ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.51

# ПОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ТУРАНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ[1]

**В. И. Иванов**

Изучается поточечная задача Турана о наибольшем значении в произвольной точке $x$ 1-периодической положительно определенной функции, равной 1 в нуле и с носителем на отрезке $[-h,h]$. Для рациональных значений $x$ и $h$ задача сводится к дискретному варианту задачи Фейера о наибольшем значении $\nu$-го коэффициента четного тригонометрического полинома порядка $p-1$ с нулевым коэффициентом 1 и неотрицательного на равномерной сетке $k/q$, $k=0,\dots,q-1$. Дискретная задача Фейера решена для ряда значений параметров $\nu$, $p$ и $q$. Во всех случаях построены экстремальные полиномы и квадратурные формулы, позволяющие получить оценку наибольшего коэффициента.

Ключевые слова: преобразование и ряд Фурье, периодическая положительно определенная функция, поточечная задача Турана, квадратурная формула, экстремальный полином.

**V. I. Ivanov. Pointwise Turán problem for periodic positive definite functions.**

We study the pointwise Turán problem on the largest value at an arbitrary point $x$ of a 1-periodic positive definite function supported on the interval $[-h,h]$ and equal to 1 at zero. For rational values of $x$ and $h$, the problem reduces to a discrete version of the Fejér problem on the largest value of the $\nu$th coefficient of an even trigonometric polynomial of order $p-1$ that has zero coefficient 1 and is nonnegative on a uniform grid $k/q$, $k=0,\dots,q-1$. The discrete Fejér problem is solved for a number of values of the parameters $\nu$, $p$, and $q$. In all the cases, we construct extremal polynomials and quadrature formulas, which yield an estimate for the largest coefficient.

Keywords: Fourier transform and series, periodic positive definite function, pointwise Turán problem, quadrature formula, extremal polynomial.

**MSC:** 42A05, 42A32, 42A82

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2018-24-4-156-175

*75-летию профессора В. В. Арестова посвящается*

## 1. Введение

Работа посвящена решению поточечной задачи Турана для периодических положительно определенных функций.

Пусть $G$ — компактная или локально компактная абелева группа, $\widehat{f}$ — преобразование Фурье, определенное на двойственной группе $\widehat{G}$, $P(G)$ — множество непрерывных и интегрируемых положительно определенных функций, $P_{\mathbb{R}}(G)$ — подмножество действительных положительно определенных функций. Напомним, что функция $f:G\to\mathbb{C}$ является положительно определенной, если для любых двух наборов $\{x_i\}_{i=1}^m\subset G$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^m\subset\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m \alpha_i\overline{\alpha}_j f(x_i-x_j)\geqslant 0.$$

Известно, что $P_{\mathbb{R}}(G)$ совпадает с подмножеством $P(G)$ четных функций. Из теоремы Бохнера — Вейля [1, 1.4.3] вытекает, что

$$P(G)=\{f\in C(G)\cap L(G)\colon \widehat{f}\geqslant 0 \text{ на } \widehat{G}\}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00308).

В качестве групп будем рассматривать $d$-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ и одномерный тор $\mathbb{T}$. Если $G=\mathbb{R}^d$, то $\widehat{G}=\mathbb{R}^d$, преобразование Фурье $\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dy$, $x\in\mathbb{R}^d$, и

$$P(\mathbb{R}^d)=\{f\in C(\mathbb{R}^d)\cap L(\mathbb{R}^d)\colon \widehat{f}(x)\geqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}^d\}.$$

Если $G=\mathbb{T}=[-1/2,1/2)$, то $\widehat{G}=\mathbb{Z}$, преобразование Фурье $\widehat{f}_\nu=\int_{\mathbb{T}} f(y)e^{-2\pi i\nu y}\,dy,\ \nu\in\mathbb{Z}$, и

$$P(\mathbb{T})=\{f\in C(\mathbb{T})\colon \widehat{f}_\nu\geqslant 0 \text{ на } \mathbb{Z}\}.$$

Различают интегральную и поточечную задачи Турана. Рассмотрим интегральную задачу Турана на $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — выпуклое центрально-симметричное компактное тело.

**Интегральная задача Турана на $\mathbb{R}^d$.** Вычислить величину

$$A(\Omega,\mathbb{R}^d)=\sup\Biggl\{\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx\colon f\in P_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d),\ f(0)=1,\ \operatorname{supp} f\subset\Omega\Biggr\}.$$

Пусть $|\Omega|$ — объем $\Omega$, $\chi_\Omega$ — характеристическая функция $\Omega$, $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$ — свертка функций $f$, $g$ и функция

$$f_\Omega(x)=\frac{(\chi_{\frac12\Omega}*\chi_{\frac12\Omega})(x)}{(\chi_{\frac12\Omega}*\chi_{\frac12\Omega})(0)}.$$

Так как $f_\Omega\in P_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, то $A(\Omega,\mathbb{R}^d)\geqslant\left|\frac12\Omega\right|$. Если $A(\Omega,\mathbb{R}^d)=\left|\frac12\Omega\right|$, то $\Omega$ называют *телом Турана.*

Зигель [2] еще в 1935 г. доказал, что для евклидова шара $B$, $A(B,\mathbb{R}^d)=\left|\frac12 B\right|$, и, значит, шар является телом Турана. Однако этот результат оказался незамеченным. Боас и Кац [3] передоказали его при $d=1$, а Горбачев [4] — при $d>1$.

Арестов и Бердышева [5] доказали, что многогранник, замещающий $\mathbb{R}^d$ при помощи решетки, также является телом Турана.

Этот результат был обобщен Колонзакисом и Ревесом [6] на случай спектральных тел. Тело $\Omega$ называется *спектральным*, если в $L^2(\Omega)$ существует ортогональный базис из экспонент. Отметим, что многогранник, замещающий евклидово пространство, является спектральным.

Вопрос о существовании тел, не являющихся телами Турана, остается открытым. Было бы интересно решить интегральную задачу Турана для октаэдра $O^d=\{x\in\mathbb{R}^d\colon \sum_{j=1}^d|x_j|\leqslant 1\}$.

Интегральную задачу для тора Туран поставил в 1970 г. в частной беседе со Стечкиным.

**Интегральная задача Турана на $\mathbb{T}$.** Вычислить величину

$$A([-h,h],\mathbb{T})=A_{\mathbb{T}}(h)=\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx, \tag{1.1}$$

если $f(z)=\widehat{f}_0+2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k\cos(2\pi kz),\quad \widehat{f}_k\geqslant 0,\quad f(0)=\widehat{f}_0+2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_k=1,\quad \operatorname{supp} f\subset[-h,h].$

Стечкин [7] доказал, что для $q\in\mathbb{N}$, $q\geqslant 2$, $A_{\mathbb{T}}(1/q)=1/q$, экстремальная функция $f_q(x)=(1-|qx|)_+$, где $(x)_+=\max\{x,0\}$, и $A_{\mathbb{T}}(h)=h+O(h^2)$ при $h\to+0$.

Пусть $p\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p\leqslant q/2$, $\mathbb{Z}_q=\{0,1,\dots,q-1\}$ — циклическая группа порядка $q$. Для рационального $h=p/q$ Горбачев и Маношина [8] свели задачу (1.1) к дискретной задаче Фейера.

**Первая дискретная задача Фейера**. Вычислить величину

$$\lambda(p,q)=\sup t(0), \tag{1.2}$$

если $t(y)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{t}_k\cos\Big(\dfrac{2\pi}{q}ky\Big)\geqslant 0,\quad y\in\mathbb{Z}_q.$

Они доказали, что $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{p}{q}\Big)=\dfrac{\lambda(p,q)}{q}$ и, если полином $t^*(y)$ является экстремальным в первой дискретной задаче Фейера, то функция

$$\psi_{p,q}(z)=\frac{1}{q}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\Big(\dfrac{\pi k}{q}\Big)}{\dfrac{\pi k}{q}}\right)^2 t^*(k)\cos(2\pi kz)\right\}$$

— экстремальная в задаче Турана (1.1).

Дискретная задача Фейера связана с ее непрерывным вариантом.

**Первая задача Фейера**. Вычислить величину

$$\Lambda(p)=\sup t(0), \tag{1.3}$$

если $t(z)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{t}_k\cos(2\pi kz)\geqslant 0,\quad z\in\mathbb{T}.$

Задача (1.3) была поставлена и решена Фейером [9]. Он доказал, что $\Lambda(p)=p$ и единственным экстремальным полиномом является полином

$$F_p(z)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1-\frac{k}{p}\Big)\cos(2\pi kz)=\frac{1}{p}\Big(\frac{\sin\pi pz}{\sin\pi z}\Big)^2,$$

известный теперь как полином Фейера. Верхняя оценка в задаче Фейера может быть получена с помощью квадратурной формулы для четных полиномов $t(z)$ порядка не выше $p-1$, узлы и веса которой определяются полиномом Фейера:

$$p\widehat{t}_0-t(0)=2\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1-\frac{k}{p}\Big)t\Big(\frac{k}{p}\Big).$$

Пусть $[x]$ — целая часть числа $x\in\mathbb{R}$, $\langle x\rangle_q$ — расстояние до ближайшего целого, кратного $q$, $(n_1,\dots,n_k)$ — наибольший общий делитель натуральных $n_1,\dots,n_k$. Для взаимно простых $(\nu,q)=1$ мы будем писать, что $\langle r\nu\rangle_q=1$, если $r\nu=\pm1$ в $\mathbb{Z}_q$, и $r\leqslant q/2$. Отметим, что

$$\cos\Big(\frac{2\pi}{q}\langle x\rangle_q\Big)=\cos\Big(\frac{2\pi}{q}x\Big),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Решение задачи Фейера (1.2) было получено автором этой статьи и Рудомазиной (см. [10–13]). Они доказали, что если $(p,q)=1$ и $\langle\overline{r}p\rangle_q=1$, то нули экстремального полинома на $[0,q/2]$ образуют множество

$$S_{p,q}=\Big\{\Big[\frac{qk}{p}\Big],\Big[\frac{ql}{p}\Big]+1\colon k=1,\dots,\Big[\frac{p}{2}\Big],l=1,\dots,\Big[\frac{p-1}{2}\Big]\Big\}=\{\langle\overline{r}k\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\},$$

экстремальный полином имеет вид

$$F_{p,q}(y)=1+2\sum_{k=1}^{p-1}\widehat{F}_k\cos\Big(\frac{2\pi}{q}ky\Big)=c\prod_{k=1}^{p-1}\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{q}y\Big)-\cos\Big(\frac{2\pi}{q}\overline{r}k\Big)\Big)\geqslant 0,\quad y\in\mathbb{Z}_q,\quad \widehat{F}_k>0,\quad c>0, \tag{1.4}$$

и для любого четного полинома $t(y)$ порядка не выше $p-1$ имеет место квадратурная формула

$$F_{p,q}(0)\widehat{t}_0 - t(0) = \sum_{k=1}^{p-1} \widehat{F}_k t(\overline{r}k).$$

Откуда вытекает, что $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{p}{q}\Big) = \dfrac{\lambda(p,q)}{q} = \dfrac{F_{p,q}(0)}{q}$.

Отметим, что точки $q^{-1}S_{p,q}$ аппроксимируют на равномерной сетке $q^{-1}\mathbb{Z}_q \subset \mathbb{T}$ нули полинома Фейера.

Полное решение задачи Турана (1.1) получено в [14], где доказана непрерывность функции $A_{\mathbb{T}}(h)$ (см. также [13]).

Интересные экстремальные задачи для положительно определенных функций, близкие к интегральной задаче Турана, изучены Беловым [15].

Рассмотрим поточечную задачу Турана на $\mathbb{R}^d$.

**Поточечная задача Турана на $\mathbb{R}^d$.** Вычислить величину

$$A(x,\Omega,\mathbb{R}^d) = \sup\big\{f(x)\colon f\in P_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d),\ f(0)=1,\ \operatorname{supp} f\subset\Omega\big\}. \tag{1.5}$$

Пусть $\lceil x\rceil$ — наименьшее целое, не меньшее $x$. При $d=1$ задачу Турана (1.5) решили Боас и Кац [3]. Они доказали, что для $0<x<h\leqslant 1/2$ $A(x,[-h,h],\mathbb{R}) = A_{\mathbb{R}}(x,h) = \cos\left(\dfrac{\pi}{\left\lceil \frac{h}{x}\right\rceil + 1}\right)$.

Выпуклое компактное центрально-симметричное тело $\Omega$ определяет в $\mathbb{R}^d$ норму

$$\|x\| = \inf\Big\{\lambda>0\colon \frac{1}{\lambda}x\in\Omega\Big\},$$

относительно которой тело является единичным шаром. При $d>1$ задачу Турана (1.5) решили Колонзакис и Ревес [16]. Они доказали, что $A(x,h\Omega,\mathbb{R}^d) = \cos\left(\dfrac{\pi}{\left\lceil \frac{h}{\|x\|}\right\rceil + 1}\right)$. Последнее равенство показывает, что поточечная задача Турана в действительности является одномерной задачей. Ее решение основано на решении второй задачи Фейера.

**Вторая задача Фейера**. Для $1\leqslant\nu\leqslant p-1$ вычислить величину

$$\Lambda(\nu,p) = \sup \widehat{t}_\nu, \tag{1.6}$$

если $t(z) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{p-1}\widehat{t}_k\cos(2\pi kz)\geqslant 0,\quad z\in\mathbb{T}$.

При $\nu=1$ задача (1.6) была поставлена и решена Фейером [9]. При $\nu>1$ ее решение было получено независимо Сеге [17] и Егервари и Сасом [18]. Ими было доказано, что

$$\Lambda(\nu,p) = \cos\left(\frac{\pi}{\left\lceil \frac{p}{\nu}\right\rceil + 1}\right).$$

Мы видим, что если $x = \dfrac{\nu}{q}$, $h = \dfrac{p}{q}$, то

$$A_{\mathbb{R}}(x,h) = \Lambda(\nu,p) = \cos\left(\frac{\pi}{\left\lceil \frac{p}{\nu}\right\rceil + 1}\right). \tag{1.7}$$

На этом равенстве и основано решение задачи Турана (1.5).

Если $\nu = 1$, то единственный экстремальный полином есть

$$t^*_{p,1}(z) = 1 + \frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p-1}\left((p-k)\cos\frac{\pi k}{p+1} + \frac{\sin\dfrac{\pi(k+1)}{p+1}}{\sin\dfrac{\pi}{p+1}}\right)\cos(2\pi kz)$$

$$= c_1\,\frac{1+\cos 2\pi(p+1)z}{\left(\cos 2\pi z - \cos\dfrac{\pi}{p+1}\right)^2} = c_2\prod_{k=1}^{p-1}\Bigl(\cos 2\pi z - \cos\frac{\pi(2k+1)}{p+1}\Bigr), \quad \widehat{t}^{\,*}_1(p) = \cos\frac{\pi}{p+1}, \tag{1.8}$$

а квадратурная формула для четных полиномов $t(z)$ порядка не выше $p-1$, дающая оценку сверху в (1.6), имеет вид $\Bigl(\cos\dfrac{\pi}{p+1}\Bigr)\widehat{t}_0 - \widehat{t}_1 = \dfrac{2}{p+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\sin\frac{\pi k}{p+1}\sin\frac{\pi(k+1)}{p+1}\,t\Bigl(\frac{2k+1}{p+1}\Bigr)$.

Если $\nu > 1$, то задача о наибольшем коэффициенте $\widehat{t}_\nu$ с помощью преобразования

$$St(z) = \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} t\left(z + \frac{k}{\nu}\right) \tag{1.9}$$

сводится к задаче о наибольшем коэффициенте $\widehat{t}_1$, и между экстремальными полиномами в них получается следующая связь:

$$t^*_{p,\nu}(z) = t^*_{\lceil \frac{p}{\nu}\rceil,1}(\nu z), \quad \widehat{t}^{\,*}_\nu(p) = \widehat{t}^{\,*}_1\Bigl(\Bigl\lceil\frac{p}{\nu}\Bigr\rceil\Bigr) = \cos\left(\frac{\pi}{\Bigl\lceil\dfrac{p}{\nu}\Bigr\rceil + 1}\right).$$

Отметим, что экстремальный полином в задаче Фейера (1.9) не единственен, если $\nu \nmid (p-1)$.

Таким образом, интегральная задача Турана и поточечная задача Турана в $\mathbb{R}^d$ исследованы с достаточной полнотой. В меньшей степени исследована поточечная задача Турана на торе.

**Поточечная задача Турана на $\mathbb{T}$.** Вычислить величину

$$A(x, [-h,h], \mathbb{T}) = A_{\mathbb{T}}(x,h) = \sup f(x), \tag{1.10}$$

если

$$f(z) = \widehat{f}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k\cos(2\pi kz), \quad \widehat{f}_k \geqslant 0, \quad f(0) = \widehat{f}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset [-h,h].$$

Полное решение задачи Турана (1.10) получено только при $h = 1/2$. Арестов, Бердышева и Беренс [19] доказали, что для $0 < x < 1/2$

$$A_{\mathbb{T}}\Bigl(x, \frac{1}{2}\Bigr) = \begin{cases} 1, \ \text{если } x \text{ — иррациональное}, \\ 1, \ \text{если } x = \dfrac{n}{m}, \ \text{и } m \text{ — нечетное}, \\ \dfrac{1}{2}\Bigl(1 + \cos\dfrac{\pi}{m}\Bigr), \ \text{если } x = \dfrac{n}{m}, \ \text{и } m \text{ — четное}. \end{cases}$$

А также, если $0 < x < h < \dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2} \leqslant A_{\mathbb{R}}(x,h) \leqslant A_{\mathbb{T}}(x,h), \quad A_{\mathbb{R}}(x,h) = \lim_{\alpha\to+0} A_{\mathbb{T}}(\alpha x, \alpha h).$$

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению поточечной задачи Турана (1.10) для рациональных $x$ и $h$. Ее содержание частично анонсировано в [13].

## 2. Редукция к задачам конечномерного линейного программирования

Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $2 \leqslant p \leqslant q/2$, $w = [q/2]$, $\nu = 1, \ldots, p-1$,

$$T_{p,q} = \Big\{ t(y) = \widehat{t}_0 + 2\sum_{k=1}^{p-1} \widehat{t}_k \cos\big(\frac{2\pi}{q} ky\big) \colon y \in \mathbb{Z}_q, \quad \widehat{t}_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

— множество четных тригонометрических полиномов порядка не выше $p-1$ на $\mathbb{Z}_q$, $T^+_{p,q} \subset T_{p,q}$ — подмножество неотрицательных полиномов.

Система $\Big\{\cos\dfrac{2\pi}{q}kx\Big\}_{k=0}^{w}$ на $\mathbb{Z}_q$ образует ортогональный базис в подпространстве четных полиномов относительно скалярного произведения $(f,g) = \dfrac{1}{q}\sum\limits_{j=0}^{w} m_j f(j)g(j)$, где для чётного и нечетного $q$ соответственно

$$m_j = \begin{cases} 1, & j = 0, w, \\ 2, & j = 1, \ldots, w-1, \end{cases} \qquad m_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j = 1, \ldots, w. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\Big(\cos\dfrac{2\pi}{q}kx, \cos\dfrac{2\pi}{q}lx\Big) = \dfrac{\delta_{kl}}{m_k}$, где $\delta_{kl}$ — символы Кронекера.

Мы также будем пользоваться равенством

$$\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} e^{i\frac{2\pi}{q}kl} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \cos\Big(\frac{2\pi}{q}kl\Big) = \delta_{l0}, \quad l \in \mathbb{Z}_q. \tag{2.1}$$

Для любого чётного полинома $f$ справедливо разложение в сумму Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{w} \widehat{f}_k \cos\Big(\frac{2\pi}{q}kx\Big), \tag{2.2}$$

где коэффициенты Фурье $\widehat{f}_k$ имеют вид

$$\widehat{f}_k = \frac{m_k}{q}\sum_{x=0}^{w} m_x\, f(x) \cos\Big(\frac{2\pi}{q}kx\Big). \tag{2.3}$$

Рассмотрим две экстремальные задачи.

**Вторая дискретная задача Фейера**. Вычислить величину

$$\lambda(\nu,p,q) = \sup\big\{\widehat{t}_\nu \colon t \in T^+_{p,q}, \quad \widehat{t}_0 = 1\big\}. \tag{2.4}$$

**Дискретная поточечная задача Турана**. Вычислить величину

$$a\Big(\frac{\nu}{q}, \frac{p}{q}\Big) = \sup\Big\{ t(\nu) \colon t \in T_{w,q},\ t(0) = 1,\ t(k) = 0,\ k = p, \ldots, w,\ \widehat{t}_\nu \geqslant 0,\ \nu \in [0,w]\Big\}. \tag{2.5}$$

Отметим, что задачи (2.4), (2.5) являются задачами конечномерного линейного программирования.

**Теорема 1.** *Если* $(\nu,p,q) = 1$, *то*

$$A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{q}, \frac{p}{q}\Big) = a\Big(\frac{\nu}{q}, \frac{p}{q}\Big) = \lambda(\nu,p,q).$$

*Если полином* $t^*(y)$ *является экстремальным в задаче Фейера* (2.4), *то функция*

$$\psi_{p,q}(z) = \frac{1}{q}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\Big(\dfrac{\pi k}{q}\Big)}{\dfrac{\pi k}{q}}\right)^2 t^*(k)\cos(2\pi kz)\right\} \tag{2.6}$$

*— экстремальная в задаче Турана* (1.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если четный полином $t(y)$ является допустимым в задаче (2.4), то согласно (2.2), (2.3) его коэффициенты Фурье $\widehat{t}_k$ являются четным полиномом порядка не выше $p-1$, допустимым в задаче (2.5), и обратно. Следовательно,

$$a\Big(\frac{\nu}{q},\frac{p}{q}\Big)=\lambda(\nu,p,q). \tag{2.7}$$

Пусть $f(z)=\widehat{f}_0+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k\cos(2\pi kz)$, $z\in\mathbb{T}$, — допустимая функция в задаче (1.10) и $k=nq+r$, $0\leqslant r<q$. Тогда для $z=y/q$, $y\in\mathbb{Z}_q$,

$$f\Big(\frac{y}{q}\Big)=\widehat{f}_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}_{nq}+2\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}_{nq+r}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}y(nq+r)\Big)$$

$$=\widehat{f}_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}_{nq}+2\sum_{r=1}^{q-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}_{nq+r}\Big)\cos\Big(\frac{2\pi}{q}yr\Big)=\widehat{t}_0+2\sum_{r=1}^{w}\widehat{t}_r\cos\Big(\frac{2\pi}{q}yr\Big)=t(y),$$

где

$$\widehat{t}_0=\widehat{f}_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}_{nq},\quad \widehat{t}_r=m_r\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}_{nq+r}.$$

Так как $t(0)=f(0)=1$, $t(k)=f(k/q)=0$, $k=p,\dots,w$, $\widehat{t}_r\geqslant 0$, $r=0,1,\dots,w$, и $f(\nu/q)=t(\nu)$, то полином $t(y)$ является допустимым в задаче (2.5) и $f\Big(\dfrac{\nu}{q}\Big)\leqslant a\Big(\dfrac{\nu}{q},\dfrac{p}{q}\Big)$. Следовательно,

$$A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{q},\frac{p}{q}\Big)\leqslant a\Big(\frac{\nu}{q},\frac{p}{q}\Big). \tag{2.8}$$

Функция $\psi_{p,q}$ (2.6) является допустимой в задаче (1.10) для $h=p/q$, и для нее $\psi_{p,q}(\nu/q)=\widehat{t}^{*}_{\nu}=\lambda(\nu,p,q)$ (см. [8]), поэтому

$$A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{q},\frac{p}{q}\Big)\geqslant\lambda(\nu,p,q).$$

Отсюда и из (2.7), (2.8) вытекают все утверждения теоремы. Теорема 1 доказана.

**Лемма 1.** *Если $d\in\mathbb{N}$, $\nu=d\nu'$, $q=dq'$, $\nu+1\leqslant p\leqslant q/2$, то $\lambda(\nu,p,q)=\lambda\Big(\nu',\Big\lceil\dfrac{p}{d}\Big\rceil,q'\Big)$. Если полином $t^*(y')\in T^{+}_{\lceil\frac{p}{d}\rceil,q'}$, $y'\in\mathbb{Z}_{q'}$, — экстремальный в задаче $\lambda\Big(\nu',\Big\lceil\dfrac{p}{d}\Big\rceil,q'\Big)$, то полином $t^*(y)\in T^{+}_{p,q}$, $y\in\mathbb{Z}_q$, является экстремальным в задаче $\lambda(\nu,p,q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если полином $t(y)=1+2\sum\limits_{k=1}^{p-1}\widehat{t}_k\cos\Big(\dfrac{2\pi}{q}ky\Big)\in T^{+}_{p,q}$, $y=nq'+y'$, $y'\in\mathbb{Z}_{q'}$, то $\Big[\dfrac{p-1}{d}\Big]+1=\Big\lceil\dfrac{p}{d}\Big\rceil$, и в силу (2.1) полином

$$t'(y')=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d}t(y+kq')=1+2\sum_{l=1}^{p-1}\widehat{t}_l\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d}\cos\Big(\frac{2\pi}{dq'}l(y+kq')\Big)$$

$$=1+2\sum_{s=1}^{[\frac{p-1}{d}]}\widehat{t}_{ds}\cos\Big(\frac{2\pi}{q'}sy\Big)=1+2\sum_{s=1}^{[\frac{p-1}{d}]}\widehat{t}_{ds}\cos\Big(\frac{2\pi}{q'}sy'\Big)\in T^{+}_{\lceil\frac{p}{d}\rceil,q'}.$$

Из этого соответствия вытекают все утверждения леммы. Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 мы можем считать, что $(\nu,q)=1$.

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях леммы 1 $\left\lceil\dfrac{p}{d}\right\rceil = \left[\dfrac{q'}{2}\right]+1$, то $\lambda(\nu,p,q)=1$. Действительно, в этом случае мы можем получить неотрицательный полином $t'(y') = 1+2\sum\limits_{s=1}^{[\frac{q'}{2}]}\cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q'}sy'\Bigr)$, для которого коэффициенты $\widehat{t'}_\nu = 1$.

**Следствие 1.** *Если* $\nu=1,\dots,p-1$, $h\in\Bigl(\dfrac{p-1}{q},\dfrac{p}{q}\Bigr]$, *то* $A_{\mathbb T}\Bigl(\dfrac{\nu}{q},h\Bigr)=\lambda(\nu,p,q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неубывания $A_{\mathbb T}(x,h)$ по $h$ для достаточно большого $d$ $A_{\mathbb T}\Bigl(\dfrac{\nu}{q},\dfrac{(p-1)d+1}{dq}\Bigr)\leqslant A_{\mathbb T}\Bigl(\dfrac{\nu}{q},h\Bigr)\leqslant A_{\mathbb T}\Bigl(\dfrac{\nu}{q},\dfrac{p}{q}\Bigr)=\lambda(\nu,p,q)$. Применяя лемму 1, получим

$$A_{\mathbb T}\Bigl(\frac{\nu}{q},\frac{(p-1)d+1}{dq}\Bigr)=\lambda(d\nu,(p-1)d+1,dq)=\lambda(\nu,p,q).$$

Следствие 1 доказано.

Если нули экстремального полинома в задаче $\Lambda(\nu,p)$ (1.6) попадают на сетку $q^{-1}\mathbb{Z}_q$, то он будет экстремальным и в задаче $\lambda(\nu,p,q)$ (2.4). Применяя (1.7), нули полинома (1.8) и его преобразований (1.9), лемму 1, получим следующее следствие.

**Следствие 2.** *Если* $\nu=1,\dots,p-1$, $x=\dfrac{1}{2\Bigl(\Bigl\lceil\dfrac{p}{\nu}\Bigr\rceil+1\Bigr)}$, $h\in\Biggl(\dfrac{p-1}{2\nu\Bigl(\Bigl\lceil\dfrac{p}{\nu}\Bigr\rceil+1\Bigr)},\dfrac{p}{2\nu\Bigl(\Bigl\lceil\dfrac{p}{\nu}\Bigr\rceil+1\Bigr)}\Biggr]$, *то*

$$A_{\mathbb T}(x,h)=A_{\mathbb R}(x,h)=\lambda\Bigl(\nu,p,2\nu\Bigl(\Bigl\lceil\frac{p}{\nu}\Bigr\rceil+1\Bigr)\Bigr)=\cos\left(\frac{\pi}{\Bigl\lceil\frac{p}{\nu}\Bigr\rceil+1}\right).$$

*В частности, если* $p/2\leqslant\nu\leqslant p-1$, *то* $A_{\mathbb T}(x,h)=1/2$.

Колонзакис и Ревес [16] для рациональных $x$ и $h$ также осуществили редукцию задачи Турана (1.10) к дискретной задаче, известной как задача Каратеодори — Фейера. Если

$$x=\frac{\nu}{q},\quad h=\frac{p}{q},\quad (\nu,q)=1,\quad H=\bigl\{k\in[1,q/2]\colon \langle k\nu\rangle_q\leqslant p-1\bigr\},$$

то

$$A_{\mathbb T}\Bigl(\frac{\nu}{q},\frac{p}{q}\Bigr)=\sup\widehat{t}_1,\quad\text{где}\quad t(y)=1+2\sum_{k\in H}\widehat{t}_k\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}ky\Bigr)\geqslant 0,\quad y\in\mathbb{Z}_q.$$

Множество $H$ легко описать. Если $\langle\overline{r}\nu\rangle_q=1$, то $H=\{\langle\overline{r}k\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\}$.

Мы предполагаем, что экстремальный полином в задаче Фейера (2.4) при условии $(\nu,q)=1$ всегда единственен и имеет ровно $p-1$ нулей на $[0,q/2]$, поэтому достаточные условия, позволяющие решить задачу (2.4), сформулируем в теореме 2. Мы полагаем, что они являются и необходимыми.

**Теорема 2.** *Пусть* $x=\dfrac{\nu}{q}$, $h=\dfrac{p}{q}$, $(\nu,q)=1$. *Если существуют множество целых чисел* $S_{\nu,p,q}=\{x_1,\dots,x_{p-1}\}\subset[0,q/2]$ *и множество положительных чисел* $\{\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1}\}$ *такие, что*

(1) *полином* $\tau(y)=\pm\prod\limits_{k=1}^{p-1}\Bigl(\cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}y\Bigr)-\cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}x_k\Bigr)\Bigr)\geqslant 0$, $y\in\mathbb{Z}_q$, $\widehat{\tau}_0>0$,

(2) *для любого полинома* $t\in T_{p,q}$ *справедлива квадратурная формула*

$$\gamma_0\widehat{t}_0-\widehat{t}_\nu=\sum_{k=1}^{p-1}\gamma_k t(x_k),\quad \gamma_0=\sum_{k=1}^{p-1}\gamma_k,$$

*то* $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{\nu}{q},\dfrac{p}{q}\Big)=\lambda(\nu,p,q)=\gamma_0$, *и полином* $t^*(y)=\tau(y)/\widehat{\tau}_0$ *является экстремальным в задаче* (2.4).

Доказательство. Из квадратурной формулы следует, что $\lambda(\nu,p,q)\leqslant\gamma_0$. Из нее также вытекает, что эта оценка достигается на полиноме $t^*(y)$. Теорема 2 доказана.

Мы также предполагаем, что точки $q^{-1}S_{\nu,p,q}$ аппроксимируют на сетке $q^{-1}\mathbb{Z}_q$ нули экстремальных полиномов в задаче Фейера $\Lambda(\nu,p)$ (1.5) (см. полином (1.8) и его преобразования (1.9)). Это выполняется во всех случаях решения задачи Фейера (2.4), которые будут приведены в последующих разделах. В дальнейшем экстремальный полином всегда будет экстремальным в задаче (2.4).

## 3. Вычисление величины $\lambda(\nu,p,2p)$

При $q=2p$ ($h=1/2$) решение задачи Турана (1.10) имеется в [19] и [16]. Дадим доказательство, опирающееся на теоремы 1, 2. Будем использовать известные суммы [20, 1.341]

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx+y)=\frac{\sin\Big(\dfrac{n+1}{2}x\Big)\cos\Big(\dfrac{n}{2}x+y\Big)}{\sin\dfrac{x}{2}},\quad \frac12+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\Big(n+\dfrac12\Big)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}. \tag{3.1}$$

**Теорема 3.** *Если* $\nu=2n$, $p=2m+1$ $n=1,\dots,m$, $q=2p$, $x=\dfrac{n}{p}$, $h=\dfrac12$, *то*

(1) *множество нулей* $S_{\nu,p,q}=\{1,\dots,p-1\}$,

(2) *экстремальный полином* $t^*(y)=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}2ky\Big)$,

(3) *для любого полинома* $t\in T_{p,2p}$ *справедлива квадратурная формула*

$$\widehat{t}_0-\widehat{t}_\nu=\frac1p\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1-\cos\Big(\frac{2\pi}{q}\nu k\Big)\Big)t(k), \tag{3.2}$$

*из которой вытекают равенства* $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{n}{p},\dfrac12\Big)=\lambda(\nu,p,2p)=1$.

Доказательство. Применяя (3.1), получим

$$t^*(y)=1+2\sum_{k=1}^{m}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}2ky\Big)=\frac{\sin(\pi y)}{\sin\Big(\dfrac{\pi}{p}y\Big)}=\begin{cases}0, & y=1,\dots,p-1,\\ p, & y=0,p.\end{cases}$$

Следовательно, полином $t^*$ — экстремальный и его множество нулей на $[0,p]$ совпадает с $S_{\nu,p,q}=\{1,\dots,p-1\}$. В силу четности $\nu$ квадратурная формула (3.2) вытекает из равенств

$$\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1-\cos\Big(\frac{\pi}{p}\nu k\Big)\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{p}ks\Big)=\sum_{k=1}^{p-1}\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{p}ks\Big)-\frac12\cos\Big(\frac{\pi}{p}k(\nu+s)\Big)-\frac12\cos\Big(\frac{\pi}{p}k(\nu-s)\Big)\Big]$$

$$=\frac{\sin\Big(\dfrac{\pi}{p}\Big(p-\dfrac12\Big)s\Big)}{2\sin\Big(\dfrac{\pi s}{2p}\Big)}-\frac{\sin\Big(\dfrac{\pi}{p}\Big(p-\dfrac12\Big)(\nu+s)\Big)}{4\sin\Big(\dfrac{\pi(\nu+s)}{2p}\Big)}-\frac{\sin\Big(\dfrac{\pi}{p}(p-\dfrac12)(\nu-s)\Big)}{4\sin\Big(\dfrac{\pi(\nu-s)}{2p}\Big)}$$

$$=\begin{cases}p, & s=0,\\ -p/2, & s=\nu,\\ 0, & s=1,\dots,p-1, s\neq\nu.\end{cases}$$

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 2. В теореме 2 можно было сразу заметить, что в силу леммы 1 и замечания 1 $\lambda(\nu,p,2p)=\lambda(2n,2m+1,2(2m+1))=\lambda(n,m+1,2m+1)=1$. Квадратурную формулу можно было также не доказывать, так как значение 1 величины (1.10) максимальное.

**Следствие 3.** *Если* $k\in\mathbb{N}$, $\nu=1,\dots,k$, $h\in\Big(\dfrac{k}{2k+1},\dfrac{1}{2}\Big]$, *то* $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{\nu}{2k+1},h\Big)=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неубывания $A_{\mathbb{T}}(x,h)$ по $h$ для достаточно большого $d$

$$A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{2k+1},\frac{kd+1}{d(2k+1)}\Big)\leqslant A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{2k+1},h\Big)\leqslant A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{2k+1},\frac{1}{2}\Big)=\lambda(2\nu,2k+1,2(2k+1))=1.$$

Остается заметить, что в силу леммы 1 и замечания 1

$$A_{\mathbb{T}}\Big(\frac{\nu}{2k+1},\frac{kd+1}{d(2k+1)}\Big)=\lambda(d\nu,kd+1,d(2k+1))=\lambda(\nu,k+1,2k+1)=1.$$

Следствие 3 доказано.

**Теорема 4.** *Если* $\nu=2n+1$, $p\geqslant\nu+1$, $q=2p$, $(\nu,q)=1$, $\langle\overline{r}\nu\rangle_q=1$, $x=\dfrac{\nu}{2p}$, $h=\dfrac{1}{2}$, *то*

(1) *множество нулей* $S_{\nu,p,q}=\{1,\dots,p\}\setminus\{\overline{r}\}$,

(2) *экстремальный полином* $t^*(y)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1+\cos\Big(\frac{2\pi}{q}\overline{r}k\Big)\Big)\cos\Big(\frac{2\pi}{q}ky\Big)$,

(3) *для любого полинома* $t\in T_{p,2p}$ *справедлива квадратурная формула*

$$\frac{1}{2}\Big(1+\cos\frac{\pi}{p}\Big)\widehat{t}_0-\widehat{t}_\nu$$

$$=\frac{1}{2p}\bigg\{\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1-\cos\Big(\frac{2\pi}{q}2k\nu\Big)\Big)t(2k)+\sum_{k=1}^{p}\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)-\cos\Big(\frac{2\pi}{q}(2k-1)\nu\Big)\Big)t(2k-1)\bigg\},\qquad(3.3)$$

*из которой вытекают равенства* $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{\nu}{2p},\dfrac{1}{2}\Big)=\lambda(\nu,p,2p)=\dfrac{1}{2}\Big(1+\cos\dfrac{\pi}{p}\Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя (3.1) и учитывая, что $\overline{r}$ — нечетное, получим

$$t^*(y)=1+\sum_{k=1}^{p-1}\Big\{\cos\Big(\frac{\pi}{p}ky\Big)+\frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{p}k(\overline{r}+y)\Big)+\frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{p}k(\overline{r}-y)\Big)\Big\}$$

$$=\frac{\sin\Big(\frac{\pi}{p}\Big(p-\frac{1}{2}\Big)y\Big)}{2\sin\Big(\frac{\pi y}{2p}\Big)}+\frac{\sin\Big(\frac{\pi}{p}\Big(p-\frac{1}{2}\Big)(\overline{r}+y)\Big)}{4\sin\Big(\frac{\pi(\overline{r}+y)}{2p}\Big)}+\frac{\sin\Big(\frac{\pi}{p}\Big(p-\frac{1}{2}\Big)(\overline{r}-y)\Big)}{4\sin\Big(\frac{\pi(\overline{r}-y)}{2p}\Big)}$$

$$=\begin{cases}p, & y=0,\\ p/2, & y=\overline{r},\\ 0, & y=1,\dots,p,\, y\neq\overline{r}.\end{cases}$$

Следовательно, полином $t^*(y)$ — допустимый, его множество нулей на $[0,p]$ совпадает с $S_{\nu,p,q}=\{1,\dots,p\}\setminus\{\overline{r}\}$ и $\widehat{t^*_\nu}=\dfrac{1}{2}\Big(1+\cos\Big(\dfrac{2\pi}{q}\overline{r}\nu\Big)\Big)=\dfrac{1}{2}\Big(1+\cos\frac{\pi}{p}\Big)$. Для доказательства квадратурной формулы (3.3) применяем (2.1), (3.1). Имеем

$$\sum_{k=1}^{p-1}\Big(1-\cos\Big(\frac{\pi}{p}2k\nu\Big)\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{p}2ks\Big)+\sum_{k=1}^{p}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{p}\Big)-\cos\Big(\frac{2\pi}{q}(2k-1)\nu\Big)\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{p}(2k-1)s\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \cos\Big(\frac{\pi}{p}2ks\Big) + \cos\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{p}\cos\Big(\frac{\pi}{p}(2k-1)s\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\Big\{\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(\nu+s)\Big)+\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(\nu-s)\Big)\Big\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin\Big(\frac{\pi}{p}(2p-1)s\Big)}{2\sin\Big(\frac{\pi s}{p}\Big)} + \frac{\cos\frac{\pi}{p}\sin(\pi s)}{2\sin\Big(\frac{\pi s}{p}\Big)} - \frac{1}{2}q\delta_{s\nu} = \begin{cases} p\Big(1+\cos\frac{\pi}{p}\Big), & s=0,\\ -p, & s=\nu,\\ 0, & s=1,\dots,p-1, s\ne\nu.\end{cases}$$

Отсюда вытекает (3.3). Теорема 4 доказана.

## 4. Вычисление величин $\lambda(1,p,2p+1)$, $\lambda(1,p-1,2p+1)$

Рассмотрим некоторые другие случаи вычисления величины $\lambda(1,p,q)$. Нам понадобятся вспомогательные утверждения о коэффициентах четного тригонометрического полинома в зависимости от его нулей.

**Лемма 2.** *Если*

$$t_p(x,\varphi) = \prod_{s=0}^{p-1}(\cos(2\pi x) - \cos(2\pi(2s+1)\varphi)) = \frac{1}{2^{p-1}}\Big\{\sum_{s=0}^{p-1} B_s^p\cos(2\pi(p-s)x) + \frac{1}{2}B_p^p\Big\},$$

*то*

$$B_0^p = 1, \quad B_s^p = \prod_{i=1}^{s}\frac{\sin(2\pi(i-2p-1)\varphi)}{\sin(2\pi i\varphi)}, \quad s=1,\dots,p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом математической индукции. При $p=1$ $t_1(x,\varphi)=\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varphi)$, $B_0^1=1$, $B_1^1=-2\cos(2\pi\varphi)$, и утверждение леммы верно. Далее

$$t_{p+1}(x,\varphi) = \frac{1}{2^{p-1}}\Big\{\sum_{s=0}^{p-1}B_s^p\cos(2\pi(p-s)x)+\frac{1}{2}B_p^p\Big\}\big(\cos(2\pi x)-\cos(2\pi(2p+1)\varphi)\big)$$

$$= \frac{1}{2^p}\Big\{\sum_{s=0}^{p}B_s^{p+1}\cos(2\pi(p+1-s)x)+\frac{1}{2}B_{p+1}^{p+1}\Big\},$$

где $B_s^{p+1}=B_s^p-2\cos(2\pi(2p+1)\varphi)B_{s-1}^p+B_{s-2}^p$, $s=0,\dots,p+1$, $B_{-2}^p=B_{-1}^p=0$, $B_{p+1}^p=B_{p-1}^p$.

Пользуясь индуктивным предположением, получим $B_0^{p+1}=B_0^p=1$,

$$B_1^{p+1} = -\frac{\sin(2\pi 2p\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)} - 2\cos(2\pi(2p+1)\varphi) = -\frac{\sin(2\pi(2p+2)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)},$$

$$B_s^{p+1} = B_{s-2}^p\Big\{\prod_{i=s-1}^{s}\frac{\sin(2\pi(i-2p-1)\varphi)}{\sin(2\pi i\varphi)} - 2\cos(2\pi(2p+1)\varphi)\frac{\sin(2\pi(s-2p-2)\varphi)}{\sin(2\pi(s-1)\varphi)}+1\Big\}.$$

Так как

$$\prod_{i=s-1}^{s}\sin(2\pi(i-2p-1)\varphi) - 2\cos(2\pi(2p+1)\varphi)\sin(2\pi(s-2p-2)\varphi)\sin(2\pi s\varphi) + \prod_{i=s-1}^{s}\sin(2\pi i\varphi)$$

$$= \sin(2\pi(2p+1)\varphi)\sin(2\pi(2p+2)\varphi),$$

то

$$B_s^{p+1} = B_{s-2}^p\frac{\sin(2\pi(2p+1)\varphi)\sin(2\pi(2p+2)\varphi)}{\sin(2\pi(s-1)\varphi)\sin(2\pi s\varphi)} = \prod_{i=1}^{s}\frac{\sin(2\pi(i-2p-3)\varphi)}{\sin(2\pi i\varphi)}, \quad s=2,\dots,p.$$

Аналогично проверяется, что $B_{p+1}^{p+1}=\prod_{i=1}^{p+1}\frac{\sin(2\pi(i-2p-3)\varphi)}{\sin(2\pi i\varphi)}$. Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** *Если* $\tau(x)=\dfrac{1}{2^{p-1}}\Big\{\sum\limits_{s=0}^{p-1}b_s^p\cos(2\pi(p-s)x)+\dfrac12 b_p^p\Big\}$ *и* $\varphi$ *— нуль* $\tau(x)$, *то*

$$\frac{\tau(x)}{\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varphi)}=\frac{1}{2^{p-2}}\Big\{\sum_{s=0}^{p-2}b_s^{p-1}\cos(2\pi(p-s-1)x)+\frac12 b_{p-1}^{p-1}\Big\},$$

*где*

$$b_s^{p-1}=\sum_{l=0}^{s}\frac{\sin(2\pi(s-l+1)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p,\quad s=0,1,\dots,p-1.$$

Доказательство. Как и в лемме 2,

$$\tau(x)=\frac{1}{2^{p-2}}\Big\{\sum_{s=0}^{p-2}b_s^{p-1}\cos(2\pi(p-s-1)x)+\frac12 b_{p-1}^{p-1}\Big\}\big(\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varphi)\big)$$

$$=\frac{1}{2^{p-1}}\Big\{\sum_{s=0}^{p-1}\widetilde{b}_s^p\cos(2\pi(p-s)x)+\frac12\widetilde{b}_p^p\Big\}.$$

где $\widetilde{b}_s^p=b_s^{p-1}-2\cos(2\pi\varphi)b_{s-1}^{p-1}+b_{s-2}^{p-1}$, $s=0,\dots,p$, $b_{-2}^{p-1}=b_{-1}^{p-1}=0$, $b_p^{p-1}=b_{p-2}^{p-1}$. Остается показать, что $\widetilde{b}_s^p=b_s^p$, $s=0,\dots,p$. Имеем $\widetilde{b}_0^p=b_0^{p-1}=b_0^p$,

$$\widetilde{b}_1^p=b_1^{p-1}-2\cos(2\pi\varphi)b_0^{p-1}=\sum_{l=0}^{1}\frac{\sin(2\pi(2-l)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p-2\cos(2\pi\varphi)b_0^p=b_1^p.$$

Для $s=2,\dots,p-1$

$$\widetilde{b}_s^p=\sum_{l=0}^{s}\frac{\sin(2\pi(s-l+1)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p-2\cos(2\pi\varphi)\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\sin(2\pi(s-l)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p+\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\sin(2\pi(s-l-1)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p$$

$$=b_s^p+\sum_{l=0}^{s-2}\frac{(\sin(2\pi(s-l+1)\varphi)+\sin(2\pi(s-l-1)\varphi)-2\cos(2\pi\varphi)\sin(2\pi(s-l)\varphi))}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p=b_s^p.$$

Наконец, учитывая, что $\varphi$ — нуль полинома $\tau(x)$, получим

$$\widetilde{b}_p^p=2\sum_{l=0}^{p-2}\frac{\sin(2\pi(p-1-l)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p-2\cos(2\pi\varphi)\sum_{l=0}^{p-1}\frac{\sin(2\pi(p-l)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p$$

$$=2\sum_{l=0}^{p-2}\frac{(\sin(2\pi(p-1-l)\varphi)-2\cos(2\pi\varphi)\sin(2\pi(p-l)\varphi)}{\sin(2\pi\varphi)}b_l^p-2\cos(2\pi\varphi)b_{p-1}^p$$

$$=-2\sum_{l=0}^{p-1}\cos(2\pi(p-l)\varphi)b_l^p=b_p^p.$$

Лемма 3 доказана.

**Теорема 5.** *Если* $\nu=1$, $p\geqslant 2$, $q=2p+1$, $x=\dfrac{1}{2p+1}$, $h=\dfrac{p}{2p+1}$, *то*

(1) *множество нулей*

$$S_{1,p,2p+1}=\{2,\dots,p\}=\{\langle 2k+1\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\},\tag{4.1}$$

(2) *полином* $\tau(y)=\prod_{k=1}^{p-1}\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr)-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(k+1)\Bigr)\Bigr)\geqslant 0,\ y\in\mathbb{Z}_q,\ \widehat{\tau}_0>0,$ *экстремальный полином имеет вид* $t^*(y)=\tau(y)/\widehat{\tau}_0$,

(3) *для любого полинома* $t\in T_{p,2p+1}$ *справедлива квадратурная формула*

$$\Bigl(2\cos\frac{\pi}{q}-1\Bigr)\widehat{t}_0-\widehat{t}_1=\frac{4}{q}\sum_{k=0}^{p}\Bigl(1-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr)\Bigr)\Bigl(\cos\frac{\pi}{q}+\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr)\Bigr)t(k), \tag{4.2}$$

*из которой вытекают равенства* $A_{\mathbb{T}}\Bigl(\frac{1}{2p+1},\frac{p}{2p+1}\Bigr)=\lambda(1,p,2p+1)=2\cos\frac{\pi}{2p+1}-1.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (4.1) проверяется непосредственными вычислениями. Неотрицательность полинома $\tau(y)$ на $\mathbb{Z}_q$ очевидна. Для $\varphi=1/q$ рассмотрим полином

$$\widetilde{\tau}(y)=\prod_{s=0}^{p-1}\Bigl\{\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr)-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(2s+1)\Bigr)\Bigr\}=\frac{1}{2^{p-1}}\Bigl\{\sum_{s=0}^{p-1}B_s^p\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(p-s)y\Bigr)+\frac{1}{2}B_p^p\Bigr\},$$

где по лемме 2 $B_0^p=1$, $B_s^p=\prod_{i=1}^{s}\dfrac{\sin\Bigl(\frac{2\pi}{q}(i-2p-1)\Bigr)}{\sin\Bigl(\frac{2\pi}{q}i\Bigr)}=1$, $s=1,\dots,p$. Применяя (4.1) и лемму 3, получим

$$\tau(y)=\frac{\widetilde{\tau}(y)}{\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr)-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\Bigr)}=\frac{1}{2^{p-2}}\Bigl\{\sum_{s=0}^{p-2}b_s^{p-1}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(p-s-1)y\Bigr)+\frac{1}{2}b_{p-1}^{p-1}\Bigr\},$$

где

$$b_{p-1}^{p-1}=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{\sin\Bigl(\frac{2\pi}{q}(p-l)\Bigr)}{\sin\Bigl(\frac{2\pi}{q}\Bigr)}B_l^p=\sum_{l=0}^{p-1}\frac{\sin\Bigl(\frac{2\pi}{2p+1}(p-l)\Bigr)}{\sin\Bigl(\frac{2\pi}{2p+1}\Bigr)}>0.$$

Следовательно, $\widehat{\tau}_0>0$.

Остается доказать квадратурную формулу (4.2). Рассмотрим неотрицательный на $[0,p]$ полином $f(k)=\Bigl(1-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr)\Bigr)\Bigl(\cos\frac{\pi}{q}+\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr)\Bigr)$, обращающийся в нуль при $k=0,1$. Применяя (3.1), получим

$$2\sum_{k=0}^{p}f(k)\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}ks\Bigr)=\sum_{k=0}^{p}\Bigl[2\cos\frac{\pi}{q}-1+2\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{q}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr)-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}2pk\Bigr)\Bigr]\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}ks\Bigr)$$

$$=(2\cos\frac{\pi}{q}-1)\sum_{k=0}^{p}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}ks\Bigr)+\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{q}\Bigr)\sum_{k=0}^{p}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}k(p+s)\Bigr)+\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{q}\Bigr)\sum_{k=0}^{p}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}k(p-s)\Bigr)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}k(2p+s)\Bigr)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}k(2p-s)\Bigr)$$

$$=\Bigl(2\cos\frac{\pi}{q}-1\Bigr)\frac{\sin\pi s}{2\sin\frac{\pi s}{q}}+\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{q}\Bigr)\frac{\sin\pi(p+s)}{2\sin\frac{\pi(p+s)}{q}}$$

$$+\Bigl(1-\cos\frac{\pi}{q}\Bigr)\frac{\sin\pi(p-s)}{2\sin\frac{\pi(p-s)}{q}}-\frac{\sin\pi(2p+s)}{4\sin\frac{\pi(2p+s)}{q}}-\frac{\sin\pi(2p-s)}{4\sin\frac{\pi(2p-s)}{q}}=\begin{cases}\frac{q}{2}\Bigl(2\cos\frac{\pi}{q}-1\Bigr), & s=0,\\ -\frac{q}{4}, & s=1,\\ 0, & s=2,\dots,p-1.\end{cases}$$

Отсюда вытекает (4.2). Теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** *Если* $\nu = 1$, $p \geqslant 3$, $q = 2p+1$, $x = \frac{1}{2p+1}$, $h = \frac{p-1}{2p+1}$, *то*

(1) *множество нулей*

$$S_{1,p-1,2p+1} = \{3,\dots,p\} = \{\langle 2k+1\rangle_q:\ k = 1,\dots,p-2\}, \tag{4.3}$$

(2) *полином* $\tau(y) = \prod\limits_{k=1}^{p-2}\Bigl(\cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}y\Bigr) - \cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}(k+2)\Bigr)\Bigr) \geqslant 0$, $y \in \mathbb{Z}_q$, $\widehat{\tau}_0 > 0$, *экстремальный полином имеет вид* $t^*(y) = \tau(y)/\widehat{\tau}_0$,

(3) *для любого полинома* $t \in T_{p-1,2p+1}$ *справедлива квадратурная формула*

$$\frac{2\cos\dfrac{2\pi}{q} - 2\cos\dfrac{\pi}{q} + 1}{2\cos\dfrac{\pi}{q} - 1}\widehat{t}_0 - \widehat{t}_1 = \frac{4}{q\Bigl(1 - \cos\dfrac{\pi}{q} + \cos\dfrac{2\pi}{q}\Bigr)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{p}\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr) - 1\Bigr)\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr) + \cos\frac{\pi}{q}\Bigr)\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}pk\Bigr) - \cos\frac{2\pi}{q}\Bigr)t(k), \tag{4.4}$$

*из которой вытекают равенства*

$$A_{\mathbb{T}}\Bigl(\frac{1}{2p+1}, \frac{p-1}{2p+1}\Bigr) = \lambda(1, p-1, 2p+1) = \frac{2\cos\dfrac{2\pi}{q} - 2\cos\dfrac{\pi}{q} + 1}{2\cos\dfrac{\pi}{q} - 1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (4.3) также проверяется непосредственными вычислениями. Неотрицательность полинома $\tau(y)$ на $\mathbb{Z}_q$ очевидна. Для $\varphi = 1/q$ рассмотрим полином

$$\widetilde{\tau}(y) = \prod_{s=0}^{p-2}\Bigl\{\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr) - \cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(2s+1)\Bigr)\Bigr\} = \frac{1}{2^{p-1}}\Bigl\{\sum_{s=0}^{p-2}B_s^{p-1}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(p-1-s)y\Bigr) + \frac{1}{2}B_{p-1}^{p-1}\Bigr\},$$

где по лемме 2

$$B_0^{p-1} = 1,\ B_s^{p-1} = \prod_{i=1}^{s}\frac{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}(i-2p+1)\Bigr)}{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}i\Bigr)} = \frac{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}(s+1)\Bigr)\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}(s+2)\Bigr)}{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}\Bigr)\sin\Bigl(\dfrac{4\pi}{q}\Bigr)},\ s = 1,\dots,p-1.$$

Применяя (4.3) и лемму 3, получим

$$\tau(y) = \frac{\widetilde{\tau}(y)}{\cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}y\Bigr) - \cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}\Bigr)} = \frac{1}{2^{p-3}}\Bigl\{\sum_{s=0}^{p-3}b_s^{p-2}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(p-s-2)y\Bigr) + \frac{1}{2}b_{p-2}^{p-2}\Bigr\},$$

где

$$b_{p-2}^{p-2} = \sum_{l=0}^{p-2}\frac{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}(p-1-l)\Bigr)}{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{q}\Bigr)}B_l^{p-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{p-2}\frac{\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{2p+1}(p-1-l)\Bigr)\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{2p+1}(l+1)\Bigr)\sin\Bigl(\dfrac{2\pi}{2p+1}(l+2)\Bigr)}{\sin^2\Bigl(\dfrac{2\pi}{2p+1}\Bigr)\sin\Bigl(\dfrac{4\pi}{2p+1}\Bigr)} > 0.$$

Следовательно, $\widehat{\tau}_0 > 0$.

Докажем квадратурную формулу (4.4). Пусть

$$\begin{aligned} f(k) &= \Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{q}pk\Big)-1\Big)\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{q}pk\Big)+\cos\frac{\pi}{q}\Big)\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{q}pk\Big)-\cos\frac{2\pi}{q}\Big) \\ &= a_0+a_1\cos\Big(\frac{2\pi}{q}pk\Big)+a_2\cos\Big(\frac{2\pi}{q}2pk\Big)+a_3\cos\Big(\frac{2\pi}{q}3pk\Big), \end{aligned}$$

где $a_0=\frac{1}{2}\Big(2\cos\frac{\pi}{q}-1-\cos\frac{2\pi}{q}+\cos\frac{3\pi}{q}\Big)$, $a_1=\frac{1}{4}\Big(3-6\cos\frac{\pi}{q}+4\cos\frac{2\pi}{q}-2\cos\frac{3\pi}{q}\Big)$, $a_2=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{q}-1-\cos\frac{2\pi}{q}\Big)$, $a_3=1$. Полином $f(k)$ на $[0,p]$ — положительный и обращается в нуль при $k=0,1,2$. Применяя (3.1), получим

$$\sum_{k=0}^{p} f(k)\cos\Big(\frac{2\pi}{q}ks\Big)=a_0\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}ks\Big)+\frac{a_1}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(p+s)\Big)+\frac{a_1}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(p-s)\Big)$$

$$+\frac{a_2}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(2p+s)\Big)+\frac{a_2}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(2p-s)\Big)+\frac{a_3}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(3p+s)\Big)$$

$$+\frac{a_3}{2}\sum_{k=0}^{p}\cos\Big(\frac{2\pi}{q}k(3p-s)\Big)=a_0\frac{\sin\pi s}{2\sin\frac{\pi s}{q}}+\frac{a_1}{2}\frac{\sin\pi(p+s)}{2\sin\frac{\pi(p+s)}{q}}+\frac{a_1}{2}\frac{\sin\pi(p-s)}{2\sin\frac{\pi(p-s)}{q}}+\frac{a_2}{2}\frac{\sin\pi(2p+s)}{2\sin\frac{\pi(2p+s)}{q}}$$

$$+\frac{a_2}{2}\frac{\sin\pi(2p-s)}{2\sin\frac{\pi(2p-s)}{q}}+\frac{a_3}{2}\frac{\sin\pi(3p+s)}{2\sin\frac{\pi(3p+s)}{q}}+\frac{a_3}{2}\frac{\sin\pi(3p-s)}{2\sin\frac{\pi(3p-s)}{q}}=\begin{cases}\frac{q}{2}a_0, & s=0,\\ \frac{q}{4}a_2, & s=1,\\ 0, & s=2,\dots,p-2.\end{cases}$$

Откуда следует (4.4). Из (4.4) вытекает, что полином $t^*(y)=\tau(y)/\widehat{\tau}_0$ — экстремальный. Теорема 6 доказана.

## 5. Вычисление величины $\lambda(p-1,p,q)$

Для всех $p$ и $q$ величина $\lambda(\nu,p,q)$ вычислена только при $\nu=p-1$. В этом случае экстремальный полином в задаче Фейера (1.5) есть $1+\cos(2\pi(p-1)x)$. Его нули $x_k=\dfrac{2k-1}{2(p-1)}$, $k=1,\dots,p-1$, на $[0,q/2]$ имеют аппроксимацию

$$S_{p-1,p,q}=\Big\{\Big[\frac{q(2k-1)}{2(p-1)}\Big],\Big[\frac{q(2l-1)}{2(p-1)}\Big]+1\colon k=1,\dots,\Big[\frac{p}{2}\Big],l=1,\dots,\Big[\frac{p-1}{2}\Big]\Big\}.$$

Так как

$$\Big[\frac{q(2k-1)}{2(p-1)}\Big]+\Big[\frac{q(2(p-k)-1))}{2(p-1)}\Big]=q-1,\quad k=1,\dots,\Big[\frac{p-1}{2}\Big],$$

то

$$S_{p-1,p,q}=\Big\{\Big\langle\Big[\frac{q(2k-1)}{2(p-1)}\Big]\Big\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\Big\}. \tag{5.1}$$

Опишем арифметические свойства множества $S_{p-1,p,q}$. Будем отдельно рассматривать случаи нечетного и четного $q$.

**Лемма 4** [11; 12]. *Если* $(p-1,q)=1$, $\langle\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, *то*

$$\Big\{\Big\langle\Big[\frac{qk}{p-1}\Big]\Big\rangle_q\colon k=1,\dots,p-2\Big\}=\big\{\langle\overline{r}k\rangle_q\colon k=1,\dots,p-2\big\}.$$

**Лемма 5.** *Если* $(2(p-1),q)=1$, $\langle 2\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, *то*

$$S_{p-1,p,q}=\bigl\{\langle\overline{r}(2k-1)\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\langle 2\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, то по лемме 4

$$\Bigl\{\Bigl\langle\Bigl[\frac{qk}{2(p-1)}\Bigr]\Bigr\rangle_q\colon k=1,\dots,2p-3\Bigr\}=\Bigl\{\langle\overline{r}k\rangle_q\colon k=1,\dots,2p-3\Bigr\},$$

$$\Bigl\{\Bigl\langle\Bigl[\frac{qk}{p-1}\Bigr]\Bigr\rangle_q\colon k=1,\dots,p-2\Bigr\}=\Bigl\{\langle 2\overline{r}k\rangle_q\colon k=1,\dots,p-2\Bigr\},$$

поэтому $\Bigl\{\Bigl\langle\Bigl[\frac{q(2k-1)}{2(p-1)}\Bigr]\Bigr\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\Bigr\}=\Bigl\{\langle 2\overline{r}(2k-1)\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\Bigr\}$.
Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** *Если* $q=2n$, $(p-1,q)=1$, $\langle\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, *то*

$$S_{p-1,p,q}=\bigl\{\langle\overline{r}(n-k)\rangle_q\colon k=0,\dots,p-2\bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.1) достаточно доказать, что для $z>1$

$$\prod_{k=1}^{p-1}\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\Bigl[\frac{q(2k-1)}{2(p-1)}\Bigr]\Bigr)\Bigr)=\prod_{k=0}^{p-2}\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}(n-k)\Bigr)\Bigr). \tag{5.2}$$

Рассмотрим функцию $f(z)=\sum_{k=1}^{p-1}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\Bigl[\frac{qk-n}{p-1}\Bigr]\Bigr)\Bigr)$, $z>1$. Так как

$$\Bigl[\frac{m}{q}\Bigr]-\Bigl[\frac{m-1}{q}\Bigr]=\begin{cases}1, & q|m,\\ 0, & q\nmid m,\end{cases}$$

то

$$f(z)=\sum_{m=p-1+n}^{q(p-1)+n-1}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\Bigl[\frac{m-n}{p-1}\Bigr]\Bigr)\Bigr)\Bigl(\Bigl[\frac{m}{q}\Bigr]-\Bigl[\frac{m-1}{q}\Bigr]\Bigr)$$

$$=\sum_{s=p-1}^{q(p-1)-1}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\Bigl[\frac{s}{p-1}\Bigr]\Bigr)\Bigr)\Bigl(\Bigl[\frac{s+n}{q}\Bigr]-\Bigl[\frac{s+n-1}{q}\Bigr]\Bigr).$$

Записывая $s=t(p-1)+r$, $1\leqslant t\leqslant q-1$, $0\leqslant r\leqslant p-2$, и используя равенство $\langle\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, получим

$$f(z)=\sum_{t=1}^{q-1}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}t\Bigr)\Bigr)\sum_{r=0}^{p-2}\Bigl(\Bigl[\frac{t(p-1)+r+n}{q}\Bigr]-\Bigl[\frac{t(p-1)+r+n-1}{q}\Bigr]\Bigr)$$

$$=\sum_{t=1}^{q-1}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}t(p-1)\Bigr)\Bigr)\Bigl(\Bigl[\frac{t(p-1)+p-2+n}{q}\Bigr]-\Bigl[\frac{t(p-1)+n-1}{q}\Bigr]\Bigr).$$

Так как $(p-1,q)=1$, то произведение $t(p-1)$ пробегает $\mathbb{Z}_q\setminus\{0\}$, поэтому

$$f(z)=\sum_{k=1}^{q-1}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}k\Bigr)\Bigr)\Bigl(\Bigl[\frac{k+p-2+n}{q}\Bigr]-\Bigl[\frac{k+n-1}{q}\Bigr]\Bigr)$$

$$=\sum_{k=n-p+2}^{n}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}k\Bigr)\Bigr)=\sum_{k=0}^{p-2}\ln\Bigl(z-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}(n-k)\Bigr)\Bigr).$$

Потенцируя последнее равенство, придем к (5.2). Лемма 6 доказана.

Пусть $F_{p-1,q}(y)$, $y\in\mathbb{Z}_q$, — полином (1.4) порядка $p-2$, экстремальный в дискретной задаче Фейера (1.2).

**Теорема 7.** *Если* $(2(p-1),q)=1$, $\langle 2\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, $x=\dfrac{p-1}{q}$, $h=\dfrac{p}{q}$, *то*

(1) *множество нулей*

$$S_{p-1,p,q}=\bigl\{\langle\overline{r}(2k-1)\rangle_q\colon k=1,\dots,p-1\bigr\}, \tag{5.3}$$

(2) *полином* $\tau(y)=\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr)-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}(2k-1)\Bigr)\Bigr)\geqslant 0$, $y\in\mathbb{Z}_q$, $\widehat{\tau}_0>0$, *экстремальный полином имеет вид* $t^*(y)=\tau(y)/\widehat{\tau}_0$,

(3) *для любого полинома* $t\in T_{p,q}$ *справедлива квадратурная формула*

$$\frac{F_{p-1,q}(0)}{2\cos\dfrac{\pi}{q}F_{p-1,q}(1)}\widehat{t}_0-\widehat{t}_{p-1}=\sum_{k=1}^{p-1}A_k t(\overline{r}(2k-1)),\quad A_k>0, \tag{5.4}$$

*из которой вытекают равенства* $A_{\mathbb{T}}\Bigl(\dfrac{p-1}{q},\dfrac{p}{q}\Bigr)=\lambda(p-1,p,q)=\dfrac{F_{p-1,q}(0)}{2\cos\dfrac{\pi}{q}F_{p-1,q}(1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5.3) доказано в лемме 5.

Докажем квадратурную формулу (5.4). Коэффициенты $A_k$ в (5.4) определим из условия

$$\sum_{k=1}^{p-1}A_k\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(2k-1)y\Bigr)=\frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{q}F_{p-1,q}(1)}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr)F_{p-1,q}(2y).$$

Коэффициенты полинома $F_{p-1,q}(y)$ положительные, $\{2\overline{r}s\}_{s=1}^{p-2}$ — его нули на $[0,q/2]$, $F_{p-1,q}(1)=F_{p-1,q}(2\overline{r}(p-1))>0$, следовательно, все $A_k>0$. Так как в равенстве $2\overline{r}(p-1)=\pm 1+mq$, $m$ — нечетное, то

$$\sum_{k=1}^{p-1}A_k\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}(2k-1)\overline{r}s\Bigr)=\frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{q}F_{p-1,q}(1)}\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}s\Bigr)F_{p-1,q}(2\overline{r}s)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{F_{p-1,q}(0)}{2\cos\dfrac{\pi}{q}F_{p-1,q}(1)}, & s=0,\\ 0, & s=1,\dots,p-2,\\ -\dfrac{1}{2}, & s=p-1.\end{cases}$$

Квадратурная формула (5.4) доказана.

Полином $\tau(y)$ — неотрицательный на $\mathbb{Z}_q$ по построению. Так как $\widehat{\tau}_{p-1}=2^{1-p}>0$, то из (5.4) следует, что $\widehat{\tau}_0>0$ и $t^*(y)=\tau(y)/\widehat{\tau}_0$ — экстремальный полином. Теорема 7 доказана.

**Теорема 8.** *Если* $q=2n$, $2\leqslant p\leqslant n$, $(p-1,q)=1$, $\langle\overline{r}(p-1)\rangle_q=1$, $x=\dfrac{p-1}{q}$, $h=\dfrac{p}{q}$, *то*

(1) *множество нулей*

$$S_{p-1,p,q}=\{\langle\overline{r}(n-k)\rangle_q\colon k=0,\dots,p-2\}, \tag{5.5}$$

(2) *полином* $\tau(y)=\displaystyle\prod_{k=0}^{p-2}\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}y\Bigr)-\cos\Bigl(\frac{2\pi}{q}\overline{r}(n-k)\Bigr)\Bigr)\geqslant 0$, $y\in\mathbb{Z}_q$, $\widehat{\tau}_0>0$, *экстремальный полином имеет вид* $t^*(y)=\tau(y)/\widehat{\tau}_0$,

(3) *для любого полинома $t \in T_{p,q}$ справедлива квадратурная формула*

$$\frac{F_{p-1,q}(0)}{2F_{p-1,q}(1)}\widehat{t}_0 - \widehat{t}_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-2} B_k t(\overline{r}(n-k)), \quad B_k > 0, \tag{5.6}$$

*из которой вытекают равенства* $A_{\mathbb{T}}\Big(\dfrac{p-1}{q}, \dfrac{p}{q}\Big) = \lambda(p-1,p,q) = \dfrac{F_{p-1,q}(0)}{2F_{p-1,q}(1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5.5) доказано в лемме 6.

Докажем квадратурную формулу (5.6). Если $F_{p-1,q}(y) = \sum\limits_{k=0}^{p-2} \widehat{F}_k \cos\Big(\dfrac{2\pi}{q}ky\Big)$, $\widehat{F}_0 = 1$,— экстремальный полином порядка $p-2$ в задаче Фейера (1.2), то положим

$$B_k = \frac{\widehat{F}_k}{2F_{p-1,q}(1)}, \quad k = 0, \ldots, p-2.$$

Так как $\widehat{F}_k > 0$, $F_{p-1,q}(\overline{r}k) = 0$, $k = 1, \ldots, p-2$, $F_{p-1,q}(1) = F_{p-1,q}(\overline{r}(p-1)) > 0$, то все $B_k > 0$ и в силу нечетности $\overline{r}$

$$\sum_{k=0}^{p-2} B_k \cos\Big(\frac{2\pi}{q}\overline{r}(n-k)s\Big) = \frac{(-1)^{\overline{r}s}}{2F_{p-1,q}(1)} \sum_{k=0}^{p-2} \widehat{F}_k \cos\Big(\frac{2\pi}{q}k\overline{r}s\Big) = \begin{cases} \dfrac{F_{p-1,q}(0)}{2F_{p-1,q}(1)}, & s = 0, \\ 0, & s = 1, \ldots, p-2, \\ -\dfrac{1}{2}, & s = p-1. \end{cases}$$

Квадратурная формула (5.6) доказана.

Полином $\tau(y)$ — неотрицательный на $\mathbb{Z}_q$ по построению. Так как $\widehat{\tau}_{p-1} = 2^{1-p} > 0$, то из (5.6) следует, что $\widehat{\tau}_0 > 0$ и $t^*(y) = \tau(y)/\widehat{\tau}_0$ — экстремальный полином. Теорема 8 доказана.

## Заключение

В работе приведено достаточно много случаев решения поточечной задачи Турана на торе и связанной с ней второй дискретной задачи Фейера, сформулированы гипотезы о виде решения в других случаях. Однако еще предстоит преодолеть значительные технические и, возможно, идейные трудности для получения полного решения этих задач. Первоочередные усилия во второй дискретной задаче Фейера следует направить на вычисление величины $\lambda(1,p,q)$ и начать со случая $q = 2(p+1)n+1$. Тогда множество нулей экстремального полинома на $[0, q/2]$ будет иметь наиболее простой вид $S_{1,p,q} = \{\langle n(2k+1)\rangle_q \colon k = 1, \ldots, p-1\}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Rudin W.** Fourier analysis on groups. N Y: Inter-science Publishers Inc., 1962. 285 p.
2. **Siegel C. L.** Über Gitterpunkte in Konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremalproblem // Acta Math. 1935. Vol. 65, no. 1. P. 307–323. doi: 10.1007/BF02420949.
3. **Boas R. P., Kac M.** Inequalities for Fourier transforms for positive function // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 189–206. doi: 10.1215/S0012-7094-45-01215-4.
4. **Gorbachev D. V.** Extremum problem for periodic functions supported in a ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, no. 3. P. 313–319. doi: 10.1023/A:1010275206760.
5. **Arestov V. V., Berdysheva E. E.** The Turan problem for a class of polytopes // East J. Math. 2002. Vol. 8, no. 3. P. 381–388.
6. **Kolountzakis M. N., Revész Sz. Gy.** On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430. doi: 10.1090/S0002-9939-03-07023-0.
7. **Стечкин С. Б.** Одна экстремальная задача для экстремальных рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Scient. Hungar. 1972. Vol. 23, no. 3-4. P. 289–291. doi: 10.1007/BF01896947.

8. **Gorbachev D. V., Manoshina A. S.** Turán extremal problem for periodic functions with small support and its applications // Math. Notes. 2004. Vol. 76, no. 5. P. 640–652. doi: 10.1023/B:MATN.0000049663.45427.0f .
9. **Fejér L.** Über trigonometrische Polynome // J. Reine Angew. 1916. Vol. 146. P. 53–82.
10. **Ivanov V. I., Rudomazina Yu. D.** On the Turan problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support // Math. Notes. 2005. Vol. 77, no. 6. P. 870–875. doi: 10.1007/s11006-005-0089-9 .
11. **Ivanov V. I., Gorbachev D. V., Rudomazina Yu. D.** Some extremal problems for periodic functions with conditions on there values and Fourier coefficients // Proc. Steklov Math. Institute. 2005. Suppl. 2. S139–S159.
12. **Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д.** Некоторые экстремальные задачи для периодических положительно определенных функций // Мат. вопросы кибернетики. 2008. Вып. 17. С. 169–224.
13. **Ivanov V. I., Ivanov A. V.** Turán problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 219–237.
14. **Ivanov V. I.** On the Turan and Delsarte problems for periodic positive definite functions // Math. Notes. 2006. Vol. 80, no. 6. P. 875–880. doi: 10.1007/s11006-006-0210-8 .
15. **Belov A. S.** On positive definite piecewise linear functions and their applications // Proc. Steklov Math. Institute. 2013. Vol. 280, no. 1. P. 5–33. doi: 10.1134/S0081543813010021 .
16. **Kolountzakis M. N., Revész Sz. Gy.** On pointwise estimates of positive definite functions with given support // Canad. J. Math. 2006. Vol.58, no. 2. P. 401–418. doi: 10.4153/CJM-2006-017-8 .
17. **Szegö G.** Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen // Math. Ann. 1926/27. Vol. 96. P. 601–632.
18. **Egerváry E., Szász O.** Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome // Math. Z. 1928. Vol. 27. P. 641–692. doi: 10.1007/BF01171120 .
19. **Arestov V. V., Berdysheva E. E., Berens H.** On pointwise Turán's problem for positive definite functions // East J. on Approx. 2003. Vol. 9, no. 1. P. 31–42.
20. **Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.** Table of integrals, series, and products. N Y; London; Oxford: Elsevier, Acad. Press, 2007. 1172 p.

Поступила 29.08.2018
После доработки 09.11.2018
Принята к публикации 12.11.2018

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Тульский государственный университет, г. Тула
e-mail: ivaleryi@mail.ru

## REFERENCES

1. Rudin W. *Fourier analysis on groups.* N Y: Inter-science Publishers Inc., 1962, 285 p. ISBN: 0-471-52364-X .
2. Siegel C.L. Über Gitterpunkte in Konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremalproblem. *Acta Math.*, 1935, vol. 65, no. 1, pp. 307–323. doi: 10.1007/BF02420949 .
3. Boas R.P., Kac M. Inequalities for Fourier transforms for positive function. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, no. 1, pp. 189–206. doi: 10.1215/S0012-7094-45-01215-4 .
4. Gorbachev D.V. Extremum problem for periodic functions supported in a ball. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3, pp. 313–319. doi: 10.1023/A:1010275206760 .
5. Arestov V.V., Berdysheva E.E. The Turan problem for a class of polytopes. *East J. Math.*, 2002, vol. 8, no. 3, pp. 381–388.
6. Kolountzakis M.N., Revész Sz.Gy. On a problem of Turán about positive definite functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, pp. 3423–3430. doi: 10.1090/S0002-9939-03-07023-0 .
7. Stechkin S.B. One extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients. *Acta Math. Scient. Hungar.*, 1972, vol. 23, no. 3-4, pp. 289–291 (in Russian). doi: 10.1007/BF01896947 .

8. Gorbachev D.V., Manoshina A.S. Turán extremal problem for periodic functions with small support and its applications. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 5-6, pp. 640–652. doi: 10.1023/B:MATN.0000049663.45427.0f .
9. Fejér L. Über trigonometrische Polynome. *J. Reine Angew.*, 1916, vol. 146, pp. 53–82.
10. Ivanov V.I., Rudomazina Yu.D. On the Turan problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support. *Math. Notes*, 2005, vol. 77, no. 5-6, pp. 870–875. doi: 10.1007/s11006-005-0089-9 .
11. Ivanov V.I., Gorbachev D.V., Rudomazina Yu.D. Some extremal problems for periodic functions with conditions on there values and Fourier coefficients. *Proc. Steklov Math. Institute*, 2005, suppl. 2, pp. S139–S159.
12. Ivanov V.I., Rudomazina Yu.D. Some extremal problems for periodic positive definite functions. In: *Math. Problems in Cybernetics*, vol. 17, Karpova N.A. (ed.), Moscow: Fizmatlit Publ., 2008, 265 p., ISBN: 978-5-9221-1055-6 , pp. 169–224 (in Russian).
13. Ivanov V.I., Ivanov A.V. Turán problems for periodic positive definite functions. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, 2010, vol. 33, pp. 219–237.
14. Ivanov V.I. On the Turan and Delsarte problems for periodic positive definite functions. *Math. Notes*, 2006, vol. 80, no. 5-6, pp. 875–880. doi: 10.1007/s11006-006-0210-8 .
15. Belov A.S. On positive definite piecewise linear functions and their applications. *Proc. Steklov Math. Institute*, 2013, vol. 280, no. 1, pp. 5–33. doi: 10.1134/S0081543813010021 .
16. Kolountzakis M.N., Revész Sz.Gy. On pointwise estimates of positive definite functions with given support. *Canad. J. Math.*, 2006, vol. 58, no. 2, pp. 401–418. doi: 10.4153/CJM-2006-017-8 .
17. Szegö G. Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen. *Math. Ann.*, 1926/27, vol. 96, pp. 601–632.
18. Egerváry E., Szász O. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. *Math. Z.*, 1928, vol. 27, no. 1, pp. 641–652. doi: 10.1007/BF01171120 .
19. Arestov V.V., Berdysheva E.E., Berens H. On pointwise Turán's problem for positive definite functions. *East J. Approx.*, 2003, vol. 9, no. 1, pp. 31–42.
20. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Table of Integrals, Series, and Products.* N Y; London; Oxford: Elsevier, Acad. Press, 2007, 1172 p. ISBN: 978-0-12-373637-6 . Translated to Russian under the title *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii.* 2011, Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011, 1232 p.

Received August 29, 2018
Revised November 09, 2018
Accepted November 12, 2018

**Funding Agency**: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00308).

*Valerii Ivanovich Ivanov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, 300012 Tula, e-mail: ivaleryi@mail.ru .