[$

$$\{g(t, x(t)) \colon t \in [t_*, \vartheta]\} \in \mathcal{P}'([0, c]) \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]; \tag{5.15}$$

свойство (5.15) определяет полезное следствие

$$\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)) \leq c \ \ \forall v \in Q \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.16}$$

С учетом (5.16) и предложения 12 получаем при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, что $\exists \tilde{c} \in [0, \infty[$:

$$\sup(\{\sup_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} g(t, \bar{x}(t)); \psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta}))\}) \in [0, \tilde{c}] \ \ \forall v \in Q \ \ \forall \bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \ \ \forall \bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0].$$

Тогда при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\sup_{v \in Q} \ \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]} \ \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}) \in [0, \infty[. \tag{5.17}$$

Учитывая (5.17), определим оператор $\Gamma \colon \mathfrak{M}_\psi \to \mathfrak{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ следующим образом:

$$\forall g \in \mathfrak{M}_\psi \qquad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) \triangleq \sup_{v \in Q} \ \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]} \ \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}).$$

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$, то через $\mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v]$ обозначим функционал

$$(x(\cdot), \vartheta) \longmapsto \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}) \colon \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0] \to [0, \infty[; \tag{5.18}$$

кроме того, введем в рассмотрение множества Лебега: при $b \in [0, \infty[$

$$\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; v] \triangleq \{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0] \mid \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot), \vartheta) \leq b\}.$$

Предложение 13. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $v \in Q$ *и* $b \in [0, \infty[$, *то множество* $\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; v]$ *замкнуто в* $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]$ *с топологией, являющейся произведением топологии равномерной сходимости множества* $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$ *и обычной* $|\cdot|$*-топологии* $[t_*, \vartheta_0]$.

Доказательство. Зафиксируем g, позицию (t_*, x_*), управление v и число b в соответствии с условиями. Пусть $\mathcal{Y}_b \triangleq \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; v]$. В силу метризуемости топологии-произведения достаточно ограничиться проверкой секвенциальной замкнутости. Итак, выберем и зафиксируем последовательность $(z_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathcal{Y}_b$ и $z^* \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]$, для которых $(z_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \to z^*$. Обозначим $x_s^*(\cdot) \triangleq pr_1(z_s^*)$ и $\vartheta_s^* \triangleq pr_2(z_s^*)$, где $pr_1(z_s^*)$ и $pr_2(z_s^*)$ — первый и второй элементы упорядоченной пары z_s^* соответственно, $s \in \mathbb{N}$. Тогда

$$((x_s^*(\cdot))_{s\in\mathbb{N}} \rightrightarrows x^*(\cdot))\,\&\,((\vartheta_s^*)_{s\in\mathbb{N}} \to \vartheta^*), \tag{5.19}$$

где $x^*(\cdot) \triangleq pr_1(z^*)$ и $\vartheta^* \triangleq pr_2(z^*)$. Условимся о сокращении обозначений

$$(\mathfrak{h}(z_s^*) \triangleq \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v](z_s^*) \;\; \forall s \in \mathbb{N})\,\&\,(\mathfrak{h}(z^*) \triangleq \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v](z^*)). \tag{5.20}$$

Ясно, что $\mathfrak{h}(z_s^*) = \mathfrak{h}(x_s^*(\cdot), \vartheta_s^*)$, $s \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{h}(z^*) = \mathfrak{h}(x^*(\cdot), \vartheta^*)$. Тогда $\mathfrak{h}(z_k^*) \le b$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\mathfrak{h}(z^*) \le b$. Допустим противное: $\mathfrak{h}(z^*) > b$. Тогда (см. (5.20))

$$(\sup_{t\in[t_*, \vartheta^*]} g(t, x^*(t)) > b) \vee (\psi(\vartheta^*, x^*(\vartheta^*)) > b). \tag{5.21}$$

Напомним, что ψ — непрерывная функция, а потому с учетом (5.19) следует сходимость

$$(\psi(\vartheta_k^*, x_k^*(\vartheta_k^*)))_{k\in\mathbb{N}} \to \psi(\vartheta^*, x^*(\vartheta^*)). \tag{5.22}$$

Вместе с тем при $k \in \mathbb{N}$ имеем цепочку неравенств

$$\psi(\vartheta_k^*, x_k^*(\vartheta_k^*)) \le \mathfrak{h}(z_k^*) \le b.$$

Поэтому (см. (5.22)) $\psi(\vartheta^*, x^*(\vartheta^*)) \le b$, а тогда в силу (5.21)

$$\sup_{t\in[t_*, \vartheta^*]} g(t, x^*(t)) > b. \tag{5.23}$$

Вместе с тем по выбору z_s^*, $s \in \mathbb{N}$, имеем свойство

$$\sup_{t\in[t_*, \vartheta_k^*]} g(t, x_k^*(t)) \le \mathfrak{h}(z_k^*) \le b \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.24}$$

Из (5.23) следует, что для некоторого $t^* \in [t_*, \vartheta^*]$

$$b < g(t^*, x^*(t^*)). \tag{5.25}$$

Пусть $t_k^* \triangleq \inf(\{\vartheta_k^*; t^*\})$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Учитывая (5.19), можно легко проверить, что $(t_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \to t^*$. Как следствие реализуется сходимость

$$(\rho((t_k^*, x_k^*(t_k^*)), (t^*, x^*(t^*))))_{k\in\mathbb{N}} \to 0. \tag{5.26}$$

При этом согласно (5.24) имеем систему неравенств $g(t_k^*, x_k^*(t_k^*)) \le b$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Это означает, что $(t_k^*, x_k^*(t_k^*)) \in g^{-1}([0, b])$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Поскольку $g \in \mathfrak{M}_\psi$, получаем свойство $g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$, а тогда из (5.26) вытекает включение $(t^*, x^*(t^*)) \in g^{-1}([0, b])$, т. е. $g(t^*, x^*(t^*)) \le b$ вопреки (5.25).

Полученное противоречие показывает, что неравенство $\mathfrak{h}(z^*) > b$ невозможно и, стало быть, $\mathfrak{h}(z^*) \le b$. С учетом того, что $(z_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ и z^* выбирались произвольно, установлено, что $\mathcal{Y}_b$ замкнуто в упомянутой естественной топологии множества $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]$.

Предложение доказано.

Следствие. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $v \in Q$, *то*

$$\exists\, (\bar{x}(\cdot\,), \bar{\vartheta}) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0] \colon \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v](\bar{x}(\cdot\,), \bar{\vartheta})$$

$$= \inf_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)\times[t_*,\vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot\,), \vartheta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$. Для краткости полагаем $\mathfrak{h} \triangleq \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v]$. Тогда

$$\mathfrak{a} \triangleq \inf_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)\times[t_*,\vartheta_0]} \mathfrak{h}(x(\cdot\,), \vartheta) \in [0, \infty[. \tag{5.27}$$

Согласно определению множеств $\mathcal{Y}_b \triangleq \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; v]$, $b \in [0, \infty[$, всякий раз справедливо равенство $\mathcal{Y}_b = \mathfrak{h}^{-1}([0, b])$. Согласно предложению 13 имеем, что каждое из множеств $\mathcal{Y}_b$, $b \in [0, \infty[$, замкнуто в метризуемом компакте $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]$ с топологией произведения естественных метрических топологий $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v)$ и $[t_*, \vartheta_0]$. Заметим, что при $b_1 \in [0, \infty[$, $b_2 \in [0, \infty[$ непременно $(b_1 \le b_2) \Rightarrow (\mathcal{Y}_{b_1} \subset \mathcal{Y}_{b_2})$. Поэтому $\{\mathcal{Y}_b \colon b \in]\mathfrak{a}, \infty[\}$ есть центрированная система замкнутых подмножеств компакта. Как следствие по определению $\mathfrak{a}$ получаем

$$\bigcap_{a \in]\mathfrak{a},\infty[} \mathcal{Y}_a \neq \varnothing.$$

Пусть теперь $(x^*(\cdot\,), \vartheta^*) \in \bigcap_{a \in]\mathfrak{a},\infty[} \mathcal{Y}_a$. Тогда $(x^*(\cdot\,), \vartheta^*) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]$ и при этом $\mathfrak{h}(x^*(\cdot\,), \vartheta^*) \le a \ \forall a \in]\mathfrak{a}, \infty[$. Следовательно, $\mathfrak{h}(x^*(\cdot\,), \vartheta^*) \le \mathfrak{a}$, чем и завершается доказательство следствия, поскольку в силу (5.27) $\mathfrak{h}(x^*(\cdot\,), \vartheta^*) \ge \mathfrak{a}$.

Итак, из определения оператора Γ и доказанного выше следствия получаем, что

$$\forall g \in \mathfrak{M}_\psi \qquad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) = \sup_{v \in Q} \min_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)\times[t_*,\vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v](x(\cdot\,), \vartheta). \tag{5.28}$$

Теорема 1. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k+1)} = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $\varepsilon_0^{(k)} \in \mathfrak{M}_\psi$ и $\varepsilon_0^{(k+1)} \in \mathfrak{M}_\psi$, а также $\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}) \colon T \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$. Рассмотрим позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Сравним значения $(\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*) \in [0, \infty[) \,\&\, (\Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*, x_*) \in [0, \infty[)$. При этом согласно (5.28) имеем равенство

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*, x_*) = \sup_{v \in Q} \min_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)\times[t_*,\vartheta_0]} \mathfrak{h}[\varepsilon_0^{(k)}; t_*; x_*; v](x(\cdot\,), \vartheta). \tag{5.29}$$

Полагаем далее в рамках данного доказательства, что

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*)) \,\&\, (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*, x_*)), \tag{5.30}$$

получая два неотрицательных числа, где $a_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*)$. Поэтому в силу (4.1)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)).$$

Тогда $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)))$.

Это означает, что $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*))$ и при этом $\forall v \in Q \ \exists (x(\cdot\,), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \,\&\, ((t, x(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)) \ \forall t \in [t_*, \vartheta]).$$

Пусть $\bar{v} \in Q$, $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \bar{v})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$ таковы, что

$$((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \,\&\, ((t, \bar{x}(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)) \;\; \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]). \tag{5.31}$$

Тогда (см. (3.1), (4.1), (4.2), (5.31)) получаем следующие свойства:

$$(\psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \le a_*) \,\&\, (\varepsilon_0^{(k)}(t, \bar{x}(t)) \le a_* \;\; \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]). \tag{5.32}$$

С учетом (5.18) и (5.32) получаем, что $\mathfrak{h}[\varepsilon_0^{(k)}; t_*; x_*; \bar{v}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \le a_*$. Тем более имеем неравенство

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \bar{v}) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}[\varepsilon_0^{(k)}; t_*; x_*; \bar{v}](x(\cdot), \vartheta) \le a_*. \tag{5.33}$$

Поскольку выбор $\bar{v}$ был произвольным, установлено (см. (5.29), (5.33)), что

$$b_* = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*, x_*) \le a_*. \tag{5.34}$$

Проверим справедливость противоположного неравенства. Зададимся управлением $\hat{v} \in Q$. С учетом (5.29) и (5.30), а также их следствия имеем для некоторых $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, \hat{v})$ и $\hat{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$ неравенство $\mathfrak{h}[\varepsilon_0^{(k)}; t_*; x_*; \hat{v}](\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \le b_*$. Поэтому $\psi(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \le b_*$ и $\varepsilon_0^{(k)}(t, \hat{x}(t)) \le b_*$ $\forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]$. Тогда в силу (5.1)

$$(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*).$$

С другой стороны, в силу (4.1) и предложения 8 получаем при $t \in [t_*, \hat{\vartheta}]$, что $b_* \in \Sigma_0^{(k)}(t, \hat{x}(t))$, а потому $(t, \hat{x}(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))$. Поскольку выбор $\hat{v} \in Q$ был произвольным, удалось установить, что

$$\forall v \in Q \;\; \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]:$$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)) \,\&\, ((t, x(t)) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*)) \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta]).$$

Поскольку, как легко видеть, $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*))$, имеем (см. (3.3), (3.22)) включение

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, b_*)). \tag{5.35}$$

Итак, в силу (4.1) и (5.35) получаем, что $b_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*)$; тем самым, установлено, что $a_* \le b_*$; следовательно (см. (5.34)), $a_* = b_*$. Возвращаясь к определениям a_* и b_*, имеем равенство $\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)})(t_*, x_*)$, а поскольку позиция (t_*, x_*) выбиралась произвольно, то $\varepsilon_0^{(k+1)} = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)})$.

Теорема 1 полностью доказана.

6. Свойство неподвижной точки

В этом разделе устанавливается важное свойство оператора Γ, а именно, мы укажем его неподвижную точку. Но сначала отметим некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 14. *Справедливо равенство* $\varepsilon_0^{(0)} = \rho(\cdot, \mathbf{N})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что

$$\mathcal{W}_0(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)) = S_0(\mathbf{N}, \varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in [0, \infty[. \tag{6.1}$$

Далее, согласно (4.1) и (6.1) получаем равенство

$$\Sigma_0^{(0)}(t, x) = \{\varepsilon \in [0, \infty[\mid (t, x) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon)\} \qquad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

При этом, учитывая (4.2), имеем свойства

$$\varepsilon_0^{(0)}(t,x) = \inf(\Sigma_0^{(0)}(t,x)) \qquad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n;$$

$$\varepsilon_0^{(0)}(t,x) \in \Sigma_0^{(0)}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

Далее, опираясь на утверждение, указанное в предложении 8, имеем равенства

$$\Sigma_0^{(0)}(t,x) = [\varepsilon_0^{(0)}(t,x), \infty[\qquad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{6.4}$$

Напомним также, что

$$S_0(\mathbf{N}, \varepsilon) \triangleq \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho((t,x), \mathbf{N}) \le \varepsilon\} \qquad \forall \varepsilon \in [0, \infty[. \tag{6.5}$$

При этом

$$\rho(\cdot\,, \mathbf{N}) = (\rho((t,x), \mathbf{N}))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathfrak{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$$

и $\varepsilon_0^{(0)} \in \mathfrak{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Сравним значения $\rho((t_*, x_*), \mathbf{N})$ и $\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*)$. Из (6.3) вытекает, что $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*) \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*)$, а потому согласно (6.2)

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \varepsilon_*); \tag{6.6}$$

тем самым, в силу (6.5) и (6.6) получаем неравенство

$$\rho((t_*, x_*), \mathbf{N}) \le \varepsilon_*. \tag{6.7}$$

С другой стороны, $\rho((t_*, x_*), \mathbf{N}) \in [0, \infty[$ и при этом

$$S_0(\mathbf{N}, \rho((t_*, x_*), \mathbf{N})) = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho((t,x), \mathbf{N}) \le \rho((t_*, x_*), \mathbf{N})\},$$

откуда следует, что $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \rho((t_*, x_*), \mathbf{N}))$, а потому в силу (6.2) и (6.4)

$$\rho((t_*, x_*), \mathbf{N}) \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*). \tag{6.8}$$

Однако, в силу (6.4) $\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*) = [\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*), \infty[$, а тогда согласно (6.8)

$$\varepsilon_* = \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*) \le \rho((t_*, x_*), \mathbf{N}). \tag{6.9}$$

Итак, учитывая (6.7), (6.9) и тот факт, что выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, получаем равенство $\varepsilon_0^{(0)} = \rho(\cdot, \mathbf{N})$.

Предложение доказано.

Предложение 15. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, *то* $g \leqq \Gamma(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим при $v \in Q$ функцию $\mathfrak{h}_*^{(v)} \triangleq \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; v]$, определяемую (см. (5.18)) следующим образом:

$$\mathfrak{h}_*^{(v)}(x(\cdot\,), \vartheta) = \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}) \quad \forall x(\cdot\,) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{6.10}$$

Напомним, что справедливо равенство

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) = \sup_{v \in Q} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}_*^{(v)}(x(\cdot\,), \vartheta) \tag{6.11}$$

и $Q \neq \varnothing$. Теперь выберем и зафиксируем управление $v_0 \in Q$; тем самым, получаем согласно (6.10)

$$\mathfrak{h}_*^{(v_0)}(x(\cdot\,), \vartheta) = \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, x(t)); \psi(\vartheta, x(\vartheta))\}) \quad \forall x(\cdot\,) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v_0) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Заметим, что в силу (6.11)

$$\min_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v_0) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}_*^{(v_0)}(x(\cdot\,), \vartheta) \leq \Gamma(g)(t_*, x_*). \tag{6.12}$$

Рассмотрим оценку значения в левой части выражения. Пусть $\bar{x}(\cdot\,) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v_0)$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$, тогда

$$\mathfrak{h}_*^{(v_0)}(\bar{x}(\cdot\,), \bar{\vartheta}) = \sup(\{\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} g(t, \bar{x}(t)); \psi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta))\}) \geq \sup(\{g(t_*, \bar{x}(t_*)); \psi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta))\}) \geq g(t_*, \bar{x}(t_*)),$$

где $\bar{x}(t_*) = x_*$. Получили неравенство $\mathfrak{h}_*^{(v_0)}(\bar{x}(\cdot\,), \bar{\vartheta}) \geq g(t_*, x_*)$. Поскольку выбор траектории $\bar{x}(\cdot\,)$ и момента времени $\bar{\vartheta}$ был произвольным, удалось установить, что

$$\mathfrak{h}_*^{(v_0)}(x(\cdot\,), \vartheta) \geq g(t_*, x_*) \qquad \forall (x(\cdot\,), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v_0) \times [t_*, \vartheta_0].$$

Следовательно,

$$\min_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v_0) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}_*^{(v_0)}(x(\cdot\,), \vartheta) \geq g(t_*, x_*),$$

откуда с учетом (6.12) получаем неравенство $g(t_*, x_*) \leq \Gamma(g)(t_*, x_*)$. Наконец, ввиду того, что выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, имеем $g \leqq \Gamma(g)$.

Предложение доказано.

Перед тем, как сформулировать основную теорему раздела о неподвижной точке оператора Γ, отметим полезное утверждение относительно изотонности Γ.

Предложение 16. *Если $g_1 \in \mathfrak{M}_\psi$ и $g_2 \in \mathfrak{M}_\psi$, то истинна импликация*

$$(g_1 \leqq g_2) \Rightarrow (\Gamma(g_1) \leqq \Gamma(g_2)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о данного утверждения легко следует из определений (см. (5.18) и (5.28)).

Теорема 2. *Функция ε_0 является неподвижной точкой оператора* $\Gamma\colon \varepsilon_0 = \Gamma(\varepsilon_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 15, а также (5.12) имеем, что $\varepsilon_0 \leqq \Gamma(\varepsilon_0)$. Тогда $\varepsilon_0(t, x) \leq \Gamma(\varepsilon_0)(t, x)$ $\forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Пусть по аналогии с предыдущими рассуждениями $a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_*)$, $b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0)(t_*, x_*)$, $\mathfrak{h}_*^{(v)} \triangleq \mathfrak{h}_*^{(v)}[\varepsilon_0; t_*; x_*; v]$ $\forall v \in Q$. Тогда

$$b_* = \sup_{v \in Q} \min_{(x(\cdot),\vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}_*^{(v)}(x(\cdot\,), \vartheta).$$

С другой стороны, согласно предложению 1 $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_*)$; тем самым, учитывая (3.26), получаем, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)). \tag{6.13}$$

При этом, однако, имеем (см. [18, предложение 5.2])

$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)) = \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*))),$$

а потому $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)))$. Это означает, что справедливо (6.13) и в то же время

$$\forall v \in Q \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]\colon$$
$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \,\&\, ((t, x(t)) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, a_*)) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]).$$

Таким образом, из (1.2), (1.4), (5.1), (3.26) и (3.27) вытекает, что

$$\forall v \in Q \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]\colon (\psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \,\&\, (\varepsilon_0(t, x(t)) \leq a_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta]).$$

Иными словами, $\forall v \in Q \ \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]\colon \mathfrak{h}_*^{(v)}(x(\cdot), \vartheta) \leq a_*$. Как следствие $\forall v \in Q$

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}_*^{(v)}(x(\cdot), \vartheta) \leq a_*.$$

Но в этом случае (см. (5.28)) $\Gamma(\varepsilon_0)(t_*, x_*) \leq a_*$, т. е. $b_* \leq a_*$, а по доказанному ранее $a_* \leq b_*$. Следовательно, $a_* = b_*$; тем самым, возвращаясь к исходным определениям и учитывая тот факт, что позиция выбиралась произвольно, получаем искомое равенство $\varepsilon_0 = \Gamma(\varepsilon_0)$.

Теорема доказана.

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi \mid g = \Gamma(g)\}$ всех неподвижных точек оператора Γ. Учитывая (5.12) и теорему 2, получаем, что $\varepsilon_0 \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)}$. Пусть, кроме того,

$$\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \mid \varepsilon_0^{(0)} \leqq g\} = \{g \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \mid \rho(\cdot, \mathbf{N}) \leqq g\}.$$

Опираясь на предложение 6, получаем, в частности, $\varepsilon_0^{(0)} \leqq \varepsilon_0$. Тогда согласно определениям $\varepsilon_0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$.

Теорема 3. *Функция ε_0 есть наименьший элемент множества $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$; иными словами, $\varepsilon_0 \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$ и $\varepsilon_0 \leqq \mathbf{g} \ \ \forall \mathbf{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$.*

Доказательство. Выберем произвольный элемент $\mathbf{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. По построению $\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)}$ и $\varepsilon_0^{(0)} \leqq \mathbf{g}$. Следовательно, $r = 0$ принадлежит множеству $\mathfrak{N} \triangleq \{s \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon_0^{(s)} \leqq \mathbf{g}\}$. Далее, предположив, что $r \in \mathfrak{N}$, покажем, что $r+1$ также принадлежит $\mathfrak{N}$. В силу (5.13) $\varepsilon_0^{(r)} \in \mathfrak{M}_\psi$; при этом $\varepsilon_0^{(r)} \leqq \mathbf{g}$. С учетом предложения 16 имеем

$$(\varepsilon_0^{(r)} \leqq \mathbf{g}) \Rightarrow (\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}) \leqq \Gamma(\mathbf{g}));$$

тогда $\varepsilon_0^{(r+1)} \leqq \mathbf{g}$, так как $\Gamma(\mathbf{g}) = \mathbf{g}$ по выбору $\mathbf{g}$ и $\varepsilon_0^{(r+1)} = \Gamma(\varepsilon_0^{(r)})$ по теореме 1. Итак, $r+1 \in \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_0$, т. е. $\varepsilon_0^{(s)} \leqq \mathbf{g} \ \ \forall s \in \mathbb{N}_0$. Учитывая предложение 6, получаем, наконец, что

$$\varepsilon_0(t, x) \leq \mathbf{g}(t, x) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$$

или $\varepsilon_0 \leqq \mathbf{g}$.

В виду произвольности выбора $\mathbf{g}$ теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

3. **Isaacs R.** Differential games. N Y: Wiley, 1965. 384 p.
4. **Berkovitz L. D.** Differential games of generalized pursuit and evasion // Appl. Math. Optim. 1988. Vol. 17, no. 1. P. 177–183. doi: 10.1007/BF01448365 .
5. **Elliott R. J., Kalton N. J.** Values in differential games // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78, no. 3. C. 427–431. doi: 10.1090/S0002-9904-1972-12929-X .
6. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения с информационной памятью // Докл. АН. 1976. Т. 227, № 2. С. 306–309.
7. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 3. С. 394–420.
8. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1977. 287 с.
9. **Ушаков В. Н., Ершов А. А.** К решению задач управления с фиксированным моментом окончания // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26, вып. 4. С. 543–564. doi: 10.20537/vm160409 .
10. **Ушаков В. Н., Матвийчук А. Р.** К решению задач управления нелинейными системами на конечном промежутке времени // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 202–215.
11. **Ушаков В. Н., Ухоботов В. И., Ушаков А. В., Паршиков Г. В.** К решению задач о сближении управляемых систем // Тр. МИАН. Оптимальное управление: К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина. 2015. Vol. 291. С. 276–291.
12. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения, I // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
13. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения, II // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
14. **Ченцов А. Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
15. **Чистяков С. В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
16. **Ухоботов В. И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
17. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения. Деп. в ВИНИТИ, № 1933-79 / Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова. Свердловск, 1979. 103 с.
18. **Ченцов А. Г.** Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 285–302. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302 .
19. **Ченцов А. Г.** О задаче управления с ограниченным числом переключений. Деп. в ВИНИТИ, № 4942-В87 / Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова. Свердловск, 1987. 44 с.
20. **Ченцов А. Г.** О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, 2. Деп. в ВИНИТИ, № 5406-80 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. 55 с.
21. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
22. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.
23. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
24. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
25. **Chentsov A. G.** The program iteration method in a game problem of guidance // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297, suppl. 1. P. 43–61. doi: 10.1134/S0081543817050066 .
26. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1978. Т. 42, № 2. С. 455–467.
27. **Чистяков С. В., Никитин Ф.Ф.** Об антагонистических дифференциальных играх с неограниченной продолжительностью // Вест. СПбГУ. 2004. Сер.1, вып. 3. С. 38–44.
28. **Чистяков С. В.** Программные итерации и универсальные epsilon-оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // Докл. АН. 1991. Т. 319, № 6. С. 1333–1335.

29. **Чистяков С. В.** О функциональных уравнениях в играх сближения в заданный момент времени // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 874–877.
30. **Ченцов А. Г.** Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Изв. ИМИ УдГУ. 2017. Т. 49. С. 17–54.

Поступила 24.09.2018
После доработки 08.11.2018
Принята к публикации 12.11.2018

Ченцов Александр Георгиевич
чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Хачай Даниил Михайлович
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: daniil.khachay@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Isaacs R. *Differential games.* N Y, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 .
4. Berkovitz L.D. Differential games of generalized pursuit and evasion. *Appl. Math. Optim.*, 1988, vol. 17, no. 1, pp. 177–183. doi: 10.1007/BF01448365 .
5. Elliott R.J., Kalton N.J. Values in differential games. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 78, no. 3, pp. 427–431. doi: 10.1090/S0002-9904-1972-12929-X .
6. Chentsov A.G. On a game problem of guidance with information memory. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 411–414.
7. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
8. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
9. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the solution of control problems with fixed terminal time. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 543–564 (in Russian). doi: 10.20537/vm160409 .
10. Ushakov V.N., Matviychuk A.R. To solution of control problems of nonlinear systems on a finite time interval. *Izv. IMI UdGU*, 2015, no. 2 (46), pp. 202–215 (in Russian).
11. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Parshikov G.V. On solving approach problems for control systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, no. 1, pp. 263–278. doi: 10.1134/S0081543815080210 .
12. Krasovskii N.N. A differential game of approach and evasion. I. *Engrg. Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 2, pp. 189–203.
13. Krasovskii N.N. A differential game of approach and evasion. II. *Engrg. Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 3, pp. 376–394.
14. Chentsov A.G. The structure of a certain game-theoretic approach problem. *Soviet Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
15. Chistyakov S.V. On solutions for game problems of pursuit. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 825–832 (in Russian).

16. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354. doi: 10.1016/0021-8928(77)90021-1 .
17. Chentsov A.G. *Metod programmnykh iteratsii dlya differentsial'noi igry sblizheniya-ukloneniya* [The method of program iterations for a differential approach-evasion game]. Sverdlovsk, 1979. Available from VINITI, no. 1933-79, 102 p.
18. Chentsov A.G. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 285–302 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302 .
19. Chentsov A.G. *O zadache upravleniya s ogranichennym chislom pereklyuchenii* [On a control problem with a bounded number of switchings]. Sverdlovsk, 1987. Available from VINITI, no. 4942-B87, 44 p.
20. Chentsov A.G. *O differentsial'nykh igrakh s ogranicheniem na chislo korrektsii, 2* [On differential games with restriction on the number of corrections, 2]. Sverdlovsk, 1980. Available from VINITI, no. 5406-80, 55 p.
21. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965, 223 p. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei.* Moscow: Mir Publ., 1969, 309 p.
22. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* N Y: Wiley, 1968, 253 p. ISBN: 0471072427. Translated to Russian under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 352 p.
23. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* N Y: Acad. Press Inc., 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza.* Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
24. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of approach-evasion. *Soviet Math. Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 2, pp. 408–412.
25. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543817050066 .
26. Chentsov A.G. On the game problem of convergence at a given moment of time. *Math. USSR-Izv.*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 426–437. doi: 10.1070/IM1978v012n02ABEH001985 .
27. Chistyakov S.V., Nikitin F.F. On zero-sum two-person differential games of infinite duration. *Vestn. St. Petersbg. Univ., Math.*, 2004, vol. 37, no. 3, pp. 28–32.
28. Chistyakov S.V. Programmed iterations and universal ε-optimal stratagies in a positional differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 1, pp. 354–357.
29. Chistiakov S.V. On functional equations in games of encounter at a prescribed instant. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 704–706. doi: 10.1016/0021-8928(82)90023-5 .
30. Chentsov A.G. Iterations of stability and the evasion problem with a constraint on the number of switchings of the formed control. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 17–54 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-02 .

Received September 24, 2018
Revised November 08, 2018
Accepted November 12, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00505).

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Daniil Mikhailovich Khachai, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dmx@imm.uran.ru .