ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.518.832

О РАВНОСИЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЙ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ МЕЖДУ НОРМАМИ, НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н. А. Ильясов

В статье предлагается метод, который позволяет, в частности, установить равносильность известных оценок сверху $L_q(\mathbb{T})$-нормы $\|f^{(r)}\|_q$, величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(r)})_q$ и модуля гладкости k-го порядка $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_q$ посредством элементов последовательности $\bigl\{E_{n-1}(f)_p\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ наилучших приближений 2π-периодической функции $f\in L_p(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$, $n\in\mathbb{N}$, где $r\in\mathbb{Z}_+$ ($f^{(0)}=f$), $1<p<q<\infty$, $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$. Основным результатом работы является следующее утверждение: пусть $1<p<q<\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{N}$, $\sigma=r+1/p-1/q$, $f\in L_p(\mathbb{T})$ и $E(f;p;\sigma;q)\equiv\Bigl(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}<\infty$; тогда неравенства

(a) $\|f^{(r)}\|_q\le C_1(r,p,q)\bigl\{(1-\chi(r))\|f\|_p+E(f;p;\sigma;q)\bigr\}$;

(b) $E_{n-1}(f^{(r)})_q\le C_2(r,p,q)\Bigl\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p+\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}\Bigr\}$, $n\in\mathbb{N}$;

(c) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_q\le C_3(k,r,p,q)\Bigl\{\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}+n^{-k}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}\Bigr\}$,

$n\in\mathbb{N}$, являются равносильными в том смысле, что выполнение любого из этих неравенств влечет выполнение двух других. Неравенства (a), (b) и (c) могут быть установлены привлечением лишь одной ключевой оценки

$$\bigl\|S_m^{(l)}(f;\cdot)\bigr\|_q\le C_4(l,p,q)\Bigl\{(1-\chi(l))\|f\|_p+\Bigl(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q\lambda-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}\Bigr\},\ m\in\mathbb{N},$$

где $S_m(f;x)$ — частная сумма порядка $m\in\mathbb{N}$ ряда Фурье функции $f\in L_p(\mathbb{T})$, $l\in\mathbb{Z}_+$, $\lambda=l+1/p-1/q$, $\chi(t)=0$ при $t\le 0$ и $\chi(t)=1$ при $t>0$, $t\in\mathbb{R}$. Выполнение последней оценки в случае $l=r$ и $\lambda=\sigma$ необходимо и достаточно для справедливости неравенства (a) при условии $E(f;p;\sigma;q)<\infty$, гарантирующем принадлежность $f\in L_q^{(r)}(\mathbb{T})$, где $L_q^{(r)}(\mathbb{T})$ — класс функций $f\in L_q(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка, и $f^{(r)}\in L_q(\mathbb{T})$. Для неравенств (b) и (c) также имеют место необходимые и достаточные условия их справедливости в терминах поведения элементов последовательности $\{\|S_m^{(l)}(f;\cdot)\|_q\}_{m=1}^{\infty}$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль гладкости, неравенства в разных метриках, равносильные неравенства.

N. A. Il'yasov. On the equivalence of some relations in different metrics between norms, best approximations, and moduli of smoothness of periodic functions and their derivatives.

We propose a method capable, in particular, of establishing the equivalence of known upper estimates for the $L_q(\mathbb{T})$-norm $\|f^{(r)}\|_q$, the best approximation $E_{n-1}(f^{(r)})_q$, and the kth-order modulus of smoothness $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_q$ in terms of elements of the sequence $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ of best approximations of a 2π-periodic function $f\in L_p(\mathbb{T})$ by trigonometric polynomials of order at most $n-1$, $n\in\mathbb{N}$, where $r\in\mathbb{Z}_+$ ($f^{(0)}=f$), $1<p<q<\infty$, and $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$. The principal result of the paper is the following statement. Let $1<p<q<\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{N}$, $\sigma=r+1/p-1/q$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, and $E(f;p;\sigma;q)\equiv\Bigl(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}<\infty$. Then the following inequalities are equivalent in the sense that each of them implies the other two:

(a) $\|f^{(r)}\|_q\le C_1(r,p,q)\,\{(1-\chi(r))\|f\|_p+E(f;p;\sigma;q)\}$;

(b) $E_{n-1}(f^{(r)})_q\le C_2(r,p,q)\,\Bigl\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p+\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}\Bigr\}$, $n\in\mathbb{N}$;

(c) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_q\le C_3(k,r,p,q)\Bigl\{\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}+n^{-k}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}\Bigr\}$, $n\in\mathbb{N}$.

Inequalities (a), (b), and (c) depend on the key estimate

$$\bigl\|S_m^{(l)}(f;\cdot)\bigr\|_q\le C_4(l,p,q)\Bigl\{(1-\chi(l))\|f\|_p+\Bigl(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q\lambda-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}\Bigr\},\quad m\in\mathbb{N},$$

where $S_m(f;x)$ is the partial sum of order $m \in \mathbb{N}$ of the Fourier series of a function $f \in L_p(\mathbb{T})$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda = l + 1/p - 1/q$, $\chi(t) = 0$ for $t \le 0$, and $\chi(t) = 1$ for $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$. The latter estimate in the case $l = r$ and $\lambda = \sigma$ provides a necessary and sufficient condition for the fulfillment of inequality (a) under the condition $E(f;p;\sigma;q) < \infty$, which guarantees that $f \in L_q^{(r)}(\mathbb{T})$, where $L_q^{(r)}(\mathbb{T})$ is the class of functions $f \in L_q(\mathbb{T})$ with absolutely continuous $(r-1)$th derivative and $f^{(r)} \in L_q(\mathbb{T})$. Necessary and sufficient conditions for the validity of inequalities (b) and (c) are also provided in terms of the behavior of elements of the sequence $\{\|S_m^{(l)}(f;\cdot)\|_q\}_{m=1}^{\infty}$.

Keywords: best approximation, modulus of smoothness, inequalities in different metrics, equivalent inequalities.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25, 41A27

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-176-188

Посвящается 75-летию профессора В. В. Арестова —
коллеги, друга и старшего товарища по Школе С. Б. Стечкина

Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой

$$\|f\|_p = \Bigl(\pi^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p \, dx\Bigr)^{1/p},$$

где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$; $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — класс функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка, и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$; $E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in \mathbb{Z}_+$; $S_n(f;x)$ — частная сумма порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$; $\omega_k(f;\delta)_p$ — модуль гладкости k-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, +\infty)$,

$$\omega_k(f;\delta)_p = \sup\bigl\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_p \colon h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\bigr\},$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h), \quad \binom{k}{\nu} = \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!}, \quad \nu = \overline{0,k}.$$

Ниже и всюду в дальнейшем $C_j(k, r, p, q, \ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные числовые величины, зависящие только от указанных в скобках параметров, а $\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначает функцию Хевисайда: $\chi(t) = 0$ при $t \le 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 0$.

В следующем утверждении приведены оценки сверху (которые являются основными объектами исследований настоящей работы) величин $\|f^{(r)}\|_q$, $E_{n-1}(f^{(r)})_q$ и $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_q$ посредством элементов последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $1 \le p < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma = r + 1/p - 1/q$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le \gamma \le q$ *и сходится ряд*

$$E(f;p;\sigma;\gamma) \equiv \Bigl(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\Bigr) < \infty.$$

Тогда $f \in L_q^{(r)}(\mathbb{T})$ *и имеют место неравенства*

$$\|f^{(r)}\|_q \le C_1(r,p,q,\gamma)\bigl\{(1-\chi(r))\|f\|_p + E(f;p;\sigma;\gamma)\bigr\}; \tag{0.1}$$

$$E_{n-1}(f^{(r)})_q \le C_2(r,p,q,\gamma)\Bigl\{n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + \Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\Bigr)^{1/\gamma}\Bigr\}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{0.2}$$

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_q \le C_3(k,r,p,q,\gamma)\Big\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma\sigma-1}E^{\gamma}_{\nu-1}(f)_p\Big)^{1/\gamma}$$
$$+\,n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma(k+\sigma)-1}E^{\gamma}_{\nu-1}(f)_p\Big)^{1/\gamma}\Big\},\quad n\in\mathbb{N}. \qquad (0.3)$$

В литературе по рассматриваемой тематике имеются разночтения относительно приоритета в установлении выписанных неравенств (0.1)–(0.3) в зависимости от значения вспомогательного параметра $\gamma\in[1,q]$, введенного автором лишь для удобства изложения истории вопроса. Ниже приводится краткая авторская версия, основанная только на оригинальных источниках, и ни в коей мере не претендующая на полноту.

1) Прежде всего следует отметить, что поскольку первая часть сформулированного утверждения $E(f;p;\sigma;\gamma)<\infty \Rightarrow f\in L^{(r)}_q(\mathbb{T})$, а также неравенства (0.1)–(0.3) имеют место для значения $\gamma=q$, то они остаются в силе и при любом значении $\gamma<q$ (см. по этому поводу, например, леммы 2 и 3 в статье автора, опубликованной в Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2017, т. 23, № 3, с. 144–158).

2) Оценки (0.2) и (0.3) в случае $r=0$ и $\gamma=1$ установлены А. А. Конюшковым [1, § 1, теорема 2 и первый абзац после ее доказательства]. Оценка (0.3) в случае $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\gamma=1$ доказана в монографии А. Ф. Тимана [2, гл. VI, п. 6.4, теорема 6.4.1, неравенство (3)].

3) Оценки (0.2) и (0.3) в случае $r=0$ и $\gamma=\theta(p)=\min\{2,p\}<q$ следуют из неравенств, анонсированных М. Ф. Тиманом в [3, теорема 8, неравенства (38) и (39)].

Оценки (0.2) и (0.3) в случае $r=0$, $p>1$ и $\gamma=\theta(q)=\min\{2,q\}\le q$ следуют соответственно из неравенств (3) (приведено с доказательством) и (9) (анонсировано), установленных В. М. Кокилашвили [4, теоремы 1 и 2].

Поскольку $\theta(q)=\min\{2,q\}\ge\min\{2,p\}=\theta(p)$ при $p<q$, то оценки (0.2) и (0.3) с показателем $\gamma=\theta(q)$ точнее соответствующих оценок с показателем $\gamma=\theta(p)$. Последнее замечание, впрочем, также было отмечено в [4]. Далее, так как $\theta(q)=\min\{2,q\}=q$ при $q\le 2$, то оценки (0.2) и (0.3) с показателем $\gamma=q$ в случае $r=0$ и $1<p<q\le 2$ фактически следуют из указанных выше неравенств, установленных в [4].

4) Оценки (0.1) и (0.2) в случае $r=0$ и $\gamma=q$ доказаны П. Л. Ульяновым [5, § 4, теорема 4, неравенства (4.2) и (4.3)]. Ранее оценка (0.2) в случае $r=0$ и $\gamma=q$ была анонсирована в [6, § 3, замечание 6, первое из неравенств в (3.6′); 7, теорема 4, неравенство (8)].

5) Задача доказательства оценок (0.1) и (0.2) с показателем $\gamma=q$ методами, отличными от методов, примененных П. Л. Ульяновым в [5; 6] была рассмотрена также М. Ф. Тиманом [8; 9, теорема A]. Оценка (0.1) для функций $f\in L_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним значением на периоде $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$, гарантирующим отсутствие первого слагаемого в правой части (0.1), в случае $r=0$ и $\gamma=q$ установлена в [8] для значений $1\le p\le 2<q<\infty$ и $1\le p<q\le 2$, [9, п. I, теорема A] — для значений $2\le p<q<\infty$. Кроме того, в [9] получена оценка (0.2) в случае $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\gamma=q$ (см. там п. I, неравенство (1.13) и п. IV, теорема 8, неравенство (4.4)).

В статье [9, первый абзац после формулировки теоремы A] указывается, что оценка (0.1) (см. там неравенство (1.11)) в случае $r=0$ и $\gamma=q$ для значений $1<p<q\le 2$ получена автором и приведена в [3], а обобщение на случай преобразований рядов Фурье дано в [4] (см. п. 3)). На самом деле, в указанной работе М. Ф. Тимана [3] (см. там теорему 8) вообще отсутствует какая-либо оценка вида (0.1), а анонсировано лишь утверждение, из которого следует импликация $E(f;p;\sigma;\theta)<\infty\Rightarrow f\in L_q(\mathbb{T})$, где $\sigma=1/p-1/q$ и $\theta=\theta(p)=\min\{2,p\}=p<q$. В этой же статье [9, п. I, первый абзац после неравенства (1.13)] отмечается, что оценка (0.2) в случае $r=0$ и $\gamma=q$ впервые получена П. Л. Ульяновым [5] для значений $2\le p<q<\infty$, а для значений $1<p<q\le 2$ она приведена в [3], что в свою очередь также не соответствует действительности (см. по этому поводу п. 3)).

6) Неравенство (0.3) в случае $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\gamma=q$ доказано автором в [10, предложение 2.7, неравенство (3); 11, предложение 1, неравенство (2)] для значений $1\le p<q\le 2$ и в [10, предложение 2.7, неравенство (3); 12, доказательство теоремы 1 при $p=1$ и $q\ge 2$] — для

значений $p = 1,\ 2 < q < \infty$. В общем случае доказательство неравенства (0.3) с показателем $\gamma = q$ приведено в [12, теорема 1, неравенство (2)].

В этой работе, которая является продолжением исследований автора (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2018, т. 24, № 2, с. 93–106), приводятся доказательства утверждений о равносильности в случае $1 < p < q < \infty$ и $\gamma = q$ неравенств (0.1)–(0.3) в том смысле, что выполнение любого из этих неравенств гарантирует выполнение двух других.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \sigma = r+1/p-1/q,\ f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q) < \infty$. *Тогда выполнение неравенства*

$$\|f^{(r)}\|_q \le C_4(r,p,q)\big\{(1-\chi(r))\|f\|_p + E(f;p;\sigma;q)\big\} \tag{0.4}$$

необходимо и достаточно для справедливости неравенства

$$E_{n-1}(f^{(r)})_q \le C_5(r,p,q)\left\{n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.5}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \sigma = r + 1/p - 1/q,\ f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q) < \infty$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\omega_k\left(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_q \le C_6(k,r,p,q)\left\{\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right.$$

$$\left. + n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.6}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\|f^{(r)}\|_q \le C_4(r,p,q)\big\{(1-\chi(r))\|f\|_p + E(f;p;\sigma;q)\big\}. \tag{0.4}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \sigma = r + 1/p - 1/q,\ f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q) < \infty$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$E_{n-1}(f^{(r)})_q \le C_5(r,p,q)\left\{n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.5}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\omega_k\left(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_q \le C_6(k,r,p,q)\left\{\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right.$$

$$\left. + n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.6}$$

Неравенства (0.4)–(0.6) могут быть установлены привлечением лишь одной ключевой оценки

$$\|S_m^{(l)}(f;\cdot)\|_q \le C_7(l,p,q)\left\{(1-\chi(l))\left|\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx\right| + \left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q\lambda-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{0.7}$$

где $1 < p < q < \infty,\ l \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda = l + 1/p - 1/q,\ f \in L_p(\mathbb{T})$.

Доказательство оценки (0.7) приведено в заметке автора [12, лемма 1]. При доказательстве (0.7) в случае $q > 2$ было отмечено (по неведению), что автор следует схеме рассуждений из работы М. Ф. Тимана [9] (см. доказательство теоремы А для значений $2 \le p < q < \infty$). Позднее было обнаружено, что указанная схема значительно ранее применялась в монографии А. Зигмунда [13, гл. IX, п. 9.401] при доказательстве теоремы Пэли для произвольной ортонормированной и равномерно ограниченной в интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$ системы функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Исключительная роль оценки (0.7) для справедливости неравенств (0.4)–(0.6) подтверждается следующим утверждением.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma = r + 1/p - 1/q$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q) < \infty$. *Тогда выполнение неравенства*

$$\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_8(r,p,q)\left\{(1-\chi(r))\|f\|_p + \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^q(f)_p\right)^{1/q}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.8}$$

необходимо и достаточно для справедливости каждого из неравенств (0.4)–(0.6).

1. Об условиях выполнимости неравенств (0.4)–(0.6)

В этом разделе приведены необходимые и достаточные условия для выполнимости неравенств (0.4)–(0.6) в случае $1 < p < q < \infty$, выраженные в терминах поведения элементов последовательности $\{\|S_m^{(l)}(f;\cdot)\|_q\}_{m=1}^{\infty}$, где $l \in \mathbb{Z}_+$. Нам понадобятся несколько вспомогательных результатов. Для удобства и сокращения изложения примем обозначение: $S_n(f) \equiv S_n(f;\cdot)$.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$; *тогда справедливы оценки*

1) $\|S_n(f)\|_p \le R(p)\|f\|_p$, $E_n(f)_p \le \|f - S_n(f)\|_p \le (1 + R(p))E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

2) $E_{\nu-1}(S_n(f))_p \le R(p)(1 + R(p))E_{\nu-1}(f)_p$, $1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $E_{\nu-1}(S_n(f))_p = 0$, $\nu \ge n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

3) $E_n(f)_p \le E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p \le (1 + R(p))E_n(f)_p$, $1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p = E_{\nu-1}(f)_p$, $\nu \ge n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

4) $E_{\nu-1}(f)_p \le (1 + R(p))E_n(f)_p + E_{\nu-1}(S_n(f))_p \le (1 + R(p))^2 E_{\nu-1}(f)_p$, $1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 приведено в недавней работе автора (см. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2018, т. 24, № 2, с. 93–106; разд. 1, лемма 1). Оценки, приведенные в лемме 1, играют ключевую роль во всех дальнейших рассуждениях.

Отметим, что здесь и всюду ниже $R(p)$ обозначает постоянную величину в известном неравенстве М. Рисса [14, п. 13, теорема V, неравенство (30)] (см. также [15, т. 1, гл. 7, теорема 6.4]): $\|S_n(f)\|_p \le R(p)\|f\|_p$.

Лемма 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L_q^{(r)}(\mathbb{T})$; *тогда*

$$\max\left\{((1 + R(q))C_9(k))^{-1}\|f^{(r)} - S_{n-1}^{(r)}(f)\|_q,\ 2^{k+r}(R(q))^{-1}\pi^{-r}n^{-k}\|S_n^{(k+r)}(f)\|_q\right\}$$
$$\le \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_q \le 2^k\|f^{(r)} - S_n^{(r)}(f)\|_q + \pi^k n^{-k}\|S_n^{(k+r)}(f)\|_q, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу известных свойств модулей гладкости $\omega_k(f^{(r)};\delta)_q$ имеем

$$\omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_q \le \omega_k\left(f^{(r)} - S_n^{(r)}(f); \frac{\pi}{n}\right)_q + \omega_k\left(S_n^{(r)}(f); \frac{\pi}{n}\right)_q \le 2^k\|f^{(r)} - S_n^{(r)}(f)\|_q + \pi^k n^{-k}\|S_n^{(r+k)}(f)\|_q,$$

откуда следует правая оценка в (1.1). Докажем левую оценку в (1.1). В силу правой оценки в п. 1) леммы 1 и $L_q(\mathbb{T})$-аналога неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [16, § 2, теорема 1, неравенство (2.5); 2, гл. V, п. 5.11, неравенство (1)])

$$E_{n-1}(f)_q \le C_9(k)\omega_k\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

получаем

$$\|f^{(r)} - S_{n-1}^{(r)}(f)\|_q \le (1+R(q))E_{n-1}(f^{(r)})_q \le (1+R(q))C_9(k)\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_q.$$

Далее, применяя неравенство Ф. Рисса — С. Б. Стечкина — С. М. Никольского (см., например, [2, гл. IV, п. 4.8.6]) и левую оценку в п. 1) леммы 1, имеем

$$n^{-k}\|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_q \le 2^{-(k+r)}n^r\|\Delta_{\pi/n}^{k+r}S_n(f;\cdot)\|_q = 2^{-(k+r)}n^r\|S_n(\Delta_{\pi/n}^{k+r}f;\cdot)\|_q$$

$$\le 2^{-(k+r)}n^rR(q)\|\Delta_{\pi/n}^{k+r}f(\cdot)\|_q \le 2^{-(k+r)}R(q)n^r\omega_{k+r}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q \le 2^{-(k+r)}R(q)\pi^r\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_q.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma=r+1/p-1/q$, $f\in L_p(\mathbb{T})$; *тогда для любых* $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $m>n$, *справедливо неравенство*

$$\|S_m^{(r)}(f;\cdot) - S_{n-1}^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_{10}(r,p,q)\bigg\{n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}. \qquad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (0.7) в силу очевидной оценки $\Big|\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx\Big| \le 2^{1-1/p}\pi\|f\|_p$ следует неравенство (0.8), которое в этом разделе (для удобства изложения) выписано под номером (1.4)

$$\|S_m^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_8(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))\|f\|_p + \bigg(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}, \quad m\in\mathbb{N}, \qquad (1.4)$$

где $C_8(r,p,q) = 2^{1-1/p}\pi C_7(r,p,q)$.

Применяя неравенство (1.4) к функции $g_{n-1}(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x)$, $n\in\mathbb{N}$, и учитывая оценки в п. 1) и п. 3) леммы 1, получим

$$\|S_m^{(r)}(g_{n-1}(f);\cdot)\|_q \le C_8(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))\|g_{n-1}(f;\cdot)\|_p + \bigg(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(g_{n-1}(f))_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_8(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))(1+R(p))E_{n-1}(f)_p$$

$$+(1+R(p))E_{n-1}(f)_p\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q\sigma-1}\bigg)^{1/q} + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_8(r,p,q)\bigg\{[(1-\chi(r))+C_{11}(q,\sigma)](1+R(p))n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\},$$

где $C_{11}(q,\sigma)=1$ при $q\sigma\ge1$ и $C_{11}(q,\sigma)=(q\sigma)^{-1/q}$ при $q\sigma\le1$.

Далее, поскольку

$$S_m(f;x)-S_{n-1}(f;x) = S_m(f;x)-S_{n-1}(S_m(f);x) = S_m(f;x)-S_m(S_{n-1}(f);x) = S_m(f-S_{n-1}(f);x),$$

то

$$S_m^{(r)}(f;x)-S_{n-1}^{(r)}(f;x) = (S_m(f;x)-S_{n-1}(f;x))^{(r)} = (S_m(f-S_{n-1}(f);x))^{(r)} = S_m^{(r)}(f-S_{n-1}(f);x),$$

и, следовательно, и силу последней оценки имеем

$$\|S_m^{(r)}(f;\cdot) - S_{n-1}^{(r)}(f;\cdot)\|_q = \|S_m^{(r)}(f-S_{n-1}(f);\cdot)\|_q = \|S_m^{(r)}(g_{n-1}(f);\cdot)\|_q$$

$$\le C_{10}(r,p,q)\bigg\{n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma = r + 1/p - 1/q$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q) < \infty$. *Тогда для справедливости неравенства* (0.4) *необходимо и достаточно выполнение неравенства* (1.4).

Доказательство. *Необходимость.* Если имеет место неравенство (0.4), то в силу п. 2) и п. 1) леммы 1 имеем

$$\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_4(r,p,q)\big\{(1-\chi(r))\|S_n(f;\cdot)\|_p + E(S_n(f);p;\sigma;q)\big\}$$

$$= C_4(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))\|S_n(f;\cdot)\|_p + \bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^q(S_n(f))_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_4(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))R(p)\|f\|_p + R(p)(1+R(p))\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_4(r,p,q)R(p)(1+R(p))\bigg\{(1-\chi(r))\|f\|_p + \bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Достаточность. В случае $r = 0$ справедливость неравенства (0.4) непосредственно следует из неравенства (1.4) обычным предельным переходом при $n \to \infty$. Действительно, поскольку $E(f;p;\sigma;q) < \infty \Rightarrow f \in L_q(\mathbb{T})$, то в силу правого неравенства в п. 1) леммы 1 имеем $\|S_n(f) - f\|_q \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, $\|S_n(f)\|_q \to \|f\|_q$ $(n \to \infty)$.

Рассмотрим теперь случай $r \in \mathbb{N}$. Из сходимости ряда $E(f;p;\sigma;q) < \infty$ в силу неравенства (1.3) следует, что последовательность $\{S_n^{(r)}(f;\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве $L_q(\mathbb{T})$. Следовательно, существует функция $\varphi(f;r;x) \in L_q(\mathbb{T})$ такая, что $\|S_n^{(r)}(f;\cdot) - \varphi(f;r;\cdot)\|_q \to 0$ $(n \to \infty)$. Но тогда в силу теоремы С. М. Никольского (см., например, [2, гл. VI, п. 6.3.31]) функция $f \in L_q(\mathbb{T})$ почти всюду совпадает с некоторой функцией из $L_q^{(r)}(\mathbb{T})$, которую также обозначим через f, причем $f^{(r)}(x) = \varphi(f;r;x)$ почти всюду на R. Учитывая отмеченные факты, имеем

$$\|f^{(r)}\|_q \le \|f^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q + \|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le \|\varphi(f;r;\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q + \sup\big\{\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q :\ n \in \mathbb{N}\big\},$$

и, следовательно,

$$\|f^{(r)}\|_q \le \sup\big\{\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q :\ n \in \mathbb{N}\big\} \le C_8(r,p,q)E(f;p;\sigma;q).$$

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma = r + 1/p - 1/q$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q) < \infty$. *Тогда для справедливости неравенства* (0.5) *необходимо и достаточно выполнение неравенства* (1.3).

Доказательство. *Необходимость.* Если имеет место неравенство (0.5), то в силу правого неравенства в правой оценке в п. 1) леммы 1 имеем

$$\|f^{(r)}(\cdot) - S_{n-1}(f^{(r)};\cdot)\|_q \le (1+R(q))E_{n-1}(f^{(r)})_q$$

$$\le (1+R(q))C_5(r,p,q)\bigg\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя последнее неравенство к полиному $S_m(f;x)$, где $m > n$, и учитывая оценки в п. 2) леммы 1, получаем

$$\|S_m^{(r)}(f;\cdot) - S_{n-1}^{(r)}(f;\cdot)\|_q = \|S_m^{(r)}(f;\cdot) - S_{n-1}(S_m^{(r)}(f);\cdot)\|_q \le (1+R(q))E_{n-1}(S_m^{(r)}(f))_q$$

$$\le (1+R(q))C_5(r,p,q)\biggl\{n^{\sigma}E_{n-1}(S_m(f))_p + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(S_m(f))_p\biggr)^{1/q} + \biggl(\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(S_m(f))_p\biggr)^{1/q}\biggr\}$$

$$\le C_5(r,p,q)(1+R(q))R(p)(1+R(p))\biggl\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}\biggr\}.$$

Достаточность. Поскольку $E(f;p;\sigma;q)<\infty \Rightarrow f\in L_q^{(r)}(\mathbb{T})$ и $\|S_m^{(r)}(f;\cdot)-f^{(r)}(\cdot)\|_q\to 0$ $(m\to\infty)$, то, переходя к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве (1.3) и учитывая левое неравенство в правой оценке в п. 1) леммы 1, имеем

$$E_{n-1}(f^{(r)})_q \le \|f^{(r)}(\cdot)-S_{n-1}^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_{10}(r,p,q)\biggl\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}\biggr\}.$$

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma=r+1/p-1/q$, $f\in L_p(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;\sigma;q)<\infty$. *Тогда для справедливости неравенства* (0.6) *необходимо и достаточно выполнение неравенства* (1.3) *и неравенства* (0.7) *для значения* $l=k+r$:

$$\|S_m^{(k+r)}(f;\cdot)\|_q \le C_7(k+r,p,q)\biggl(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Применяя неравенство (0.6) к полиному $S_n(f;x)$, $n\in\mathbb{N}$, и учитывая оценки в п. 2) леммы 1, имеем

$$\omega_k\Bigl(S_n^{(r)}(f);\frac{\pi}{n}\Bigr)_q \le C_6(k,r,p,q)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(S_n(f))_p\biggr)^{1/q} + n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(S_n(f))_p\biggr)^{1/q}\biggr\}$$

$$\le C_6(k,r,p,q)R(p)(1+R(p))n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q},$$

откуда получаем (см. доказательство левой оценки в (1.1) утверждения леммы 2)

$$\|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_q = \|S_n^{(k)}(S_n^{(r)}(f);\cdot)\|_q \le 2^{-k}n^k\|\Delta^k_{\pi/n}S_n(S_n^{(r)}(f);\cdot)\|_q = 2^{-k}n^k\|\Delta^k_{\pi/n}S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q$$

$$\le 2^{-k}n^k\omega_k\Bigl(S_n^{(r)}(f);\frac{\pi}{n}\Bigr)_q \le 2^{-k}C_6(k,r,p,q)R(p)(1+R(p))\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q},$$

т. е. имеет место неравенство (1.5).

Применяя неравенство (0.6) к функции $g_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$, $n\in\mathbb{N}$, и учитывая оценки в п. 3) леммы 1, имеем

$$\omega_k\Bigl(g_n^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_q \le C_6(k,r,p,q)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(g_n)_p\biggr)^{1/q} + n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(g_n)_p\biggr)^{1/q}\biggr\}$$

$$\le C_6(k,r,p,q)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q} + (1+R(p))E_n(f)_pn^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\biggr)^{1/q}\biggr\}$$

$$\leq C_6(k,r,p,q)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}+(1+R(p))n^{\sigma}E_n(f)_p\biggr\}. \qquad (1.6)$$

Далее, поскольку

$$E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_q\leq\|S_n^{(r)}(f)-S_{n-1}(S_n^{(r)}(f))\|_q=\|S_n(f^{(r)})-S_{n-1}(S_n(f^{(r)}))\|_q$$
$$=\|S_n(f^{(r)})-S_n(S_{n-1}(f^{(r)}))\|_q=\|S_n(f^{(r)}-S_{n-1}(f^{(r)}))\|_q=\|S_n^{(r)}(f-S_{n-1}(f))\|_q,$$

то, применяя $L_p(\mathbb{T})$-аналог неравенства С. Н. Бернштейна (см., например, [2, гл. IV, п. 4.8.61, неравенство (26)], неравенство разных метрик Джексона — Никольского (см., например, [2, гл. IV, п. 4.9.2, неравенство (7)]) и учитывая неравенства в п. 1) леммы 1, получаем

$$E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_q\leq\|S_n^{(r)}(f-S_{n-1}(f))\|_q\leq n^r\|S_n(f-S_{n-1}(f))\|_q\leq 2n^{\sigma}\|S_n(f-S_{n-1}(f))\|_p$$
$$\leq 2n^{\sigma}R(p)\|f-S_{n-1}(f)\|_p\leq 2R(p)(1+R(p))n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p. \qquad (1.7)$$

Привлекая предварительно неравенство (1.2), в силу полученных оценок (1.6) для $\omega_k(g_n^{(r)};\pi/n)_q$ и (1.7) для $E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_q$, имеем

$$E_{n-1}(f^{(r)})_q\leq E_{n-1}(g_n^{(r)}(f))_q+E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_q\leq C_9(k)\omega_k\Bigl(g_n^{(r)}(f);\frac{\pi}{n}\Bigr)_q+E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_q$$
$$\leq C_9(k)C_6(k,r,p,q)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}+(1+R(p))n^{\sigma}E_n(f)_p\biggr\}$$
$$+2R(p)(1+R(p))n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p\leq C_{12}(k,r,p,q)\biggl\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p+\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}\biggr\},$$

где $C_{12}(k,r,p,q)=C_9(k)C_6(k,r,p,q)(2+R(p))+2R(p)(1+R(p))$.

Таким образом, выполнение неравенства (0.6) обеспечивает справедливость неравенства (0.5), откуда согласно лемме 5 следует выполнение неравенства (1.3).

Достаточность. Пусть имеют место неравенства (1.3) и (1.5). Выполнение неравенства (1.3) обеспечивает согласно лемме 5 справедливость неравенства (0.5). Тогда в силу правой оценки в (1.1) утверждения леммы 2, правого неравенства в правой оценке в п. 1) леммы 1 и неравенства (1.5) имеем

$$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_q\leq 2^k\|f^{(r)}(\cdot)-S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q+\pi^kn^{-k}\|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_q$$
$$\leq 2^k(1+R(q))E_n(f^{(r)})_q+\pi^kn^{-k}\|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_q$$
$$\leq 2^k(1+R(q))C_5(r,p,q)\biggl\{n^{\sigma}E_{n-1}(f)_p+\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}\biggr\}$$
$$+C_7(k+r,p,q)\pi^kn^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}$$
$$\leq 2^k(1+R(q))C_5(r,p,q)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}$$
$$+\bigl\{2^k(1+R(q))C_5(r,p,q)(q(k+\sigma))^{1/q}+C_7(k+r,p,q)\pi^k\bigr\}n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}$$
$$\leq C_6(k,r,p,q)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}+n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/q}\biggr\},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $C_6(k,r,p,q)=2^k(1+R(q))C_5(r,p,q)(1+(q(k+\sigma))^{1/q})+C_7(k+r,p,q)\pi^k$.

Лемма 6 доказана. □

2. Доказательства теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Если имеет место неравенство (0.4), то, применяя его к функции $g_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$, $n \in \mathbb{N}$, и учитывая оценки в п. 1) и п. 3) леммы 1, имеем

$$E_n(f^{(r)})_q \le \|f^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q = \|g_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_4(r,p,q)\big\{(1-\chi(r))\|g_n\|_p + E(g_n;p;\sigma;q)\big\}$$

$$\le C_4(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))\|g_n\|_p + \bigg(\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(g_n)_p\bigg)^{1/q} + \bigg(\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(g_n)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_4(r,p,q)\bigg\{(1+R(p))\bigg[(1-\chi(r))E_n(f)_p + E_n(f)_p\bigg(\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu^{q\sigma-1}\bigg)^{1/q}\bigg] + \bigg(\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_4(r,p,q)\bigg\{(1+R(p))(1-\chi(r)+C_{11}(q,\sigma))(n+1)^\sigma E_n(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}.$$

Оценка $E_0(f^{(r)})_q$ непосредственно следует из неравенства (0.4):

$$E_0(f^{(r)})_q \le E_0(f^{(r)} - S_0^{(r)}(f))_q$$

$$\le \|f^{(r)}(\cdot) - S_0^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le C_4(r,p,q)\{(1-\chi(r))\|f(\cdot) - S_0(f;\cdot)\|_p + E(f - S_0(f);p;\sigma;q)\}$$

$$\le C_4(r,p,q)\{(1-\chi(r))(1+R(p))E_0(f)_p + E(f;p;\sigma;q)\}$$

$$\le C_4(r,p,q)\bigg\{\big[(1-\chi(r))(1+R(p))+1\big]E_0(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}.$$

Достаточность. Если имеет место неравенство (0.5), то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_{n-1}(f^{(r)})_q \le C_5(r,p,q)\bigg\{n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_5(r,p,q)\bigg\{(q(k+\sigma))^{1/q}n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q} + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_5(r,p,q)\bigg\{(q(k+\sigma))^{1/q}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q} + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_5(r,p,q)\big\{(q(k+\sigma))^{1/q}+1\big\}E(f;p;\sigma;q),$$

откуда, учитывая также правую оценку в п. 1) леммы 1 и неравенство (1.4), получаем

$$\|f^{(r)}\|_q \le \|f^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q + \|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q \le (1+R(q))E_n(f^{(r)})_q + \|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q$$

$$\le (1+R(q))C_5(r,p,q)\big\{(q(k+\sigma))^{1/q}+1\big\}E(f;p;\sigma;q)$$

$$+ C_8(r,p,q)\bigg\{(1-\chi(r))\|f\|_p + \bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le \big\{(1+R(q))C_5(r,p,q)\big[(q(k+\sigma))^{1/q}+1\big] + C_8(r,p,q)\big\}\big\{(1-\chi(r))\|f\|_p + E(f;p;\sigma;q)\big\}.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 в части “необходимость” можно получить также следующим образом: выполнение неравенства (0.4) согласно лемме 4 необходимо и достаточно для справедливости неравенства (1.4), из которой, как установлено в доказательстве леммы 3, следует неравенство (1.3), обеспечивающее в силу леммы 5 справедливость неравенства (0.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость.* Если имеет место неравенство (0.6), то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_q \le C_6(k,r,p,q)\bigg\{\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/q} + n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le C_6(k,r,p,q)\bigg\{\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/q} + \bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/q}\bigg\}$$

$$\le 2C_6(k,r,p,q)E(f;p;\sigma;q),$$

откуда, привлекая неравенство (1.2) и неравенство (1.4), получим (см. доказательство теоремы 1 в части “достаточность”)

$$\|f^{(r)}\|_q \le (1+R(q))E_n(f^{(r)})_q + \|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_q$$

$$\le (1+R(q))C_9(k)\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_q + C_8(r,p,q)\big\{(1-\chi(r))\|f\|_p + E(f;p;\sigma;q)\big\}$$

$$\le \big\{2C_9(k)(1+R(q))C_6(k,r,p,q) + C_8(r,p,q)\big\}\big\{(1-\chi(r))\|f\|_p + 2E(f;p;\sigma;q)\big\}.$$

Достаточность. Вначале отметим, что если имеет место неравенство (0.4), то согласно теореме 1 имеет место также неравенство (0.5). Учитывая этот факт, в силу правой оценки в (1.1) утверждения леммы 2, правого неравенства в правой оценке в п. 1) леммы 1 и неравенства (1.5) получаем неравенство (0.6) (см. доказательство леммы 6 в части “достаточность”).

Теорема 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Применение неравенства (1.4) при доказательстве неравенства (0.4) (см. доказательство теоремы 1 в части “достаточность” и доказательство теоремы 2 в части “необходимость”), а также применение неравенства (1.5) при доказательстве неравенства (0.6) (см. доказательство теоремы 2 в части “достаточность”) оправдано тем, что выполнение неравенств (1.4) и (1.5) необходимо для справедливости соответственно неравенства (0.4) (см. лемму 4 в разд. 1) и неравенства (0.6) (см. лемму 6 в разд. 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. *Необходимость.* Выполнение неравенства (0.6) при условии справедливости неравенства (0.5) установлено в доказательстве теоремы 2 в части “достаточность” (см. доказательство леммы 6 в части “достаточность”).

Достаточность. Справедливость неравенства (0.5) при условии выполнения неравенства (0.6) установлена в доказательстве леммы 6 в части “необходимость”.

Теорема 3 доказана. □

З а м е ч а н и е 3. Утверждение теоремы 3 можно вывести в качестве следствия из утверждений теоремы 1 и теоремы 2. Если имеет место неравенство (0.5), то согласно теореме 1 выполняется неравенство (0.4), откуда в силу теоремы 2 следует справедливость неравенства (0.6). С другой стороны, если выполняется неравенство (0.6), то согласно теореме 2 имеет место неравенство (0.4), откуда в силу теоремы 1 следует справедливость неравенства (0.5). Доказательство теоремы 3 приведено с целью установления равносильности неравенств (0.5) и (0.6) без привлечения неравенства (0.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Согласно лемме 4 выполнение неравенства (0.8) (или неравенства (1.4) в нумерации раздела 1) необходимо и достаточно для справедливости неравенства (0.4). Отсюда в силу теоремы 1 и теоремы 2 следует, что выполнение неравенства (0.8) необходимо и достаточно для справедливости соответственно неравенств (0.5) и (0.6).

Теорема 4 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44 (86), № 1. С. 53–84.
2. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
3. **Тиман М.Ф.** Наилучшее приближение и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси // Изв. вузов. Математика. 1961. № 6(25). С. 108–120.
4. **Кокилашвили В.М.** Об оценке наилучших приближений и модулей гладкости в различных лебеговских пространствах периодических функций с преобразованным рядом Фурье // Сообщ. АН Грузинской ССР. 1964. Т. 35, № 1. С. 3–8.
5. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81 (123), № 1. С. 104–131.
6. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
7. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и наилучшие приближения // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 5. С. 1044–1047.
8. **Тиман М.Ф.** О некоторых теоремах вложения L_p-классов функций // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 6. С. 1251–1254.
9. **Тиман М.Ф.** О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций // Изв. вузов. Математика. 1974. № 10 (149). С. 61–74.
10. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций: дис. …канд. физ.-мат. наук. Баку, 1987. 150 с.
11. **Ильясов Н.А.** О приближении периодических функций средними Фейера — Зигмунда в разных метриках // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 48–57.
12. **Ильясов Н.А.** Обратная теорема теории приближений в разных метриках // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 57–65.
13. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. М.; Л.: Гостехиздат, 1939. 324 с.
14. **Riesz M.** Sur les fonctions conjuguees // Math. Zeit. 1927. Bd. 27, no. 2. S. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
15. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
16. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.

Поступила 10.09.2018
После доработки 13.11.2018
Принята к публикации 19.11.2018

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент;
доцент кафедры математического анализа
Бакинский государственный университет, г. Баку
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

REFERENCES

1. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44 (86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
2. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* N Y: Macmillan, Pergamon Press, 1963, 631 p. Original Russian text published in Timan A.F. *Teoriya priblizheniya funktsii deistvitel'nogo peremennogo.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
3. Timan M.F. Best approximation and modulus of smoothness of functions defined on the entire real axis. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 1961, no. 6 (25), pp. 108–120 (in Russian).
4. Kokilashvili V.M. On the estimate of best approximations and modulus of smoothness in the various Lebesgue spaces of periodic functions with transformed Fourier series. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Georgian SSR*, 1964, vol. 35, no. 1, pp. 3–8 (in Russian).

5. Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Math. USSR-Sb.,* 1970, vol. 10, no. 1, pp. 103–126. doi: 10.1070/SM1970v010n01ABEH001589 .
6. Ul'yanov P.L. Embedding of certain classes of functions H_p^ω. *Math. USSR–Izv.,* 1968, vol. 2, no. 3, pp. 601–637. doi: 10.1070/IM1968v002n03ABEH000650 .
7. Ul'yanov P.L. The imbedding theorems and best approximations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 184, no. 5, pp. 1044–1047 (in Russian).
8. Timan M.F. Some embedding theorems for L_p-classes of functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 193, no. 6, pp. 1251–1254 (in Russian).
9. Timan M.F. The imbedding of the $L_p^{(k)}$ classes of functions. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.,* 1974, no. 10 (149), pp. 61–74 (in Russian).
10. Il'yasov N.A. Embedding theorems for structural and constructive characteristics of functions: Cand. Sci. (Phys.- Math.) Dissertation, Baku, 1987, 150 p. (in Russian).
11. Il'yasov N.A. Approximation of periodic functions by Fejer — Zygmund means in various metrics. *Math. Notes,* 1990, vol. 48, no. 4, pp. 1004–1010. doi: 10.1007/BF01139600 .
12. Il'yasov N.A. An inverse approximation theorem in various metrics. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 6, pp. 1253–1260. doi: 10.1007/BF01158266 .
13. Zygmund A. *Trigonometric series.* Warszawa: Instytut Matematyczny PAN, 1935, 331 p. Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady.* Moscow; Leningrad: Gostexizdat Publ., 1939, 324 p.
14. Riesz M. Sur les fonctions conjuguees. *Math. Zeit.,* 1927, bd. 27, no. 2, s. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
15. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959; vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. ISBN (3rd ed.): 0521890535 . Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady.* Moscow: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p.; vol. II, 538 p.
16. Stechkin S.B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.,* 1951, vol. 15, no. 3, pp. 219–242 (in Russian).

Received September 10, 2018
Revised November 13, 2018
Accepted November 19, 2018

Niyazi Aladdin ogly Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan, e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .