ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 512.55

СООТВЕТСТВИЕ МАЛЬЦЕВА И ИЗОМОРФИЗМЫ НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ ПОДКОЛЕЦ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ[1]

И. Н. Зотов, В. М. Левчук

Модели алгебраических систем языка первого порядка называются элементарно эквивалентными, пишем $\equiv$, если всякое предложение, истинное в одной из них, является истинным и в другой системе. Теоретико-модельные исследования линейных групп и колец развивались, начиная с работ А.И. Мальцева (1960, 1961), в тесной связи с теорией изоморфизмов; как правило, отношение $\equiv$ исследуемых систем переносилось на поля (или встречавшиеся кольца) коэффициентов. Соответствие Мальцева исследовалось для колец нильтреугольных матриц и унитреугольных групп (Б. Роуз, 1978, В. Вейлер, 1980, К. Видэла, 1988, О. В. Белеградек, 1999, В. М. Левчук, Е. В. Минакова, 2009). Для унипотентных подгрупп групп Шевалле над полем K соответствие исследовал в 1990 г. К. Видэла при $char\, K \neq 2, 3$. Ослабление ограничения на поле K в теореме Видэла авторы анонсировали ранее. В алгебре Шевалле, ассоциированной с системой корней Φ и кольцом K, естественно выделяется нильтреугольная подалгебра $N\Phi(K)$. Основные результаты настоящей статьи устанавливают соответствие Мальцева (взаимосвязано с описанием изоморфизмов) для колец Ли $N\Phi(K)$ классических типов над произвольными ассоциативно коммутативными кольцами с единицей. Отмечается следствие для (неассоциативных) обертывающих алгебр к алгебрам $N\Phi(K)$.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, изоморфизм, теоретико-модельное соответствие Мальцева.

I. N. Zotov, V. M. Levchuk. The Mal'tsev correspondence and isomorphisms of niltriangular subrings of Chevalley algebras.

Models of algebraic systems of a first-order language are called elementarily equivalent (we write $\equiv$) if every sentence that is true in one of the models is also true in the other model. The model-theoretic study of linear groups and rings initiated by A. I. Mal'tsev (1960, 1961) is closely related to isomorphism theory; as a rule, the relation $\equiv$ of systems was transferred to fields (or rings encountered) of the coefficients. The Mal'tsev correspondence was analyzed for rings of niltriangular matrices and unitriangular groups (B. Rose, 1978; V. Weiler, 1980; K. Videla, 1988; O. V. Belegradek, 1999; V. M. Levchuk, E. V. Minakova, 2009). For unipotent subgroups of Chevalley groups over a field K, the correspondence was studied in 1990 by Videla for char $K \neq 2, 3$. Earlier the authors announced a weakening of the constraint on the field K in the Videla theorem. In the Chevalley algebra associated with a root system Φ and a ring K, the niltriangular subalgebra $N\Phi(K)$ is naturally distinguished. The main results of this paper establish the Mal'tsev correspondence (related with the description of isomorphisms) for the Lie rings $N\Phi(K)$ of classical types over arbitrary associative commutative rings with unity. A corollary is noted for (nonassociative) enveloping algebras to $N\Phi(K)$.

Keywords: Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, isomorphism, model-theoretic Mal'tsev correspondence.

MSC: 17B30, 17B40, 03C07

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-135-145

Введение

Классические линейные группы, для которых элементарная эквивалентность переносится на поля или кольца коэффициентов, по-видимому, впервые выявлялись в работах А.И. Мальцева [1; 2]. С 1970-х годов теоретико-модельные исследования линейных групп и колец развивались в тесной связи с теорией изоморфизмов, [3–5]. Соответствие Мальцева исследовалось для унитреугольных групп и колец нильтреугольных матриц [6–10], для групп Шевалле и их унипотентных подгрупп [11; 12].

Алгебру Шевалле над любым полем K характеризуют (см. § 1) системой корней Φ и базой Шевалле, включающей элементы e_r $(r \in \Phi)$ [13, § 4.4]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

называют *нильтреугольной*. В обзоре [14] отмечается вопрос о соответствии Мальцева для колец Ли $N\Phi(K)$ над ассоциативно коммутативными кольцами K с единицей. В настоящей статье этот вопрос решается для классических типов взаимосвязанно с описанием изоморфизмов.

Основные теоремы об изоморфизмах и соответствии Мальцева приведены в разд. 1 (теоремы 1 и 2). Вспомогательный разд. 2 посвящен автоморфизмам и характеристическим идеалам колец Ли $N\Phi(K)$. Теорема об изоморфизмах колец Ли $N\Phi(K)$ доказывается в разд. 3, а теорема о соответствии Мальцева — в разд. 4; там же отмечается следствие для (неассоциативных) обертывающих алгебр к алгебрам Ли $N\Phi(K)$.

1. Предварительные замечания и основные теоремы

Модели алгебраических систем $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}'$ языка первого порядка $\mathscr{L}$ называются *элементарно эквивалентными*, пишем $\mathscr{U} \equiv \mathscr{U}'$, если всякое предложение, истинное в одной из них, является истинным и в другой системе. Известна изоморфность таких алгебраических систем, когда они равномощны, но в общем случае это не так. Например, поле комплексных чисел элементарно эквивалентно полю алгебраических чисел, однако эти поля не изоморфны, поскольку их мощности различны [3].

Алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$ ассоциируют с любыми полем K и системой Φ, характеризуя базой Шевалле $\{e_r\ (r \in \Phi),\ \ h_s\ (s \in \Pi)\}$, где Π — система простых корней (база) в Φ. Известно, что число $p(\Phi) := \max\{(r,r)/(s,s) \mid r,s \in \Phi\}$ равно $1,2$ или (для Φ типа G_2) 3.

Структурные константы базы Шевалле целочисленные. Более точно, обозначая умножение в $\mathcal{L}_\Phi(K)$ через $*$, при $r,s \in \Phi$ имеем [13]

$$e_r * e_{-r} = h_r, \quad h_s * h_r = 0, \quad h_s * e_r = \frac{2(r,s)}{(r,r)}\, e_r;$$

$$e_r * e_s = 0 \ \ (r+s \notin \Phi \cup \{0\}), \quad e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s} = -e_s * e_r \ \ (r+s \in \Phi),$$

где либо $N_{rs} = \pm 1$, либо $|r| = |s| < |r+s|$ и $N_{rs} = \pm 2$, либо $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3 для Φ типа G_2. Произвол в выборе знаков констант N_{rs} описан в [13, предложение 4.2.2].

Система положительных корней Φ^+, содержащая Π, в Φ единственна [13, предложение 2.1.3]. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле.

Для любого корня r отображение $t \to x_r(t) := \exp\,(t \cdot ad\ e_r)$ $(t \in K)$ дает изоморфное вложение аддитивной группы кольца K в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ \mathcal{L}_\Phi(\mathrm{K})$. *Группу Шевалле* $\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$. Ее унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы X_r $(r \in \Phi^+)$ [13].

Алгебра $\mathcal{L}_\Phi(K)$ и группа Шевалле $\Phi(K) \subseteq \mathrm{Aut}\ \mathcal{L}_\Phi(\mathrm{K})$ естественно определены, как и выше, над любым ассоциативно коммутативным кольцом K с единицей. Изоморфизм $\theta : K \to S$ колец коэффициентов, очевидно, всегда индуцирует изоморфизм колец Ли $\overline{\theta} : N\Phi(K) \to N\Phi(S)$ по правилу $\overline{\theta} : xe_r \to \theta(x)e_r \quad (x \in K,\ r \in \Phi)$.

Биективное отображение $\tau : \Phi \to \Phi'$ систем корней называют их *эквивалентностью*, если существует вещественное число $\lambda > 0$ такое, что $(\tau(r), \tau(s)) = \lambda \cdot (r,s) \ \ (r,s \in \Phi)$. Ясно, что любая эквивалентность τ индуцирует изоморфизм $\overline{\tau}$ алгебр Ли по правилу

$$\overline{\tau} : N\Phi(K) \to N\Phi'(K), \quad e_r \to e_{\tau(r)} \ \ (r \in \Phi^+).$$

Далее (если не оговорено противное), K и S — произвольные ассоциативно коммутативные кольца с единицами. Основной теоремой об изоморфизмах в статье является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $N\Phi(K)$ — кольцо Ли классического типа D_n, $(n \geq 4)$, B_n или C_n $(n > 4)$. Кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $S \simeq K$, а системы корней Φ' и Φ эквивалентны.*

З а м е ч а н и е 1. Хорошо известны тесные структурные связи кольца Ли $N\Phi(K)$ и унипотентной группы $U\Phi(K)$. Так, в силу [15], когда Φ типа A_n $(n > 2)$, имеем

$$U\Phi(K) \simeq U\Phi'(S) \Longleftrightarrow N\Phi(K) \simeq N\Phi'(S).$$

Смотри также соответствие в [16] между нормальными подгруппами в $U\Phi(K)$ и идеалами кольца Ли $N\Phi(K)$. По теореме 1 алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа B_n и C_n при $n > 2$ всегда не изоморфны, хотя (см. [13]) группы Шевалле (аналогично, унипотентные подгруппы) типа B_n и C_n над совершенным полем или кольцом характеристики 2 изоморфны.

Выберем кольцо Ли $N\Phi(K)$, как и в теореме 1. Соответствие Мальцева выявляет

Теорема 2. *Кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда $K \equiv S$, а системы корней Φ и Φ' эквивалентны.*

Используемые терминология и обозначения, связанные с системами корней, алгебрами и группами Шевалле, стандартны и соответствуют, главным образом, [13]. *Высотой корня* r называют сумму $ht(r)$ коэффициентов в разложении r по базе Π. Число Кокстера $h = h(\Phi)$ системы Φ равно $ht(\rho) + 1$, где ρ — максимальный в Φ^+ корень.

2. Автоморфизмы и характеристические идеалы

Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\psi : R \to R'$ — изоморфизм произвольных колец R и R', $\pi \in \mathrm{Aut}\ \mathrm{R}$ и $\chi \in \mathrm{Aut}\ \mathrm{R}'$. Тогда $\pi\psi\chi$ есть также изоморфизм кольца R на R'.*

Аналогично [17] мы используем следующее понятие. Автоморфизм группы или кольца Ли R, являющийся единичным по модулю m-го гиперцентра и внешним автоморфизмом по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют *гиперцентральным высоты* m или, кратко, *гиперцентральным автоморфизмом,* когда R не совпадает со своим m-м гиперцентром. Напомним, что автоморфизм называют центральным, если он тождественен по модулю центра.

Члены Γ_i нижнего центрального ряда кольца Ли $N\Phi(K)$ и члены Z_j гиперцентрального (или верхнего центрального) ряда, а также их централизаторы являются характеристическими идеалами. Идеалы L_m с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+,\ ht(r) \geq m\}$ образуют центральный ряд $L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_h = 0$ в $N\Phi(K)$, называемый стандартным. Аналогично [17, лемма 1] индукцией по $h-i$ доказывается формула $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i}$ $(1 \leq i \leq h)$. Поэтому справедлива

Лемма 2. *Верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ при $p(\Phi)!K = K$ совпадают с ее стандартным центральным рядом:* $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i}$ $(1 \leq i \leq h)$.

Отметим, что ограничение на кольцо K в лемме 2 равносильно требованию $2K = K$, когда Φ типа B_n, C_n и F_4, и $6K = K$ для типа G_2. В остальных случаях все корни в Φ одной длины и в силу леммы все идеалы L_m кольца Ли $N\Phi(K)$ характеристические.

Пусть $\{r\}^+$ — множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении $s - r$ по базе Π все коэффициенты неотрицательны. В алгебре $N\Phi(K)$ подалгебры с базисом $\{e_s \mid s \in \{r\}^+\}$ и $\{e_s \mid s \in \{r\}^+,\ s \neq r\}$ есть идеалы, обозначаемые через $T(r)$ и $Q(r)$ соответственно.

Обычные матричные единицы e_{ij} $(1 \leq j < i \leq n)$ составляют базу алгебры $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц (с нулями на главной диагонали и над ней) над K.

Ассоциированная к ней алгебра Ли представляет собой алгебру $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} с базой Шевалле $\{e_r \mid r \in \Phi^+,\ e_r = e_{ij}\}$ после соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$. Изоморфизмы колец Ли $N\Phi(K)$ в этом случае известны (см. [15]).

Алгебры Ли $N\Phi(K)$ типов B_n, C_n и D_n заданы в [17] также в базе из “матричных единиц” e_{iv} с ограничениями соответственно

$$-i < v < i \le n, \quad -i \le v < i \le n,\ v \ne 0, \quad 1 \le |v| < i \le n.$$

Суммы двух корней, являющиеся корнем, помимо стандартных $r_{ij} + r_{jv} = r_{iv}$ здесь еще

$$r_{kv} + r_{m,-v} = r_{k,-m} \quad (k > m > |v|),$$

а для типа C_n также $r_{kv} + r_{k,-v} = r_{k,-k}$ $(k > |v|)$. Согласно [17, лемма 2], справедлива

Лемма 3. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что* $e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}$ *и верны равенства*

$$\Phi = B_n, D_n\colon e_{jv} * e_{i,-v} = e_{i,-j} \quad (i > j > |v| > 0);$$

$$\Phi = B_n\colon e_{i0} * e_{j0} = 2e_{i,-j} \quad (i > j);$$

$$\Phi = C_n\colon e_{jm} * e_{i,-m} = e_{im} * e_{j,-m} = e_{i,-j}\ (i > j > m \ge 1), \quad e_{ij} * e_{i,-j} = 2e_{i,-i}\ (i > j \ge 1).$$

Всякий элемент $\sum a_{iv}e_{iv}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ любого классического типа представлен в [17] таблицей, называемой Φ^+-матрицей соответствующего типа, в которой коэффициент a_{iv} расположен в i-й строке и v-м столбце. Так, Φ^+-матрица типа B_n или, кратко, B_n^+-матрица, имеет вид

$$\begin{array}{c} a_{10} \\ a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n0}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}. \end{array}$$

В известном [13, 11.2.4] представлении $(2n+1)\times(2n+1)$-матрицами алгебры Ли $\mathcal{L}_\Phi(K)$ типа B_n эта таблица включает, грубо говоря, только основные элементы матрицы (полностью ее определяющие), окаймленные главной диагональю и антидиагональю.

D_n^+-матрицы получим, отбрасывая 0-й столбец, они дают подалгебру в $NB_n(K)$; см. также [13, 11.2.3] и для типа C_n — [13, 11.2.5]. В алгебре Ли $NB_n(K)$ (или $N\Phi(K)$ типа B_n) выделяем подмодули $R_j := \sum_{i=j}^n Ke_{i0}$, $1 \le j \le n$, а также подмодуль $L_j^{[0}$ с базой $\{e_{uv} \mid 0 \le v < u \le n,\ u - v \ge j\}$.

Пусть T_{im} — идеал всех Φ^+-матриц с нулевыми строками с номерами $u < i$ и с столбцами с номерами $v > m$. Тогда $T_{im} = T(r)$ при определенном $r = r_{im} \in \Phi^+$, кроме $T_{i1} = T(r_{i,-1}) + T(_{i,1})$ в случае $m = 1$ для типа D_n. Считаем $T_{1m} := T_{im}$, если номер i наименьший при выбранных Φ и m.

Используя лемму 3, сейчас несложно найти централизаторы $C(T_{im})$. Пусть $\mathcal{A}_2 := Ann_K(2)$ — аннулятор элемента 2 в кольце K. Справедлива

Лемма 4. *Для алгебр Ли* $N\Phi(K)$ *при* $i < n$ *выполняются следующие равенства:*

$$\Phi = D_n\colon C(T_{im}) = T_{1,-m-1} \quad (0 < |m| < i);$$

$$\Phi = B_n\colon C(T_{im}) = T_{1,-m-1} \quad (-i < m < 0), \quad C(T_{im}) = T_{1,-m-1} + \mathcal{A}_2 \cdot R_{m+1} \quad (0 \le m < i);$$

$$\Phi = C_n\colon C(T_{im}) = T_{1,-m-1} \quad (-i \le m < i).$$

Равенства остаются верными и при $i = n$, *если в их правых частях прибавить* $\mathcal{A}_2T_{nn-1}$ *для типа* C_n, *и* T_{nn-1} *— для типов* B_n *и* D_n.

Леммы 3 и 4 позволяют завершить описание центральных рядов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n и C_n, исключительных в лемме 2.

Лемма 5. *Гиперцентры алгебры Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 2)$ записываются в виде*

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 L_{2n-i-1} \quad (1 \leq i < 2n-1), \quad Z_{2n-1} = L_1.$$

Для алгебры $NB_n(K)$ $(n \geq 2)$ имеем

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 R_{n+1-i} \quad (1 \leq i \leq n-2), \quad Z_{n-1} = L_{n+1} + \mathcal{A}_2 R_2 + \mathcal{A}_2 e_{n1},$$

$$Z_{n+i} = L_{n-i} + \mathcal{A}_2 R_1 + \mathcal{A}_2 L^{[0}_{n-i-2} \quad (0 \leq i \leq n-3), \quad Z_{2n-2} = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Центр Z_1 находим сразу же по лемме 4:

$$Z_1 = Ke_\rho + \mathcal{A}_2 Ke_{n0} = L_{2n-1} + \mathcal{A}_2 R_n, \quad Z_1 = L_{2n-1} + \mathcal{A}_2 R_n$$

для типа B_n и C_n соответственно. При $n = 2$ для обоих типов также получаем $Z_2 = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1$ и $Z_3 = L_1$. Когда $n \geq 3$, индукцией по $n - i$ с помощью леммы 3 для типа B_n получаем требуемые равенства для гиперцентров Z_i $(1 \leq i \leq n-1)$, а затем последовательно

$$Z_{n+i} = L_{n-i} + \mathcal{A}_2 R_1 + \mathcal{A}_2 L^{[0}_{n-i-2} \quad (0 \leq i \leq n-3), \quad Z_{2n-2} = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1.$$

Ясно, что аналогичная схема доказательства легко проходит и для типа C_n.

Лемма доказана.

Далее справедлива

Лемма 6. *Пусть $2K \neq K$ и $n \geq 2$. Тогда кольца Ли $NB_n(K)$ и $NC_n(K)$ порождают*

$$\big\{Ke_{ii-1}\ (1 \leq i \leq n);\ \ Ke_{2,-1}\big\} \quad \textit{и} \quad \big\{Ke_{ii-1}\ (2 \leq i \leq n);\ \ Ke_{i,-i}\ (1 \leq i \leq n)\big\},$$

соответственно, и ни одно Ke_{iv} в них нельзя отбросить. Если $n \geq 3$, то коммутант содержит центр в кольце $NB_n(K)$, а в $NC_n(K)$ — нет, и $NB_n(K) \not\simeq NC_n(K)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n > 2$ максимальный корень системы корней типа B_n представляется суммой двух длинных корней, и в кольце Ли $NB_n(K)$ $(n > 2)$ имеем

$$\Gamma_i = L^{[0}_i + L_{i+2} + 2L_i \ (2 \leq i \leq n), \quad \Gamma_2 \supset T_{31} \supset Ke_{n,-n+1} + \mathcal{A}_2 e_{n0} = Z_1.$$

Для алгебры Ли $NC_n(K)$ обозначим через T_0 подмодуль с базой из элементов e_{iv} с условием $|v| < i$, т.е. соответствующих в точности всем коротким корням. Учитывая, что корень $r_{t,-t}$ записывается суммой двух корней лишь в виде $r_{t,-t} = r_{tm} + r_{t,-m}$, находим помимо центра $Z_1 = Ke_{n,-n} + \mathcal{A}_2 e_{n,-n+1}$ члены нижнего центрального ряда

$$\Gamma_1 = L_1, \quad \Gamma_i := L_1 * \Gamma_{i-1} = (L_i \cap T_0) + \sum_{i/2 < t \leq n} 2Ke_{t,-t} \quad (1 < i < 2n).$$

При $2K \neq K$ центр Z_1 не лежит в $T_0 + \sum_{1<t\leq n} 2Ke_{t,-t}$ и тем более в коммутанте Γ_2. Тем самым, второе утверждение леммы доказано; первое очевидно.

Лемма доказана.

Стандартными автоморфизмами кольца Ли $N\Phi(K)$ считаем произведения кольцевых, внутренних (или из $U\Phi(K)$), диагональных или центральных автоморфизмов.

Выделим некоторые нестандартные автоморфизмы. Пусть $\Pi = \{q, r_1, r_2, r_3\}$ для типа D_4, где q — простой корень, неподвижный относительно всех симметрий графа Кокстера. Тогда в силу [18] любой матрице $\beta = \|b_{uv}\| \in SL(3,K)$ с условиями $2b_{mj}b_{mi} = 0,\ 1 \le i,j,m \le 3,\ i \ne j$, соответствует автоморфизм $\widehat{\beta}$ алгебры $ND_4(K)$, определяемый действием

$$\widehat{\beta}:\ e_{r_i} \to \sum_{m=1}^{3} b_{im}e_{r_m}\ (i=1,2,3), \quad e_q \to e_q. \tag{2.1}$$

Для простых симметричных корней r и $\bar{r} \ne r$ ($\bar{\bar{r}} = r$) системы корней Φ типа D_n ($n \ge 4$) согласно [19] определено изоморфное вложение $\widetilde{}$ подгруппы

$$S = \big\{\alpha = \|a_{uv}\| \in SL(2,K) \colon 2a_{11}a_{12} = 2a_{21}a_{22} = 0\big\}$$

группы $SL(2,K)$ в группу автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$ по правилу

$$\widetilde{\alpha} \colon e_r \to a_{11}e_r + a_{12}e_{\bar{r}}, \quad e_{\bar{r}} \to a_{21}e_r + a_{22}e_{\bar{r}}, \quad e_s \to e_s \quad (s \in \Pi \setminus \{r, \bar{r}\}).$$

В матричном представлении алгебры $ND_n(K)$ оно определяется правилом

$$\widetilde{\alpha} \colon e_{2,-1} \to a_{11}e_{2,-1} + a_{12}e_{21}, \quad e_{21} \to a_{21}e_{2,-1} + a_{22}e_{21}, \quad e_{i+1i} \to e_{i+1i} \quad (1 < i < n).$$

При обратимых элементах $1+t \in 1+\mathcal{A}_2$ для типа B_n выделяем *полудиагональные* автоморфизмы

$$\delta_t^{(-1)} \colon e_{kv} \to (1+t)e_{kv} \quad (0 < -v < k \le n), \quad e_{kv} \to e_{kv} \quad (0 \le v < k \le n).$$

Автоморфизмы колец Ли $N\Phi(K)$ исследовались ранее [18] наряду с описаниями групп автоморфизмов Aut UΦ(K). К. Видэла [11] использует нестандартный (extremal) автоморфизм Гиббса [20] группы $U\Phi(K)$ при $K = 6K$; аналогичный автоморфизм алгебр Ли $N\Phi(K)$ см. в [21]. Согласно [17] эти автоморфизмы гиперцентральны высоты 3 (тип C_n) или 2. Смотри также описание автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ при $K = 2K$ в [21].

Подгруппу автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$, которую порождают выделенные в [19] гиперцентральные автоморфизмы высоты > 1, обозначаем через $V(\Phi, K)$. Так, каждому элементу $t \in \mathcal{A}_2$ в [19] сопоставлены гиперцентральные автоморфизмы

$$\alpha = \|a_{uv}\| \to \alpha + t\big(a_{nn-1}e_{n-2,-n+3} + a_{nn-2}e_{n-1,-n+3} + a_{nn-3}e_{n-1,-n+2}\big)$$

алгебр Ли $ND_n(K)$ ($n \ge 5$), $NB_n(K)$ и $NC_n(K)$ ($n \ge 4$), а также

$$\alpha \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-2,0} + a_{nn-2}e_{n-1,0}), \quad \chi_t \colon \alpha \to \alpha + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k,-1}te_{k0}$$

алгебры Ли $NB_n(K)$ ($n \ge 4$) высоты ≤ 3 и $\le n-1$ соответственно по лемме 5.

Теорема 3. *Всякий автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$, $n > 4$, есть произведение стандартного и гиперцентрального из $V(\Phi, K)$ автоморфизмов. Для кольца Ли $NB_n(K)$, $n > 4$, сомножителем добавляется полудиагональный автоморфизм, а для кольца Ли $ND_n(K)$ — автоморфизм из $\widetilde{S}$ при $n \ge 5$ или автоморфизм вида* (2.1) *при $n = 4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [19] доказана порождаемость группы $\mathcal{A}$ автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ классического типа гиперцентральными автоморфизмами высоты $m > 1$, выделенными в $V(\Phi, K)$, и стандартными автоморфизмами. Нам требуется уточнить утверждение о порождаемости. Пусть V_m — подгруппа в $V(\Phi, K)$, порожденная гиперцентральными автоморфизмами фиксированной высоты $m > 1$, $\mathcal{J}$ — подгруппа внутренних автоморфизмов и $\mathcal{Z}$ — подгруппа всех центральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$. Подгруппы ряда

$$\mathcal{J}\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{J}\mathcal{Z}V_2 \subseteq \mathcal{J}\mathcal{Z}V_3 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{J}\mathcal{Z}V(\Phi, K)$$

нормальны в группе автоморфизмов $\mathcal{A}$, причем взаимный коммутант $[\mathcal{J}\mathcal{Z}V_{m-1}, \mathcal{J}\mathcal{Z}V(\Phi, K)]$ всегда лежит в $\mathcal{J}\mathcal{Z}V_m$. Отсюда легко следует нильпотентность подгруппы $\mathcal{J}\mathcal{Z}V(\Phi, K)$. Ясно, что фактор-группа группы $\mathcal{A}$ по ней факторизуется образами подгрупп оставшихся (кроме $\mathcal{J}$ и $\mathcal{Z}$) стандартных автоморфизмов. Тем самым, требуемое уточнение установлено.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Описание в [19] подгруппы $V(\Phi, K)$ для классических типов показывает, что идеал T_{10} кольца Ли $NB_n(K)$ характеристичен при $n > 4$, а в кольце Ли $NC_n(K)$ $(n > 4)$ идеал T_{iv} при $i < n$ характеристический. Идеалы $T_{nn-1}, T_{nn-2}, T_{nn-3}$ являются $V(\Phi, K)$-инвариантными по модулю $T_{n-2,-n+3}$ в кольцах Ли $ND_n(K)$ $(n \geq 4)$ и $NC_n(K)$ $(n > 4)$, а по модулю $T_{n-2,-n+3} + T_{n-2,0}$ — в кольце $NB_n(K)$ $(n > 4)$.

3. Теорема об изоморфизмах

Доказательство теоремы 1 будет опираться на две леммы.

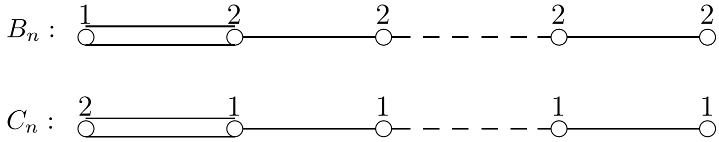
Лемма 7. *Пусть кольца Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$ изоморфны, Φ ранга > 1, причем $2K = K$ для типа F_4 и $6K = K$ для типа G_2. Тогда системы корней Φ и Φ' эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что кольца Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$ изоморфны, т. е. существует изоморфизм $\phi : N\Phi(K) \to N\Phi'(S)$.

Пусть $r, s \in \Pi$ и $r + s \in \Phi^+$. Так как $r - s \notin \Phi$, то $e_r * e_s = N_{rs}e_{r+s} = \pm e_{r+s}$. Кроме того, $\Phi(r, s) := (Zr + Zs) \cap \Phi$ — подсистема корней ранга 2 в Φ, причем подсистема типа G_2 встречается лишь для Φ типа G_2. В графе Кокстера системы Φ корням r и s соответствуют соседние вершины. Если граф Кокстера системы Φ имеет более двух крайних корней, то $\Phi(r, s)$ типа A_2 и Φ типа D_n или E_n. Система Φ типа D_n отделяется от систем Φ типа E_n тем, что в ней есть корень, соседний с тремя другими, два из которых крайние. Системы Φ типа E_n $(n = 6, 7, 8)$ различаются числами Кокстера $h = h(\Phi)$, определяющими ступень нильпотентности алгебры $N\Phi(K)$.

В системе корней Φ типа A_n нет корней, соседних с тремя другими, и $\Phi(r, s)$ всегда типа A_2; в этом случае изоморфизмы изучены в [15]. В оставшихся трех системах корней встречается подсистема корней $\Phi(r, s)$ типа B_2. Заметим, что в системах корней типа B_n и C_n любая подсистема корней ранга 4 имеет число Кокстера, не превосходящее 8. Поэтому система корней Φ типа F_4 отделяется от них, поскольку ее ранг 4 и число Кокстера равно 12.

Графы Кокстера систем корней Φ типов B_n и C_n совпадают, но при $n > 2$ они различаются схемами Дынкина



(см. также [16; 22]). В силу леммы 6 при $2K \neq K$ также имеем $NB_n(K) \not\simeq NC_n(K)$.

По лемме 2, если в Φ все корни одной длины (равносильно, все подсистемы $\Phi(r, s)$ типа A_2) или Φ одного из типов B_n, C_n, F_4 и $2K = K$, то в кольце Ли $N\Phi(K)$ идеал $L_i = L_i(N\Phi(K))$ характеристический, и поэтому

$$\phi(L_i(N\Phi(K))) = L_i(N\Phi'(S)) \quad (1 \leq i < h(\Phi)).$$

Итак, мы можем установить биективное отображение баз $\tau : \Pi(\Phi) \to \Pi(\Phi')$, соответствующее выбранным схемам Дынкина. Отображение τ продолжается на произвольный корень $r = \sum_{p \in \Pi(\Phi)} c_p p \in \Phi^+$ по правилу

$$\tau(r) = \sum_{p \in \Pi(\Phi)} c_p \tau(p) \in \Phi^+.$$

Отсюда получаем изоморфизм $e_r \to e_{\tau(r)}$ $(r \in \Phi^+)$ алгебр Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$, индуцированный эквивалентностью систем корней.

Лемма доказана.

Как следствие вопрос об изоморфизмах $N\Phi(K) \to N\Phi'(S)$ сводится леммой 7 к вопросу об изоморфизмах $N\Phi(K) \to N\Phi(S)$.

Лемма 8. *Всякий изоморфизм $\phi : N\Phi(S) \to N\Phi(K)$ колец Ли классического типа ранга $n > 3$ над ассоциативно коммутативными кольцами S и K с единицами есть произведение $\phi = \eta\overline{\theta}$ для подходящих изоморфизма $\theta : S \to K$ и автоморфизма $\eta \in \mathrm{Aut}\ \mathrm{N\Phi(S)}$.*

Доказательство. Для простого корня r идеал $T(r)$ алгебры $N\Phi(K)$ типа A_n всегда является (максимальным) абелевым. По лемме 3 для других классических типов абелевость $T(r)$ выполняется лишь тогда, когда r соответствует в графе Кокстера какой-либо из крайних вершин, причем для типа D_n любой из них.

Для идеала L_i кольца Ли $N\Phi(K)$ используем соглашение $L_i = L_i(K)$. Аналогично используем обозначения $T_{iv}(K)$, $L_i(S)$ и $T_{iv}(S)$.

Отметим, что ϕ-образ идеала $L_i(S)$ кольца Ли $ND_n(S)$ совпадает с идеалом $L_i(K)$ кольца Ли $ND_n(K)$, причем $N\Phi(S)/L_i(S) \to N\Phi(K)/L_i(K)$ — изоморфизм фактор-колец. С точностью до умножения ϕ на автоморфизм из $\widetilde{S}$ при $n \geq 5$ или вида (2.1) при $n = 4$ в силу теоремы 3 и леммы 1 существуют изоморфизмы θ_a $(a \in \Pi)$ аддитивной группы $(S, +)$ на $(K, +)$ с условием $\phi(xe_a) \equiv \theta_a(x)e_a \mod L_2$, и при $x, y \in S,\ b \in \Pi,\ a + b \in \Phi$ имеем

$$\theta_a(S) = \theta_b(S) = K, \quad \phi(xe_a * ye_b) \equiv \phi(xe_a) * \phi(ye_b) \equiv \theta_a(x)\theta_b(y)e_{a+b} \mod L_3(K).$$

Так как $\theta_a(1_S)K = K = \theta_b(1_S)K$, то $\theta_a(1_S)$ — обратимый элемент кольца K при любом $a \in \Pi$. С точностью до умножения ϕ на диагональный автоморфизм можем считать, что $\theta_a(1_S) = 1_K$ для всех $a \in \Pi$. Отсюда легко приходим к равенствам $\theta_a = \theta_b$ для любых $a, b \in \Pi$. Полагая $\theta = \theta_a$, получаем, что $\theta : S \to K$ — кольцевой изоморфизм, и лемма доказана для типа D_n.

В силу замечания 2 для кольца Ли $NC_n(K)$ $(n > 4)$ идеалы $T_{iv}(K)$ при $i < n$ являются характеристичными. Так как $\phi(T_{iv}(S)) = T_{iv}(K),\ \ i < n$, то ϕ индуцирует изоморфизм фактор-кольца $NC_n(S)/T_{2,-2}(S)$ на кольцо $NA_n(K) \simeq NT(n+1, K)$. Учитывая описание $\mathrm{Aut\ NT(n, K)}$ [23, теоремы 1 и 2] и изоморфизмов [15], получаем утверждение леммы для типа C_n.

В кольце Ли $NB_n(K)$ $(n > 4)$ имеем $\phi(T_{10}(S)) = T_{10}(K)$ в силу замечания 2. Поэтому ϕ индуцирует изоморфизм фактор-кольца $NB_n(S)/T_{10}(S)$ на $NA_{n-1}(K) \simeq NT(n, K)$, и утверждение леммы завершаем аналогично типу C_n.

Лемма доказана.

Применяя леммы 7 и 8, легко получаем утверждение теоремы 1.

В заключение раздела отметим, что подгруппа центральных автоморфизмов кольца Ли шире, чем для алгебры Ли (см., например, [23]). Кроме того, если $\theta \in \mathrm{Aut\ K}$, то автоморфизм $\overline{\theta}$ кольца Ли $N\Phi(K)$ является автоморфизмом алгебры Ли $N\Phi(K)$ лишь при $\theta = 1$.

4. Соответствие Мальцева

В этом разделе доказывается теорема 2 о соответствии Мальцева для нильтреугольных колец $N\Phi(K)$ классических типов. Принципиальным является переход от элементарной эквивалентности к изоморфизму соответствующих систем. Известно (см. [3, теорема 6.1.15]), что *алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют их изоморфные ультрастепени.* В [3] также приведены понятия фильтра, фильтрованного произведения, ультрапроизведения и ультрастепени. Аналогично лемме 2.3 из [24] выявляется связь ультрастепеней алгебраической системы с алгебраической системой над ультрастепенями. А именно, справедлива

Лемма 9. *Для любого ассоциативно коммутативного кольца K с единицей и ультрафильтра (D, I) существует естественный изоморфизм $N\Phi(K)^I/D \simeq N\Phi(K^I/D)$.*

Завершим доказательство теоремы 2.

Если $K \equiv S$, то элементарная эквивалентность $N\Phi(S) \equiv N\Phi(K)$ колец Ли доказывается стандартными методами (см. [9; 24, лемма 2.5]).

Допустим далее, что $N\Phi'(S) \equiv N\Phi(K)$. По [3, теорема 6.1.15] существует ультрафильтр (D, I) такой, что $N\Phi'(S)^I/D \simeq N\Phi(K)^I/D$.

Используя лемму 9, получаем изоморфизмы

$$N\Phi'(S)^I/D \simeq N\Phi'(S^I/D), \quad N\Phi(K)^I/D \simeq N\Phi(K^I/D),$$

откуда

$$N\Phi'(S^I/D) \simeq N\Phi(K^I/D).$$

В силу теоремы 1 находим изоморфизм $K^I/D \simeq S^I/D$, и поэтому $K \equiv S$ по [3, теорема 6.1.15].

Тем самым, доказательство теоремы 2 завершено.

З а м е ч а н и е 3. Алгебра $A = (A, +, \cdot)$ (необязательно ассоциативная) названа в [25] *обертывающей алгеброй* для алгебры Ли L, если алгебра $A^{(-)} = (A, +, *)$ с новым умножением $a * b := ab - ba$ (коммутирование) изоморфна L; обе алгебры можем построить на одном линейном пространстве. Автоморфизмы и изоморфизмы алгебры A есть соответственно автоморфизмы и изоморфизмы алгебры Ли L, поскольку основные операции в L производны от операций в A. Поэтому из доказанной теоремы 2 следует, что соответствие Мальцева выполняется и для построенных в [25] обертывающих алгебр нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мальцев А.И.** Об одном соответствии между кольцами и группами // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 3. С. 257–266.
2. **Мальцев А.И.** Элементарные свойства линейных групп // Некоторые проблемы в математике и механике. Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1961. С. 110–132.
3. **Кейслер Г., Чэн Ч.Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.
4. **Hodges W.** Model theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. 772 p.
5. **Ремесленников В.Н., Романьков В.А.** Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Итоги науки и техники. Сер.: Алгебра, топология, геометрия. 1983. Т. 21. С. 3–79.
6. **Rose B.I.** The χ_1-categoricity of strictly upper triangular matrix rings over algebraically closed fields // J. Symbolic Logic. 1978. Vol. 43, no. 2. P. 250–259. doi: 10.2307/2272823.
7. **Wheeler W.H.** Model theory of strictly upper triangular matrix ring // J. Symbolic Logic. 1980. Vol. 45, no. 3. P. 455–463. doi: 10.2307/2273414.
8. **Videla C.R.** On the model theory of the ring $NT(n, R)$ // Pure Appl. Algebra. 1988. Vol. 55, no. 3. P. 289–302. doi: 10.1016/0022-4049(88)90120-X.
9. **Belegradek O.V.** Model theory of unitriangular groups // Amer. Math. Soc. Transl. 1999. Vol. 195, no. 2. P. 1–116.
10. **Левчук В.М., Минакова Е.В.** Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально-нильпотентных матричных групп и колец // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 2. С. 165–168.
11. **Videla C.R.** On the Mal'cev correspondence // Proc. AMS. 1990. Vol. 109, no. 2. P. 493–502. doi: 10.2307/2048013.
12. **Бунина Е.И., Михалев А.В., Пинус А.Г.** Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. М: МЦНМО, 2015. 360 с.
13. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. N Y: Wiley and Sons, 1972. 331 p.
14. **Левчук В.М.** Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Итоги науки. Юг России. Т. 6: Группы и графы / ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. Владикавказ, 2012. С. 71–80.

15. **Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.** Isomorphisms of certain locally Nilpotent finitary groups and associated rings // Acta Applicandae Mathematicae. 2004. Vol. 82, no. 2. P. 169–181. doi: 10.1023/B:ACAP.0000027533.59937.14 .
16. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349, no. 1. P. 98–116. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.025 .
17. **Левчук В.М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
18. **Левчук В.М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 141–161.
19. **Левчук В.М., Литаврин А.В.** Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 467–477. doi: 10.17377/semi.2016.13.040 .
20. **Gibbs J.A.** Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, no. 2. P. 203–208. doi: 10.1016/0021-8693(70)90123-7 .
21. **Cao Y., Jiang D., Wang D.** Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings // International J. Algebra Computation. 2007. Vol. 17, no. 3. P. 527–555. doi: 10.1142/S021819670700372X .
22. **Serre J.-P.** Algebres de Lie semi-simple complexes. N Y; Amsterdam, Benjamin, 1966. 130 p.
23. **Levchuk V.M.** Connections between a unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms // Siberian Mat. J. 1983. Vol. 24. P. 543–557. doi: 10.1007/BF00969552 .
24. **Левчук В.М., Минакова Е.В.** Автоморфизмы и теоретико-модельные вопросы для нильпотентных матричных групп и колец // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 8. С. 159–168.
25. **Левчук В.М.** Нильтреугольная подалгебра алгебры: обертывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы // Докл. АН. 2018. Т. 478, № 2. С. 137–140.

Поступила 10.09.2018
После доработки 20.11.2018
Принята к публикации 26.11.2018

Зотов Игорь Николаевич
ассистент кафедры алгебры и математической логики
Института математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета,
г. Красноярск
e-mail: zotovin@rambler.ru

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и математической логики
Института математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета,
г. Красноярск
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

REFERENCES

1. Mal'tsev A.I. On a correspondence between rings and groups. *Am. Math. Soc., Transl., Ser. II*, 1965, vol. 45, pp. 221–231. doi: 10.1090/trans2/045/14 .
2. Mal'tsev A.I. Elementary properties of linear groups. *Nekotorye Problemy v Matematike i Mekhanike*, Novosibirsk, Izd-vo AN SSSR, 1961, pp. 110–132 (in Russian).
3. Chang C.C., Keisler H.J. *Model theory.* Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 73. Amsterdam; London: North-Holland Publ.; N Y: Elsevier, 1973, 550 p. ISBN(3rd ed.): 0-444-88054-2 . Translated to Russian under the title *Teoriya modelei*, Moscow: Mir Publ., 1977, 614 p.
4. Hodges W. *Model theory.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993, 772 p. ISBN: 978-0-521-30442-9 .
5. Remeslennikov V.N., Roman'kov V.A. Model-theoretic and algorithmic questions in group theory. *J. Soviet Math.*, 1985, vol. 31, no. 3, pp. 2887–2939. doi: 10.1007/BF02106805 .

6. Rose B.I. The χ_1-categoricity of strictly upper triangular matrix rings over algebraically closed fields. *J. Symbolic Logic*, 1978, vol. 43, no. 2, pp. 250–259. doi: 10.2307/2272823.
7. Wheeler W.H. Model theory of strictly upper triangular matrix ring. *J. Symbolic Logic*, 1980, vol. 45, no. 3, pp. 455–463. doi: 10.2307/2273414.
8. Videla C.R. On the model theory of the ring $NT(n, R)$. *Pure Appl. Algebra*, 1988, vol. 55, no. 3, pp. 289–302. doi: 10.1016/0022-4049(88)90120-X.
9. Belegradek O.V. Model theory of unitriangular groups. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1999, vol. 195, no. 2, pp. 1–116.
10. Levchuk V.M., Minakova E.V. Elementary equivalence and isomorphisms of locally nilpotent matrix groups and rings. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 2, pp. 185–188. doi: 10.1134/S1064562409020100.
11. Videla C.R. On the Mal'cev correspondence. *Proceed. AMS*, 1990, vol. 109, no. 2, pp. 493–502. doi: 10.2307/2048013.
12. Bunin E.I., Mikhalev A.V., Pinus A.G. *Elementarnaya i blizkaya k nei logicheskie ekvivalentnosti klassicheskikh i universal'nykh algebr* (Elementary and close to it logical equivalences of classical and universal algebras). Moscow: MTsNMO Publ., 2015, 360 p. ISBN: 978-5-4439-2401-4.
13. Carter R.W. *Simple groups of Lie type*. New York: Wiley and Sons, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359.
14. Levchuk V.M. Model-theoretic and structural problems of Chevalley groups and algebras. *Mat. Forum. Vol. 6. Gruppy i Grafy*, Vladikavkaz, SMI VSC RAS Publ., 2012, pp. 75–84 (in Russian).
15. Kuzucuoglu F., Levchuk V.M. Isomorphisms of certain locally Nilpotent finitary groups and associated rings. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2004, vol. 82, no. 2, pp. 169–181. doi: 10.1023/B:ACAP.0000027533.59937.14.
16. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type. *J. Algebra*, 2012, vol. 349, no. 1, pp. 98–116. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.025.
17. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups. *Algebra Logic*, 1990, vol. 29, no. 3, pp. 211–224. doi: 10.1007/BF01979936.
18. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of Lie type groups of small ranks. *Algebra Logic*, 1990, vol. 29, no. 2, pp. 97–112. doi: 10.1007/BF02001355.
19. Levchuk V.M., Litavrin A.V. Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 467–477 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.040.
20. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups. *J. Algebra*, 1970, vol. 14, no. 2, pp. 203–208. doi: 10.1016/0021-8693(70)90123-7.
21. Cao Y., Jiang D., Wang D. Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings. *International Journal of Algebra and Computation*. 2007, vol. 17, no. 3, pp. 527–555. doi: 10.1142/S021819670700372X.
22. Serre J.-P. *Algebres de Lie semi-simple complexes*. New York; Amsterdam: Benjamin, 1966, 130 p.
23. Levchuk V.M. Connections between a unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms. *Siberian Mat. J.*, 1983, vol. 24, no. 4, pp. 543–557. doi: 10.1007/BF00969552.
24. Levchuk V.M., Minakova E.V. Automorphisms and model-theoretic problems for nilpotent matrix groups and rings. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2010, vol. 166, no. 5, pp. 675–681. doi: 10.1007/s10958-010-9883-3.
25. Levchuk V.M. Nil-triangular subalgebra of algebra: enveloping algebra, ideals and automorphisms. *Dokl. Akad. nauk*, 2018, vol. 478, no. 2, pp. 137–140 (in Russian). doi: 10.7868/S0869565218020032.

Received September 10, 2018
Revised November 20, 2018
Accepted November 26, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00707).

Igor' Nikolaevich Zotov, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: zotovin@rambler.ru.

Vladimir Mikhailovich Levchuk, Dr. Phys.-Math. Sci., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru.