ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.977

НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРОМЕЖУТКА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ[1]

М. В. Дейкалова, А. Ю. Торгашова

Пусть υ — вес на $(-1,1)$, т. е. измеримая, суммируемая, неотрицательная функция, отличная от нуля почти всюду на $(-1,1)$. Обозначим через $L^\upsilon(-1,1)$ пространство вещественнозначных функций f, суммируемых с весом υ на $(-1,1)$, наделенное нормой $\|f\| = \int_{-1}^1 |f(x)|\upsilon(x)\,dx$. Рассматриваются задачи наилучшего одностороннего приближения (снизу и сверху) в пространстве $L^\upsilon(-1,1)$ характеристической функции интервала (a,b), $-1 < a < b < 1$, множеством алгебраических многочленов степени не выше заданной. Приведено решение задач в случае, когда a, b — узлы положительной квадратурной формулы при некоторых условиях на ее алгебраическую точность. А также в случае симметричного интервала $(-h,h)$, $0 < h < 1$, для четного веса υ.

Ключевые слова: одностороннее приближение, характеристическая функция интервала, алгебраические многочлены.

M. V. Deikalova, A. Yu. Torgashova. Best one-sided approximation in the mean of the characteristic function of an interval by algebraic polynomials.

Let υ be a weight on $(-1,1)$, i.e., a measurable integrable nonnegative function different from zero almost everywhere on $(-1,1)$. Denote by $L^\upsilon(-1,1)$ the space of real-valued functions f integrable with weight υ on $(-1,1)$ with the norm $\|f\| = \int_{-1}^1 |f(x)|\upsilon(x)\,dx$. We consider the problems of the best one-sided approximation (from below and from above) in the space $L^\upsilon(-1,1)$ of the characteristic function of an interval (a,b), $-1 < a < b < 1$, by the set of algebraic polynomials of degree not exceeding a given number. We solve the problems in the case when a and b are nodes of a positive quadrature formula under some conditions on its degree of precision as well as in the case of a symmetric interval $(-h,h)$, $0 < h < 1$, for an even weight υ.

Keywords: one-sided approximation, characteristic function of an interval, algebraic polynomials.

MSC: 41A10, 41A29, 41A63

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-110-125

1. Обсуждение задачи. Оценка наилучшего одностороннего приближения снизу

Пусть υ — функция, измеримая, суммируемая, неотрицательная, отличная от нуля почти всюду на $(-1,1)$; такую функцию будем называть весом (на $(-1,1)$). Обозначим через $L^\upsilon(-1,1)$ пространство вещественнозначных функций f, суммируемых с весом υ на $(-1,1)$, наделенное нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |f(x)|\upsilon(x)\,dx.$$

При целом неотрицательном n через $\mathscr{P}_n$ обозначим множество алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ степени не выше n с вещественными коэффициентами.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Для пары измеримых функций f и g на интервале $(-1,1)$ неравенство $f \le g$ будет в данной статье означать, что $f(x) \le g(x)$ для почти всех $x \in (-1,1)$. Функции f, определенной и измеримой на отрезке $[-1,1]$, сопоставим множества

$$\mathscr{P}_n^-(f) = \{p \in \mathscr{P}_n \colon p \le f\}, \quad \mathscr{P}_n^+(f) = \{p \in \mathscr{P}_n \colon p \ge f\} \tag{1.1}$$

многочленов из $\mathscr{P}_n$, графики которых лежат под или, соответственно, над графиком функции f. В первом случае функция f предполагается ограниченной снизу, во втором — сверху. Нас интересуют величины

$$E_{n,\upsilon}^{\mp}(f) = \inf\{\|f-p\| \colon p \in \mathscr{P}_n^{\mp}(f)\} \tag{1.2}$$

наилучшего приближения снизу и сверху в пространстве $L^\upsilon(-1,1)$ функции f множеством $\mathscr{P}_n$ и экстремальные многочлены, на которых реализуются точные нижние грани в (1.2).

Важным инструментом исследования задач (1.2) является результат Р. Боянича и Р. Девора [1, доказательство теоремы 2], приведенный ниже в теореме A. Однако в теореме A предполагается, что неравенства в (1.1) выполняются не почти всюду, а всюду на $[-1,1]$. В связи с этим наложим некоторые ограничения на аппроксимируемую функцию f.

Функции f, измеримой и ограниченной снизу на отрезке $[-1,1]$, сопоставим функцию $\underline{f}$, определенную на $[-1,1]$ соотношением

$$\underline{f}\,(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \operatorname{ess\,inf}\{f(t) \colon t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [-1,1]\}, \quad x \in [-1,1].$$

Обозначим через $\mathscr{R}^-$ множество функций, определенных, ограниченных снизу на отрезке $[-1,1]$, принадлежащих пространству $L^\upsilon(-1,1)$, и таких, что $\underline{f}\,(x) \le f(x)$ для всех $x \in [-1,1]$. Функции $f \in \mathscr{R}^-$ обладают тем свойством, что если для некоторой непрерывной функции φ неравенство $\varphi \le f$ выполняется почти всюду на отрезке $[-1,1]$, то оно будет выполняться и всюду на этом отрезке. Как следствие для функций $f \in \mathscr{R}^-$ при любом $n \ge 0$ имеем

$$\mathscr{P}_n^-(f) = \bigl\{p \in \mathscr{P}_n \colon p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]\bigr\}.$$

Положим $\mathscr{R}^+ = -\mathscr{R}^- = \{f \colon -f \in \mathscr{R}^-\}$. Множествам $\mathscr{R}^{\mp}$ принадлежат, например, функции, непрерывные на отрезке $[-1,1]$, а также разрывные функции, имеющие на $[-1,1]$ лишь разрывы первого рода во внутренних точках отрезка, при условии, что значение в точке разрыва заключено между пределами слева и справа.

В исследовании задач одностороннего приближения функций многочленами существенную роль играют квадратурные формулы

$$\int_{-1}^{1} \upsilon(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \quad p \in \mathscr{P}_n, \tag{1.3}$$

точные на множестве многочленов $\mathscr{P}_n$, с узлами $-1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_M \le 1$ и положительными весами: $\lambda_k > 0,\ 1 \le k \le M$; такие квадратурные формулы называют *положительными.* Наибольшую степень n многочленов, для которых справедлива формула (1.3), называют ее *алгебраической точностью.* В зависимости от ситуации некоторые из узлов формулы (1.3) могут быть фиксированы, а остальные считаются свободными, точнее, выбираются из условия максимальной алгебраической точности формулы (см., к примеру, [2, гл. 7, §1]. Одной из наиболее известных положительных квадратурных формул является квадратурная формула Гаусса (1866), в которой все M узлов свободные; ее алгебраическая точность есть $2M-1$ (см., например, [2, гл. 7, §1]).

Следующее утверждение является частным случаем более общего утверждения, содержащегося в [1, доказательство теоремы 2] (см. также [3, теорема 1.7.5]).

Теорема А. *Предположим, что на множестве $\mathscr{P}_n$ имеет место положительная квадратурная формула* (1.3). *Тогда для функций $f \in \mathscr{R}^{\mp}$ справедлива соответственно оценка*

$$E_n^-(f) \ge \int_{-1}^{1} \upsilon(x) f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k), \quad E_n^+(f) \ge \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k) - \int_{-1}^{1} \upsilon(x) f(x)\,dx. \tag{1.4}$$

Если какое-либо из неравенств (1.4) обращается в равенство, то говорят, что квадратурная формула (1.3) в соответствующей задаче (1.2) является *экстремальной*.

2. Одностороннее приближение снизу характеристической функции полуинтервала $(a, 1]$

При $-1 \le a < b \le 1$ введем единое обозначение промежутков

$$J = J(a,b) = \begin{cases} (a,b), & -1 < a < b < 1; \\ (a,1], & -1 < a < b = 1; \\ [-1,b), & a = -1 < b < 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу об одностороннем приближении снизу характеристической функции

$$\mathbf{1}_J(t) = \begin{cases} 1, & t \in J, \\ 0, & t \in [-1,1] \setminus J, \end{cases} \tag{2.2}$$

промежутка (2.1) алгебраическими многочленами заданной степени $n \ge 0$ в пространстве $L^{\upsilon}(-1,1)$. Задача заключается в нахождении величины

$$E_n^-(\mathbf{1}_J) = E_{n,\upsilon}^-(\mathbf{1}_J) = \inf\left\{\|\mathbf{1}_J - p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} \colon p_n \in \mathscr{P}_n^-(\mathbf{1}_J)\right\}. \tag{2.3}$$

Характеристические функции (2.2) промежутков (2.1) принадлежат множествам $\mathscr{R}^{\mp}$, поэтому для (2.3) справедливо первое неравенство (1.4).

Задачи одностороннего взвешенного интегрального приближения характеристических функций интервалов и близких им функций алгебраическими или тригонометрическими полиномами возникают в различных разделах математики, они имеют богатую историю. В этой тематике существуют точные результаты (о некоторых из них более подробно будет идти речь далее), имеются порядковые результаты и исследования асимптотик (см. работы [4–6] и приведенную в них библиографию), различные приложения (см. [3; 5; 7; 8] и приведенную там библиографию).

Приведем несколько точных результатов в задаче (2.3), имеющих непосредственное отношение к данной работе; более полное изложение вопроса см. в [9]. В [5] исследовалась, в частности, задача одностороннего приближения периодического продолжения характеристической функции интервала (a, b) тригонометрическими полиномами в интегральной метрике с весом Якоби на периоде. Точное решение было найдено в [5, Theorem 3] для некоторых значений a, b, удовлетворяющих специальным условиям. В случае единичного веса для произвольного интервала, расположенного на периоде, задача была решена в [8]; после косинус-замены этот результат дает решение задачи (2.3) для $J = (a, 1]$ при любом $a \in (-1, 1)$ с весом Чебышева первого рода $\upsilon(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$. В [7] решена задача (2.3) одностороннего интегрального приближения характеристической функции произвольного полуинтервала $(a, 1]$, $-1 < a < 1$, алгебраическими многочленами на $[-1, 1]$ с единичным весом и описан весь класс экстремальных многочленов. В работе [9] содержится решение этой задачи в пространстве $L^{\upsilon}(-1, 1)$ с произвольным весом; опишем основной результат работы [9] в удобном для нас виде.

В исследовании задач (2.3) одностороннего приближения характеристических функций промежутков многочленами применяются M-точечные квадратурные формулы (1.3), у которых множество $\mathfrak{u}$ фиксированных узлов либо пусто, либо состоит из одного, двух или трех фиксированных узлов конкретного вида

$$\varnothing, \quad \{-1\}, \quad \{1\}, \quad \{-1,1\}, \tag{2.4}$$

$$\{\theta\}, \quad \{-1,\theta\}, \quad \{\theta,1\}, \quad \{-1,\theta,1\}, \quad \text{где} \quad \theta\in(-1,1), \tag{2.5}$$

а остальные $M-|\mathfrak{u}|$ узлов выбираются, исходя из условия максимальной алгебраической точности формулы; здесь $|\mathfrak{u}|$ — мощность, т. е. количество точек множества $\mathfrak{u}$. Известно (см., например, [2, гл. 7, §1]), что алгебраическая точность такой формулы есть $n=2M-1-|\mathfrak{u}|$. Формулы (1.3) принимают вид

$$\int_{-1}^{1} \upsilon(x)p(x)dx=\sum_{k=1}^{M}\lambda_k p(x_k), \quad p\in\mathscr{P}_{2M-1-|\mathfrak{u}|}; \tag{2.6}$$

далее в некоторых ситуациях будут использоваться более точные в сравнении с (1.3) обозначения узлов $\{x_k=x_k^{\mathfrak{u}}=x_k(\mathfrak{u},\upsilon,M)\}_{k=1}^M$ и весов (коэффициентов) $\{\lambda_k=\lambda_k^{\mathfrak{u}}=\lambda_k(\mathfrak{u},\upsilon,M)\}_{k=1}^M$ формулы (2.6).

В случае пустого множества $\mathfrak{u}$ (нет фиксированных узлов) формула (2.6) является классической квадратурной формулой Гаусса (см. [2, гл. 7, §1]); в случае одного фиксированного узла, совпадающего с одним из концов отрезка $[-1,1]$, т. е. в случае, когда $\mathfrak{u}=\{-1\}$ или $\mathfrak{u}=\{1\}$, формула (2.6) есть левая или правая квадратурная формула Радо соответственно; а в случае $\mathfrak{u}=\{-1,1\}$ — квадратурная формула Лобатто. Известно (см. библиографию в [7; 9; 10]), что во всех этих случаях формула (2.6) положительная.

В работах [7; 10] для каждого из множеств $\mathfrak{u}$ фиксированных узлов из (2.5) описано множество $\Theta_M^{\mathfrak{u}}$ значений параметра $\theta\in(-1,1)$, при которых квадратурная формула (2.6) будет иметь положительные веса. Такие формулы называются *положительными модифицированными формулами Гаусса, Радо* (*левой и правой*) *и Лобатто.* В дальнейшем формула (2.6) с фиксированными узлами (2.5) рассматривается лишь при $\theta\in\Theta_M^{\mathfrak{u}}$.

Таким образом, квадратурная формула вида (2.6) с фиксированными узлами как (2.4), так и (2.5) является положительной. Алгебраическая точность формулы (2.6) как с узлами (2.4), так и с узлами (2.5) есть $N=2M-1-|\mathfrak{u}|$. При этом каждому $n\in\mathbb{N}$ и $a\in(-1,1)$ соответствует [10, теорема 1.1, следствие 1.2, замечание 1.3] конкретная положительная квадратурная формула вида (2.6).

В работе [7] для единичного веса $\upsilon\equiv 1$ и в работе [9] для произвольного веса υ найдено наилучшее приближение снизу

$$E_{n,\upsilon}^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]})=\min\{\|\mathbf{1}_{(a,1]}-p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)}\colon p_n\in\mathscr{P}_n^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]})\} \tag{2.7}$$

и выписан экстремальный многочлен $p_n^a=p_{n,a}^{\upsilon}$, на котором достигается минимум в (2.7), для всех значений $a\in(-1,1)$ и $n\ge 1$. В следующей теореме собраны в удобном нам виде результаты нескольких утверждений работы [9, §3], содержащих решение задачи (2.7).

Теорема B [9, §3]. *При $M\in\mathbb{N}$, $M\ge 3$, справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если число $a\in(-1,1)$ совпадает с одним из узлов какой-либо M-точечной положительной квадратурной формулы* (2.6), *отличным от максимального, т. е. $a=x_\nu^{\mathfrak{u}}$, $1\le\nu\le M-1$, то в случае фиксированных узлов* (2.4) *для $n=2M-2-|\mathfrak{u}|$ и $n=2M-1-|\mathfrak{u}|$, а в случае фиксированных узлов* (2.5) *для $n=2M-1-|\mathfrak{u}|$ имеет место равенство*

$$E_{n,\upsilon}^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]})=\int_{(a,1]}\upsilon(x)dx-\sum_{k=\nu+1}^{M}\lambda_k^{\mathfrak{u}}.$$

При этом соответствующая квадратурная формула является экстремальной и многочлен наилучшего приближения снизу — это многочлен $p_n^a \in \mathscr{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$ *степени* $n = 2M-2-|\mathfrak{u}|$ *в случае множеств* $\mathfrak{u}$ *из* (2.4) *и степени* $n = 2M-1-|\mathfrak{u}|$ *в случае множеств* $\mathfrak{u}$ *из* (2.5), *который интерполирует функцию* $\mathbf{1}_{(a,1]}$ *в узлах квадратурной формулы.*

(2) *Если максимальный узел* $x_M^{\mathfrak{u}}$ *формулы* (2.6) *меньше* 1, *то для* $x_M^{\mathfrak{u}} \le a < 1$ *при всех* $0 \le n \le 2M-1-|\mathfrak{u}|$

$$E_{n,\upsilon}^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_{(a,1]} \upsilon(x)dx$$

и $p^* \equiv 0$ *является многочленом наилучшего приближения снизу.*

3. Одностороннее приближение характеристической функции интервала, внутреннего для $[-1,1]$

В данном разделе обсуждается задача одностороннего приближения снизу и сверху характеристической функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$ интервала (a,b), концы a, b которого являются узлами положительной квадратурной формулы с некоторыми указанными ниже свойствами. В частности, теорема B позволяет выписать решение задач (3.1) для интервалов (a,b), концы которых являются узлами любой из квадратурных формул (2.6). Наиболее обстоятельно будет исследована задача одностороннего приближения снизу

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E_{n,\upsilon}^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \inf\big\{\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} : p_n \in \mathscr{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)})\big\}. \tag{3.1}$$

3.1. Экстремальные многочлены задачи (2.7)

Обсудим вначале конструкцию и свойства экстремальных многочленов задачи (2.7) в предположении, что ее решение получено с помощью той или иной положительной квадратурной формулы.

Пусть

$$\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \quad p \in \mathscr{P}_N, \tag{3.2}$$

— некая положительная квадратурная формула, узлы которой $\{x_k\}_{k=1}^M$ упорядочены по возрастанию индекса, и N — ее алгебраическая точность. Будем предполагать, что параметр a совпадает с одним из узлов этой формулы, отличным от наибольшего, т. е. $a = x_{k(a)}$, $1 \le k(a) < M$; как следствие $M \ge 2$. Нас интересует ситуация, когда (3.2) есть экстремальная квадратурная формула задачи (2.7), т. е. для функции $f = \mathbf{1}_{(a,1]}$ и соответствующей степени n первое неравенство (1.4) обращается в равенство, принимающее в данном случае вид

$$E_{n,\upsilon}^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k\le M} \lambda_k.$$

Алгебраическая точность N формулы (3.2) может и не совпадать со степенью n в задаче (2.7), т. е., вообще говоря, $N \ge n$.

Алгебраическая точность формулы (3.2), степень n в (2.7), точная степень экстремального многочлена и другие его свойства зависят от некоторых особенностей узлов формулы. В частности, важно, являются ли точки ∓ 1 ее узлами. Следуя работе [9], введем параметры s, r, каждый из которых может принимать лишь два значения $\{0,1\}$ в соответствии со следующим правилом. Если точка -1 является узлом формулы (3.2), то полагаем $s=1$, а если не является, $s=0$. Аналогично, если точка 1 является узлом формулы (3.2), то $r=1$, иначе $r=0$.

Обозначим через ρ многочлен Эрмита, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$, однако, с разной кратностью. А именно, в точке a и точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, многочлен ρ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$; таких узлов $1+s+r$. В остальных $M-(1+s+r)$ узлах формулы (2.7) многочлен ρ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$, так и значения производной $\rho(x_k) = \mathbf{1}_{(a,1]}(x_k)$, $\rho'(x_k) = 0$. Общее число условий интерполяции будет

$$K = 2(M - (1 + s + r)) + (1 + s + r) = 2M - 1 - s - r.$$

Многочлен с перечисленными интерполяционными свойствами существует, и его степень равна $n_0 = K-1 = 2M-2-s-r$ (см., например, [11, гл. 2, §11] или [12, лекция 4, п. 4.3]). В дальнейшем этот многочлен мы будем обозначать через $p_{n_0}^a$ и называть *интерполяционным многочленом Эрмита функции* $\mathbf{1}_{(a,1]}$ *в узлах квадратурной формулы* (3.2).

Лемма 1. *Предположим, что параметр* $a \in (-1, 1)$ *является не наибольшим узлом положительной квадратурной формулы* (3.2), *а точнее,* $a = x_{k(a)}$, $1 \le k(a) \le M - 1$. *Формула* (3.2) *является экстремальной в задаче* (3.1) *в том и только в том случае, если для алгебраической точности* N *формулы* (3.2) *выполняется условие*

$$N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r \tag{3.3}$$

и $n_0 \le n \le N$. *В этой ситуации справедливы следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (2.7) *имеет одно и то же значение*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k\le M} \lambda_k. \tag{3.4}$$

(2) *Интерполяционный многочлен Эрмита* $p_{n_0}^a$ *функции* $\mathbf{1}_{(a,1]}$ *в узлах* $\{x_k\}_{k=1}^M$ *квадратурной формулы* (3.2) *принадлежит множеству* $\mathscr{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$ *и является экстремальным многочленом задачи* (2.7) *при всех* n *со свойством* $n_0 \le n \le N$.

Доказательство леммы осуществляется с помощью известных для данной тематики методов, см., к примеру, [9]. Однако лемма имеет свои особенности, поэтому мы считаем необходимым привести ее полное доказательство. Предположим, что формула (3.2) является экстремальной в задаче (2.7). Это означает, что $n \le N$ и первое неравенство (1.4) для функции $f = \mathbf{1}_{(a,1]}$ обращается в равенство. Отсюда нетрудно сделать вывод, что многочлен $p_n \in \mathscr{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$ является экстремальным в задаче (2.7) в том и только в том случае, если этот многочлен интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$ квадратурной формулы (3.2). Условие $p_n(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$, $x \in [-1, 1]$, влечет, что если $x_k \in (-1, 1)$, $x_k \ne a$, то наряду со свойством лагранжевой интерполяции $p_n(x_k) = \mathbf{1}_{(a,1]}(x_k)$ должно выполняться еще условие $p_n'(x_k) = 0$. Как уже отмечалось выше, степень такого многочлена равна $n_0 = 2M - 2 - s - r$. Отсюда следует, что $n_0 \le n \le N$. Свойство (3.3) проверено. Проверим, что тогда выполняются и утверждения (1), (2) леммы.

Многочлен $p_{n_0}^a$, интерполирующий функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы (3.2), обладает свойством $p_{n_0}^a(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$, $x \in [-1, 1]$, т. е. $p_{n_0}^a \in \mathscr{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Доказательство этого и подобного свойства интерполяционных многочленов Эрмита восходит к А. А. Маркову и Т. И. Стилтьесу и имеет богатую историю (см. [9] и приведенную там библиографию).

Для удобства записи переобозначим $\rho = p_{n_0}^a$. Рассмотрим нули производной ρ' многочлена ρ. Пусть $a = x_{k(a)}$, $1 < k(a) < M$. По теореме Ролля на каждом из интервалов (x_k, x_{k+1}), $k = 1, 2, \dots, k(a) - 1, k(a) + 1, \dots, M$, производная ρ' обращается в ноль; таких нулей $M - 2$. Кроме того, имеется еще $M - (1 + s + r)$ нулей производной в узлах квадратурной формулы. В результате ρ' имеет на $(-1, 1)$, по крайней мере, $M-2+M-(1+s+r) = 2M-3-s-r = n_0-1$

нулей. Производная ρ' является многочленом степени n_0-1 и, значит, других нулей у ρ' нет. Отсюда, в частности, следует, что на отрезке $[x_{k(a)}, x_{k(a)+1}]$ многочлен ρ возрастает от 0 до 1. Нетрудно понять, что на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, $k\ne k(a)$, и на отрезках $[-1,x_1]$, $[x_M,1]$ график многочлена ρ не превосходит графика функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$. Таким образом, действительно, $\rho(x)\le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$, $x\in[-1,1]$, т. е. $\rho=p^a_{n_0}\in\mathscr{P}^-_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,1]})$.

Следовательно, многочлен $\rho=p^a_{n_0}$ является экстремальным в задаче (2.7) при $n=n_0$. Если же алгебраическая точность N формулы (3.2) больше чем n_0, то многочлен $p^a_{n_0}$ будет экстремальным в задаче (2.7) при всех n таких, что $n_0\le n\le N$.

Обратно, предположим, что выполнено условие (3.3). Интерполяционный многочлен Эрмита $p^a_{n_0}$ функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы (3.2) имеет степень n_0 и, как только что было показано, обладает свойством $p^a_{n_0}\in\mathscr{P}^-_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Отсюда нетрудно сделать вывод, что квадратурная формула (3.2) и многочлен $p^a_{n_0}$ являются экстремальными в задаче (2.7) для всех n таких, что $n_0\le n\le N$. В самом деле, при $n_0\le n\le N$ для произвольного многочлена $p_n\in\mathscr{P}^-_n(\mathbf{1}_{(a,1]})$ имеем

$$\|\mathbf{1}_{(a,1]}-p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)}=\int_{-1}^{1}\upsilon(t)(\mathbf{1}_{(a,1]}(t)-p_n(t))dt=\int_a^1\upsilon(t)dt-\int_{-1}^{1}\upsilon(t)p_n(t)dt.$$

Применяя формулу (3.2) и свойство $p_n\le\mathbf{1}_{(a,1]}$ на $[-1,1]$, получаем

$$\int_{-1}^{1}\upsilon(t)p_n(t)dt=\sum_{k=1}^{M}\lambda_k p(x_k)\le\sum_{k=1}^{M}\lambda_k\ \mathbf{1}_{(a,1]}(x_k)=\sum_{k(a)<k\le M}\lambda_k.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{1}_{(a,1]}-p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)}\ge\int_a^1\upsilon(t)dt-\sum_{k(a)<k\le M}\lambda_k. \tag{3.5}$$

Правая часть последнего неравенства есть $\|\mathbf{1}_{(a,1]}-p^a_{n_0}\|_{L^\upsilon(-1,1)}$. Поэтому (3.5) влечет, что

$$\|\mathbf{1}_{(a,1]}-p_{n_0}\|_{L^\upsilon(-1,1)}\ge E^-_n(\mathbf{1}_{(a,1]})\ge\int_a^1\upsilon(t)dt-\sum_{k(a)<k\le M}\lambda_k=\|\mathbf{1}_{(a,1]}-p_{n_0}\|_{L^\upsilon(-1,1)}.$$

Следовательно, при всех $n_0\le n\le N$ квадратурная формула (3.2) и многочлен $p^a_{n_0}$ являются экстремальными в задаче (2.7). Лемма 1 доказана полностью. $\square$

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [9, предложение 2]), и мы приведем его без доказательства.

Предложение A. *Если наибольший узел x_M положительной квадратурной формулы* (3.2) *меньше* 1, *то для $x_M\le a\le 1$ при всех $0\le n\le N$ для величины* (2.7) *имеет место равенство*

$$E^-_n(\mathbf{1}_{(a,1]})=\int_a^1\upsilon(t)dt$$

и многочлен $p^a_n\equiv 0$ является экстремальным.

Рассмотрим родственную (2.7) задачу о наилучшем приближении снизу

$$E^-_n(\mathbf{1}_{[-1,b)})=E^-_{n,\upsilon}(\mathbf{1}_{[-1,b)})=\min\left\{\|\mathbf{1}_{[-1,b)}-p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)}\colon p_n\in\mathscr{P}^-_n(\mathbf{1}_{[-1,b)})\right\} \tag{3.6}$$

характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ полуинтервала $[-1,b)$, $-1<b<1$, алгебраическим многочленами заданной степени.

Для задачи (3.6) и формулы (3.2) справедливо утверждение, аналогичное лемме 1. Обозначим через $q^b_{n_0}$ многочлен Эрмита, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$ в том же смысле, что и ранее. А именно, в точках a и точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, многочлен $q^b_{n_0}$ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$. В остальных узлах формулы (3.2) многочлен $q^b_{n_0}$ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$, так и значения производной: $q^b_{n_0}(x_k) = \mathbf{1}_{[-1,b)}(x_k)$, $(q^b_{n_0})'(x_k) = 0$. Степень этого многочлена вновь равна $n_0 = 2M - 2 - s - r$. Этот многочлен мы будем называть *интерполяционным многочленом Эрмита функции* $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ *в узлах квадратурной формулы* (3.2). Справедливо следующее утверждение, оно доказывается по той же схеме, что и лемма 1, и это доказательство мы опустим.

Лемма 2. *Предположим, что положительная квадратурная формула* (3.2) *обладает свойством* $N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r$. *Тогда для любого узла b этой формулы, лежащего на* $(-1, 1)$, *отличного от первого, т. е.* $b = x_{k(b)}$, $1 < k(b) \le M$, *справедливы следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (3.6) *имеет одно и то же значение*

$$E^-_n(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = E^-_{n_0}(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = \int_{-1}^{b} \upsilon(t)dt - \sum_{1\le k<k(b)} \lambda_k. \tag{3.7}$$

В частности, это означает, что формула (3.2) *является экстремальной в задаче* (3.6).

(2) *Интерполяционный многочлен Эрмита* $q^b_{n_0}$ *функции* $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ *в узлах* $\{x_k\}_{k=1}^M$ *квадратурной формулы* (3.2) *принадлежит множеству* $\mathscr{P}^-_{n_0}(\mathbf{1}_{[-1,b)})$ *и является экстремальным многочленом задачи* (3.6) *при всех n со свойством* $n_0 \le n \le N$.

Следующее утверждение есть аналог предложения А.

Предложение В. *Если наименьший узел x_1 положительной квадратурной формулы* (3.2) *больше* -1, *то для* $-1 < b \le x_1$ *при всех* $0 \le n \le N$ *для величины* (2.7) *имеет место равенство*

$$E_n(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = \int_{-1}^{b} \upsilon(t)dt$$

и многочлен $q^b_n \equiv 0$ *является экстремальным.*

З а м е ч а н и е 1. Условимся считать, что если в какой-либо сумме множество индексов суммирования пусто, то значение суммы равно нулю. Тогда согласно предложению A и лемме 1 формула (3.4) справедлива и в том случае, когда a есть наибольший узел квадратурной формулы (3.2). Аналогично, согласно предложению B и лемме 2 формула (3.7) справедлива и в том случае, когда b есть наименьший узел квадратурной формулы (3.2).

3.2. Одностороннее приближение снизу характеристической функции интервала $(a, b) \subset [-1, 1]$

Леммы 1 и 2 позволяют обосновать следующее утверждение относительно задачи (3.1).

Теорема 1. *Предположим, что положительная квадратурная формула* (3.2) *обладает свойством* $N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r$. *Тогда для любых двух узлов* $a, b \in (-1, 1)$ *этой формулы, а точнее,* $a = x_{k(a)}$, $b = x_{k(b)}$, $1 \le k(a) < k(b) \le M$, *справедливы следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (3.1) *имеет одно и то же значение*

$$E_n(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \int_{a}^{b} \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k.$$

В частности, это означает, что формула (3.2) *является экстремальной в задаче* (3.1).

(2) *Многочлен*

$$\varrho_{n_0}^{ab} = p_{n_0}^a + q_{n_0}^b - 1 \tag{3.8}$$

степени n_0 *обладает свойством*

$$\varrho_{n_0}^{ab}(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3.9}$$

т. е. $\varrho_{n_0}^{ab} \in \mathscr{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,b)})$, *и является экстремальным в задаче* (3.1) *для всех* n, $n_0 \le n \le N$.

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{1}_{(a,1]} + \mathbf{1}_{[-1,b)} - 1 = \mathbf{1}_{(a,b)}$. Отсюда следует свойство (3.9). Воспользуемся теперь стандартными рассуждениями, которые уже применялись нами выше для обоснования леммы 1. При $n_0 \le n \le N$ для произвольного многочлена $p_n \in \mathscr{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)})$ имеем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int_{-1}^{1} \upsilon(t)(\mathbf{1}_{(a,b)}(t) - p_n(t))dt = \int_a^b \upsilon(t)dt - \int_{-1}^{1} \upsilon(t)p_n(t)dt.$$

Применяя формулу (3.2) и свойство $p_n(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$, $x \in [-1,1]$, получаем оценку

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} \ge \int_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k. \tag{3.10}$$

На многочлене $\varrho_{n_0}^{ab} = p_{n_0}^a + q_{n_0}^b - 1$ неравенство (3.10) обращается в равенство. В самом деле, имеем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int_{-1}^{1} \upsilon(t) \Big(\mathbf{1}_{(a,1]}(t) - p_{n_0}^a(t) + \mathbf{1}_{[-1,b)}(t) - q_{n_0}^b(t)\Big)\, dt.$$

Применяя формулы (3.4) и (3.7), получаем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int_a^1 \upsilon(t)dt + \int_{-1}^{b} \upsilon(t)dt - \Bigg(\sum_{k(a)<k\le M} V\lambda_k + \sum_{1\le k<k(b)} V\lambda_k\Bigg)$$

$$= \int_{-1}^{1} \upsilon(t)dt - \sum_{1\le k\le M} V\lambda_k - \int_a^b \upsilon(t)dt + \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k.$$

На многочлене $p \equiv 1$ формула (3.2) принимает вид $\displaystyle\int_{-1}^{1} \upsilon(t)\,dt = \sum_{k=1}^M \lambda_k$. Поэтому действительно справедливо равенство

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k.$$

Используя последнее равенство, получаем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} \ge E_n(\mathbf{1}_{(a,b)}) \ge \int_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k = \|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)}.$$

Следовательно, при всех n, $n_0 \le n \le N$, квадратурная формула (3.2) и многочлен $\varrho_{n_0}^{ab}$ являются экстремальными в задаче (3.1). Теорема 1 доказана полностью. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Экстремальный многочлен (3.8) имеет степень $n_0 = 2M - 2 - s - r$; его конструкция позволила легко сделать вывод, что он обладает свойством (3.9). Рассмотрим многочлен Эрмита ρ, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,b)}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$; точнее, в точках a, b и в точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, многочлен ρ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$, в остальных же узлах x_k многочлен ρ интерполирует значения функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$ и ее производной, что в данном случае означает свойство $\rho'(x_k) = 0$. Степень такого многочлена равна $\underline{n} = n_0 - 1 = 2M - 3 - s - r$. Так же, как при доказательстве леммы 1, нетрудно убедиться, что $\rho(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$, $x \in [x_1, x_M]$. Однако неравенство

$$\rho(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.11}$$

на всем отрезке $[-1, 1]$ может и не выполняться. Примером такой ситуации является случай пятиточечной квадратурной формулы Гаусса с узлами

$$x_1 = -x_5 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \quad x_2 = -x_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \quad x_3 = 0$$

для значений $a = x_1$, $b = x_3$. В данном случае многочлен ρ, построенный описанным выше способом, имеет седьмую степень. Вычисления с помощью пакета Maple дают приближенное значение $\rho(-1) = 0.1650513613\ldots$; важно лишь, что это значение положительное. Следовательно, в некоторой окрестности точки -1 график многочлена ρ лежит выше графика функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$, так что свойство (3.11) в данном случае нарушено.

Если же свойство (3.11) выполняется, то для величины (3.1) имеем $E_{n_0-1}^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,b)})$. Именно такая ситуация имеет место в примере, рассмотренном в подразд. 3.3.

Применим теперь утверждение теоремы 1 для задачи (3.1) в условиях теоремы B. Формула (2.6) в случае фиксированных узлов (2.4) имеет алгебраическую точность $N = 2(M - (s + r)) - 1 + (s + r) = 2M - 1 - (s + r))$, а в случае (2.5) ее алгебраическая точность вновь $N = 2(M - (1 + s + r)) - 1 + (1 + s + r) = 2M - 1 - (1 + s + r)$. Параметр n_0 формулы (2.6) в обоих случаях имеет значение $n_0 = 2M - 2 - (s + r)$; таким образом, в обоих случаях выполнено условие $n_0 \le N$. Напомним, что для узлов a и b квадратурной формулы (2.6), отличных от минимального и максимального соответственно, определен многочлен $\varrho_{n_0}^{ab} = p_{n_0}^a + q_{n_0}^b - 1$ степени n_0, в котором $p_{n_0}^a$ и $q_{n_0}^b$ суть многочлены (каждый степени n_0), которые осуществляют соответствующую эрмитову интерполяцию функций $\mathbf{1}_{(a,1]}$ и $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ в узлах квадратурной формулы. Из вышесказанного вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если числа a и b, $-1 < a < b < 1$, являются узлами какой-либо M-точечной положительной квадратурной формулы* (2.6)*, а точнее*

$$a = x_{k(a)}^{\mathfrak{u}}, \quad b = x_{k(b)}^{\mathfrak{u}}, \quad k(a) < k(b),$$

то в случае фиксированных узлов вида (2.4) *для $n = 2M - 2 - |\mathfrak{u}|$ и $n = 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$, а в случае фиксированных узлов вида* (2.5) *для $n = 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$ имеет место равенство*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \int_a^b \upsilon(x)dx - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k^{\mathfrak{u}}.$$

При этом соответствующая квадратурная формула является экстремальной и многочлен наилучшего приближения снизу — это многочлен (3.8) *степени $n = 2M - 2 - |\mathfrak{u}|$ в случае фиксированных узлов вида* (2.4) *и степени $n = 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$ в случае фиксированных узлов вида* (2.5).

3.3. Конкретный пример одностороннего приближения характеристической функции интервала

Рассмотрим задачу (3.1) в случае единичного веса $v \equiv 1$ для узлов $a = x^*_{1,4}$, $b = x^*_{3,4}$ четырехточечной квадратуры Гаусса

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{4} \lambda^*_{\ell,4} f(x^*_{\ell,4}), \quad f \in \mathscr{P}_7, \tag{3.12}$$

алгебраическая точность которой есть $N = 7$. В данном случае $M = 4$, $s = r = 0$ и, значит, $n_0 = 6$. В этой ситуации применимы теоремы 1 и 2. Однако наша цель состоит в том, чтобы показать, что, исходя из соображений замечания 2, можно получить решение задачи и для значения $n = n_0 - 1 = 5$. Построение формулы (3.12) и обоснование приведенной ниже теоремы 3 осуществляется с помощью элементарных, хотя и громоздких вычислений; мы приведем их здесь лишь схематично.

Узлы формулы (3.12) являются нулями многочлена Лежандра (см., например, [13, гл. IV])

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3),$$

а именно,

$$x^*_{1,4} = -x^*_{4,4} = -\frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}, \quad x^*_{2,4} = -x^*_{3,4} = -\frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}.$$

Квадратурная формула (3.12) интерполяционная, и ее коэффициенты находятся по формуле

$$\lambda^*_{\ell,4} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{\omega'(x^*_{\ell,4})(x - x^*_{\ell,4})}\,dx, \quad \omega(x) = \prod_{\ell=1}^{4}(x - x^*_{\ell,4});$$

они положительные и имеют следующие значения:

$$\lambda^*_{1,4} = \lambda^*_{4,4} = -\frac{1}{36}\sqrt{30} + \frac{1}{2}, \quad \lambda^*_{2,4} = \lambda^*_{3,4} = \frac{1}{36}\sqrt{30} + \frac{1}{2}.$$

Теоремы 1 и 2 содержат решение задачи (3.1) для интервала $J = \big(x^*_{1,4}, x^*_{3,4}\big)$ при $n = 6$ и $n = 7$. Сейчас будет приведено решение задачи при $n = 5$. Для построения экстремального многочлена задачи будем исходить из многочлена пятой степени

$$\rho(t) = (t - \xi)(t - x^*_{1,4})(t - x^*_{3,4})(t - x^*_{4,4})^2. \tag{3.13}$$

Корень ξ многочлена (3.13) выберем из условия $\rho'(x^*_{2,4}) = 0$. Элементарные вычисления дают значение

$$\xi = -\frac{-45\sqrt{525 - 70\sqrt{30}} + 12\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}\,\sqrt{30} + 15\sqrt{525 + 70\sqrt{30}} - 2\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}\,\sqrt{30}}{-1575 + 280\sqrt{30} + \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}\,\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}; \tag{3.14}$$

это значение приблизительно равно $-1.161692293\ldots$. Далее нам понадобится лишь тот факт, что $\xi < -1$, в чем можно убедиться с помощью элементарных преобразований, исходя из (3.14).

Теорема 3. *Для единичного веса $v \equiv 1$ величина одностороннего приближения снизу $E_n^-(\mathbf{1}_J)$ интервала $J = (x^*_{1,4}, x^*_{3,4})$ многочленами степени $n = 5, 6, 7$ имеет одно и то же значение*

$$E_n^-(\mathbf{1}_J) = x^*_{3,4} - x^*_{1,4} - \lambda^*_{2,4}.$$

При этом многочлен пятой степени

$$p^*(t) = \frac{\rho(t)}{\rho(x^*_{2,4})}, \quad \rho(t) = (t-\xi)(t-x^*_{1,4})(t-x^*_{3,4})(t-x^*_{4,4})^2, \tag{3.15}$$

в котором точка ξ *определена формулой* (3.14)*, является многочленом наилучшего приближения функции* $\mathbf{1}_J$ *снизу*; *этот многочлен интерполирует функцию* $\mathbf{1}_J$ *в узлах формулы* (3.12).

Доказательство. Из формулы (3.13) видно, что многочлен ρ имеет на $[-1,1]$ следующие знаки:

$$\rho(t) \ge 0 \quad \text{для} \quad t \in [-1, x^*_{1,4}] \quad \text{и} \quad t \in [x^*_{3,4}, 1];$$

$$\rho(t) < 0 \quad \text{для } t \in (x^*_{1,4}, x^*_{3,4}).$$

Производная ρ' многочлена ρ на $[x^*_{1,4}, x^*_{3,4}]$ может обратиться в ноль только в одной точке, по построению многочлена ρ это есть точка $x^*_{2,4}$. Следовательно, $\rho(x^*_{2,4}) < 0$, и это есть абсолютный минимум многочлена ρ на $[-1,1]$. Отсюда следует, что многочлен (3.15) интерполирует функцию $\mathbf{1}_J$ в узлах формулы (3.12) и обладает свойством $p^* \le \mathbf{1}_J$. Этот многочлен дает оценку сверху величины $E^-_{n,1}(\mathbf{1}_J)$ при любом $n \ge 5$.

По теореме A квадратурная формула Гаусса (3.12) дает для величины $E^-_{n,1}(\mathbf{1}_J)$ при любом $n \le 7$ оценку снизу, которая, как нетрудно заметить, при $5 \le n \le 7$ совпадает с оценкой сверху. Теорема 3 доказана. □

3.4. Одностороннее приближение сверху характеристической функции интервала $(a,b) \subset [-1,1]$

Обсудим теперь задачу одностороннего приближения сверху

$$E^+_n(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E^+_{n,v}(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \inf\left\{\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^v(-1,1)} : p_n \in \mathscr{P}^+_n(\mathbf{1}_{(a,b)})\right\} \tag{3.16}$$

характеристической функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$ интервала (a,b). Для этой задачи справедливы аналоги всех утверждений, приведенных выше в разделах 3.1 и 3.2 для задачи (3.1) одностороннего приближения снизу.

Будем исходить из положительной квадратурной формулы (3.2), алгебраическая точность N которой удовлетворяет условию $N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r$. Пусть $a \in (-1,1)$ есть узел этой формулы. Если он не наименьший, то обозначим через $\overline{\rho} = \overline{p}^a_{n_0}$ многочлен Эрмита порядка n_0, который интерполирует характеристическую функцию $\mathbf{1}_{[a,1]}$ отрезка $[a,1]$ в узлах формулы (3.2). А точнее, в точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, и в точке a многочлен $\overline{\rho}$ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$; в частности, $\overline{\rho}(a) = 1$. В остальных узлах формулы (3.2) многочлен $\overline{\rho}$ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$, так и значения производной: $\overline{\rho}(x_k) = \mathbf{1}_{[a,1]}(x_k)$, $\overline{\rho}'(x_k) = 0$. Многочлен с перечисленными интерполяционными свойствами существует (см., например, [11, гл. 2, §11] или [12, лекция 4, п. 4.3]). Если $a \in (-1,1)$ есть наименьший узел формулы (3.2), то положим $\overline{p}^a_{n_0} \equiv 1$; этот многочлен вновь осуществляет эрмитову интерполяцию функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$ в узлах формулы (3.2).

Многочлен $\overline{p}^a_{n_0}$ принадлежит множеству $\mathscr{P}^+_{n_0}(\mathbf{1}_{[a,1]})$ и является экстремальным многочленом в задаче приближения сверху характеристической функции (3.6) при всех n со свойством $n_0 \le n \le N$. В этом можно убедиться разными способами, к примеру, с помощью следующих соображений. Очевидно, что для любой измеримой ограниченной функции f при любом $n \ge 1$ имеет место равенство $E^+_n(f) = E^-_n(1-f)$ вместе с соответствующим соотношением между экстремальными многочленами. Для функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$ имеем $1 - \mathbf{1}_{[a,1]} = \mathbf{1}_{[-1,a)}$. Многочлен $1 - \overline{p}^a_{n_0}$ осуществляет эрмитову интерполяцию функции $\mathbf{1}_{[-1,a)}$ в узлах квадратурной формулы (3.2).

Следовательно, он совпадает с экстремальным многочленом $q^a_{n_0}$ задачи об исследовании величины $E^-_{n_0}(\mathbf{1}_{[-1,a)})$, определенной формулой (3.6). Таким образом, $\overline{p}^a_{n_0} = 1 - q^a_{n_0}$. Лемма 2 и предложение B гарантируют все экстремальные свойства многочлена $\overline{p}^a_{n_0}$.

Для узла $b \in (-1,1)$ формулы (3.2), не являющегося наибольшим, обозначим через $\overline{q}^a_{n_0}$ многочлен Эрмита порядка n_0, который интерполирует характеристическую функцию $\mathbf{1}_{[-1,b]}$ отрезка $[-1,b]$ в узлах формулы (3.2). Уточним, что в точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, и в точке a многочлен $\overline{q}^b_{n_0}$ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$; в частности, $\overline{q}^b_{n_0}(b) = 1$. В остальных узлах формулы (3.2) многочлен $\overline{q}^b_{n_0}$ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$, так и значения ее производной. Если $b \in (-1,1)$ есть наибольший узел формулы (3.2), то положим $\overline{q}^b_{n_0} \equiv 1$; этот многочлен также осуществляет эрмитову интерполяцию функции $\mathbf{1}_{[-1,b]}$ в узлах формулы (3.2).

Многочлен $\overline{q}^b_{n_0}$ принадлежит множеству $\mathscr{P}^+_{n_0}(\mathbf{1}_{[-1,b]})$ и является экстремальным многочленом в задаче приближения сверху характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,b]}$ отрезка $[-1,b]$ при всех n со свойством $n_0 \le n \le N$.

По той же схеме, что и теорема 1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. *Предположим, что квадратурная формула* (3.2) *положительная и обладает свойством* $N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r$. *Тогда для любых двух узлов* $a, b \in (-1,1)$ *этой формулы,* $a = x_{k(a)},\ b = x_{k(b)}$, *где* $1 \le k(a) < k(b) \le M$, *справедливы следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (3.16) *имеет одно и то же значение*

$$E^+_n(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E^+_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \sum_{k=k(a)}^{k(b)} \lambda_k - \int\limits_a^b v(t)dt.$$

(2) *Многочлен* $\overline{\varrho}^{ab}_{n_0} = \overline{p}^a_{n_0} + \overline{q}^b_{n_0} - 1$ *порядка* n_0 *обладает свойством*

$$\overline{\varrho}^{ab}_{n_0}(x) \ge \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [-1,1],$$

т. е. $\overline{\varrho}^{ab}_{n_0} \in \mathscr{P}^+_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,b)})$, *и является экстремальным в задаче* (3.16) *для всех* $n\colon n_0 \le n \le N$.

Как следствие теоремы 4 для задачи (3.16) справедлив также аналог теоремы 2.

4. Одностороннее приближение характеристической функции симметричного интервала в случае четного веса

Результаты работы [9], относящиеся к задаче (2.7), описанные выше в теореме B, позволяют выписать решение задачи наилучшего интегрального одностороннего приближения снизу и сверху характеристической функции симметричного интервала $J = (-h,h),\ 0 < h < 1$, в случае четного веса.

Ограничимся задачей (2.3) приближения снизу. Будем исходить из следующей задачи. Пусть v — некоторый вес на интервале $(0,1)$. Рассмотрим задачу о наилучшем приближении снизу

$$E^-_n(\mathbf{1}_{[0,h^2)}) = E^-_n(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)} = \min\left\{\|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)}\colon p_n \in \mathscr{P}^-_n(\mathbf{1}_{[0,h^2)})\right\} \tag{4.1}$$

характеристической функции $\mathbf{1}_{[0,h^2)}$ полуинтервала $J = [0,h^2)$ в пространстве $L^v(0,1)$ на интервале $(0,1)$ множеством алгебраических многочленов степени $n \ge 1$. Линейной заменой переменного эта задача сводится к задаче типа (2.3) на $(-1,1)$, решение которой, как уже было сказано выше, дано в [9]. В следующем утверждении с помощью довольно простых соображений показано, что задача (4.1) эквивалентна задаче

$$E^-_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} = \min\left\{\|\mathbf{1}_{(-h,h)} - q_{2n+1}\|_{L^w(-1,1)}\colon q_{2n+1} \in \mathscr{P}^-_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})\right\} \tag{4.2}$$

для веса $w(t) = v(t^2)|t|,\ t \in (-1,1)$.

Теорема 5. *При* $0 < h < 1$, $n \geq 1$ *задачи* (4.2) *и* (4.1) *эквивалентны, а точнее,*
(1) *имеет место равенство*

$$E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} = E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)}; \tag{4.3}$$

(2) *многочлен* p^*_n *является экстремальным в задаче* (4.1) *в том и только в том случае, если многочлен* $p^*_n(t^2)$ *является экстремальным в задаче* (4.2).

Доказательство. Пусть $p_n \in \mathscr{P}^{-}_n(\mathbf{1}_{[0,h^2)})$ на $(0,1)$, т. е. p_n — многочлен степени не выше n и обладает свойством $p_n(t) \leq \mathbf{1}_{[0,h^2)}(t),\ t \in (0,1)$. Тогда многочлен $q_{2n}(t) = p_n(t^2)$ обладает свойством $q_{2n}(t) \leq \mathbf{1}_{(-h,h)}(t),\ t \in (-1,1)$. При этом, сделав в интеграле

$$\|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)} = \int_0^1 v(\eta)(\mathbf{1}_{[0,h^2)}(\eta) - p_n(\eta))d\eta$$

замену $\eta = t^2$, получим

$$\|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)} = 2\int_0^1 v(t^2)t(\mathbf{1}_{[0,h^2)}(t^2) - p_n(t^2))dt$$

$$= 2\int_0^1 v(t^2)t(\mathbf{1}_{[0,h)}(t) - q_{2n}(t))dt = \int_{-1}^1 v(t^2)|t|(\mathbf{1}_{(-h,h)}(t) - q_{2n}(t))dt.$$

Отсюда следует неравенство $E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} \leq \|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)}$, а значит, и неравенство

$$E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} \leq E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)}. \tag{4.4}$$

Обратно, предположим, что многочлен q_{2n+1} степени $2n+1$ обладает свойством $q_{2n+1}(t) \leq \mathbf{1}_{(-h,h)}(t),\ t \in (-1,1)$. Многочлен $q_{2n}(t) = (q_{2n+1}(t) + q_{2n+1}(-t))/2$ также удовлетворяет неравенству $q_{2n}(t) \leq \mathbf{1}_{(-h,h)}(t),\ t \in (-1,1)$. Многочлен q_{2n} четный, имеет степень $2n$ и потому представим в виде $q_{2n}(t) = p_n(t^2)$, где p_n — многочлен степени n со свойством $p_n(t) \leq \mathbf{1}_{[0,h^2)}(t)$, $t \in (0,1)$. Отсюда заключаем, что

$$E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)} \leq \|\mathbf{1}_{(-h,h)} - q_{2n}\|_{L^w(-1,1)} = \|\mathbf{1}_{(-h,h)} - q_{2n+1}\|_{L^w(-1,1)}.$$

А следовательно, справедливо неравенство

$$E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)} \leq E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)}. \tag{4.5}$$

Неравенства (4.4) и (4.5) влекут равенство (4.3). Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение нетрудно получить из анализа приведенного доказательства. Теорема 5 доказана. □

Благодарности

Авторы благодарны профессору В. В. Арестову за внимание к их исследованиям и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 2, no. 12. P. 139–164.
2. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 327 с.
3. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 254 с.
4. **Bustamante J., Quesada J.M., Martínez-Cruz R.** Best one-sided L_1 approximation to the Heaviside and sign functions // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164. P. 791–802. doi: 10.1016/j.jat.2012.02.006 .
5. **Li X.-J., Vaaler J.D.** Some trigonometric extremal functions and the Erdös–Turán type inequalities // Ind. Univ. Math. J. 1999. Vol. 48, no. 1. P. 183–236. doi: 10.1512/iumj.1999.48.1508 .
6. **Моторный В.П., Моторная О.В., Нитиема П.К.** Об одностороннем приближении ступеньки алгебраическими многочленами в среднем // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 409–422.
7. **Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M.** Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 198. P. 10–23. doi: 10.1016/j.jat.2015.05.001 .
8. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, вып. 1. С. 82–95.
9. **Babenko A.G., Deikalova M.V., Revesz Sz.G.** Weighted one-sided integral approximations to characteristic functions of intervals by polynomials on a closed interval // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297, Suppl. 1. P. S11–S18. doi: 10.1134/S0081543817050029 .
10. **Beckermann B., Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M.** Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa // Calcolo. 2014. Vol. 51, no. 2. P. 319–328. doi: 10.1007/s10092-013-0087-3 .
11. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 464 с.
12. Изложение лекций С. Б. Стечкина по теории приближений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2010. 154 с.
13. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.

Поступила 01.09.2018
После доработки 09.10.2018
Принята к публикации 15.10.2018

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: marina.deikalova@urfu.ru

Торгашова Анастасия Юрьевна
магистрант
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: anastasiya.torgashova@mail.ru

REFERENCES

1. Bojanic R., DeVore R. On polynomials of best one-sided approximation. *Enseign. Math.*, 1966, vol. 2, no. 12, pp. 139–164.
2. Krylov V.I. *Approximate calculation of integrals.* Mineola, N.Y.: Dover, 2006, 368 p. ISBN: 0486445798 . Original Russian text published in Krylov V.I. *Priblizhennoe vychislenie integralov.* Moscow: Fizmatlit Publ., 1959, 327 p.
3. Korneichuk N.P., Ligun A.A., and Doronin V.G. *Approksimatsiya s ogranicheniyami* [Approximation with Constraints]. Kiev: Naukova Dumka, 1982, 254 p.

4. Bustamante J., Quesada J.M., Martínez-Cruz R. Best one-sided L_1 approximation to the Heaviside and sign functions. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, pp. 791–802. doi: 10.1016/j.jat.2012.02.006 .
5. Li X.-J., Vaaler J.D. Some trigonometric extremal functions and the Erdös–Turán type inequalities. *Ind. Univ. Math. J.*, 1999, vol. 48, no. 1, pp. 183–236. doi: 10.1512/iumj.1999.48.1508 .
6. Motornyi V.P., Motornaya O.V., Nitiema P.K. One-sided approximation of a step by algebraic polynomials in the mean. *Ukr. Math. J.*, 2010, vol. 62, no. 3, pp. 467–482. doi: 10.1007/s11253-010-0366-y .
7. Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M. Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions. *J. Approx. Theory*, 2015, vol. 198, pp. 10–23. doi: 10.1016/j.jat.2015.05.001 .
8. Babenko A.G., Kryakin Yu.V., and Yudin V.A. One-sided approximation in L of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 280, suppl. 1, pp. 39–52. doi: 10.1134/S0081543813020041 .
9. Babenko A.G., Deikalova M.V., Revesz Sz.G. Weighted one-sided integral approximations to characteristic functions of intervals by polynomials on a closed interval. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 11–18. doi: 10.1134/S0081543817050029 .
10. Beckermann B., Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M. Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa. *Calcolo*, 2014, vol. 51, no. 2, pp. 319–328. doi: 10.1007/s10092-013-0087-3 .
11. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Computing Methods*, vol. 1. Oxford: Pergamon, 1965, 464 p. ISBN: 9781483180588 . Original Russian text published in Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii*, vol. 1. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962, 464 p.
12. Arestov V.V., Berdyshev V.I., Chernykh N.I., Demina T.V., Kholschevnikova N.N., Konyagin S.V., Subbotin Yu.N., Telyakovskii S.A., Tsar'kov I.G., Yudin V.A. Exposition of the lectures by S.B. Stechkin on approximation theory. *Eurasian Math. J.*, 2011, vol. 2, no. 4, pp. 5–155.
13. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* (Classical orthogonal polynomials). Moscow: Nauka Publ., 1976, 327 p. ISBN (3rd ed.): 978-5-9221-0406-7 .

Received September 01, 2018
Revised October 09, 2018
Accepted October 15, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Marina Valer'evna Deikalova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: marina.deikalova@urfu.ru .

Anastasiya Yur'evna Torgashova, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: anastasiya.torgashova@mail.ru .