ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.518.45

СХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФРАКТАЛЬНОСТЬ ИХ ГРАФИКОВ[1]

М. Л. Гриднев

Для непрерывной на отрезке функции f вводится понятие модуля фрактальности $\nu(f,\varepsilon)$ как функции, которая каждому $\varepsilon > 0$ сопоставляет минимальное число квадратов размера ε, которыми можно покрыть график функции f. В терминах модуля фрактальности и модуля непрерывности $\omega(f,\delta)$ получено условие равномерной сходимости ряда Фурье функции f: если

$$\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{\nu(f,\pi/n)}{n}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow +\infty,$$

то ряд Фурье функции f сходится равномерно. Это условие уточняет известный признак сходимости Дини-Липшица. Кроме того, получена равномерная по $x \in [0,2\pi]$ оценка порядка роста сумм Фурье $S_n(f,x)$ непрерывной функции f:

$$S_n(f,x) = o\biggl(\ln\left(\frac{\nu(f,\pi/n)}{n}\right)\biggr).$$

Показано, что эта оценка является неулучшаемой.

Ключевые слова: тригонометрический ряд Фурье, равномерная сходимость, фрактальная размерность.

M. L. Gridnev. Convergence of trigonometric Fourier series of functions with a constraint on the fractality of their graphs.

For a function f continuous on a closed interval, its modulus of fractality $\nu(f,\varepsilon)$ is defined as the function that maps any $\varepsilon > 0$ to the smallest number of squares of size ε that cover the graph of f. The following condition for the uniform convergence of the Fourier series of f is obtained in terms of the modulus of fractality and the modulus of continuity $\omega(f,\delta)$: if

$$\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{\nu(f,\pi/n)}{n}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \longrightarrow +\infty,$$

then the Fourier series of f converges uniformly. This condition refines the known Dini–Lipschitz test. In addition, for the growth order of the partial sums $S_n(f,x)$ of a continuous function f, we derive an estimate that is uniform in $x \in [0,2\pi]$:

$$S_n(f,x) = o\biggl(\ln\left(\frac{\nu(f,\pi/n)}{n}\right)\biggr).$$

The optimality of this estimate is shown.

Keywords: trigonometric Fourier series, uniform convergence, fractal dimension.

MSC: 42A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-104-109

Пусть f — 2π-периодическая суммируемая на $[0,2\pi]$ функция. Напомним, что ее коэффициенты и частные суммы Фурье определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\; dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\; dt, \quad S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Для функции f, определенной на множестве $X \subset \mathbb{R}$, через $\omega_X(f,\delta)$ обозначим ее модуль непрерывности

$$\omega_X(f,\delta) = \sup\big\{|f(x)-f(y)|\colon x,y \in X,\ |x-y| \leqslant \delta\big\}.$$

Через $C_{2\pi}$ будем обозначать множество всех определенных на $\mathbb{R}$ непрерывных 2π-периодических функций.

В теории тригонометрических рядов интерес представляет вопрос об условиях сходимости рядов Фурье. Хорошо известен

Признак Дини — Липшица. *Пусть $f \in C_{2\pi}$ и ее модуль непрерывности $\omega(f,\delta) = \omega_{\mathbb{R}}(f,\delta)$ удовлетворяет условию*

$$\omega(f,\delta)\ln\Big(\frac{1}{\delta}\Big) \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad \delta \longrightarrow +0.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на $[0,2\pi]$.

Этот признак, как известно, является неулучшаемым. В данной статье мы получим уточнение этого признака для более узкого класса функций.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть дана ограниченная функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Модулем фрактальности функции f на отрезке $[a,b]$ будем называть функцию $\nu_{[a,b]}(f,\varepsilon)$, которая любому ε, большему нуля, сопоставляет минимальное число замкнутых квадратов со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f на отрезке $[a,b]$.

З а м е ч а н и е 1. Из определения модуля фрактальности следует, что

$$\frac{b-a}{\varepsilon} \leqslant \nu_{[a,b]}(f,\varepsilon) \leqslant \Big(\frac{b-a}{\varepsilon}+1\Big)\Big(\frac{\max\{|f(x)-f(y)|\colon x,y\in[a,b]\}}{\varepsilon}+1\Big) = O\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\Big).$$

Понятие модуля фрактальности было предложено Н. Ю. Антоновым и С. В. Бердышевым и, насколько нам известно, в опубликованном виде встречалось лишь в работах автора настоящей статьи [1; 2].

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mu:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ — невозрастающая функция. Определим функциональный класс F^μ следующим образом:

$$F^\mu := \big\{f\in C_{2\pi}\colon \nu_{[0,2\pi]}(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon)),\ \varepsilon>0\big\}.$$

З а м е ч а н и е 2. График любой функции из F^μ, где $\mu(\varepsilon)=1/\varepsilon^\alpha$, $\alpha\in[1,2]$, имеет фрактальную размерность по Минковскому, не большую α, что и обусловливает название модуля фрактальности.

Лемма 1. *Если f — непрерывная на $[a,b]$ функция и $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, то*

$$\frac{\max\{|f(x)-f(y)|\colon x,y\in[\alpha,\beta]\}}{\beta-\alpha} \leqslant \nu_{[\alpha,\beta]}(f,\beta-\alpha) \leqslant \frac{\omega_{[a,b]}(f,\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}+1. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того наблюдения, что количество квадратов со стороной длины $\beta-\alpha$ в минимальном покрытии графика непрерывной функции f на отрезке $[\alpha,\beta]$ равно округлению вверх числа $\max\{|f(x)-f(y)|/(\beta-\alpha)\colon x,y\in[\alpha,\beta]\}$.

Обозначим отрезок $\Big[\dfrac{(i-1)\pi}{n},\dfrac{i\pi}{n}\Big]$ как $I(n,i)$.

Лемма 2. *Если f — непрерывная на $[0,2\pi]$ функция, то*

$$\sum_{i=1}^{2n}\nu_{I(n,i)}(f,\pi/n) \leqslant 3\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — множество квадратов со стороной π/n, составляющих минимальное покрытие функции f на отрезке $[0, 2\pi]$, $\sharp K$ — мощность множества K. Согласно определению модуля фрактальности $\sharp K = \nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n)$. Для $i \in \{1, \dots, 2n\}$ обозначим через K_i подмножество множества K, состоящее из квадратов, имеющих непустое пересечение с полосой $I(n, i) \times \mathbb{R}$. Ясно, что объединение всех квадратов из K_i покрывает участок графика функции f, соответствующий отрезку $I(n, i)$. Поскольку $\nu_{I(n,i)}(f, \pi/n)$ — минимальное число квадратов, которыми можно покрыть участок графика функции f, соответствующий отрезку $I(n, i)$, то $\nu_{I(n,i)}(f, \pi/n) \le \sharp K_i$. Учитывая, что каждый квадрат из K_i может пересекаться не более чем с тремя полосами вида $I(n, j) \times \mathbb{R}$ (j может быть равным $i-1$, i или $i+1$), получаем

$$\sum_{i=1}^{2n} \nu_{I(n,i)}(f, \pi/n) \le \sum_{i=1}^{2n} \sharp K_i \le 3\sharp K = 3\nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n).$$

Лемма 2 доказана.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть для набора неотрицательных чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$ известны следующие ограничения: $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \leqslant A$ и $\sum_{i=1}^n a_i \leqslant AB$ при некоторых A и B. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \leqslant 2A \ln\bigl(B+1\bigr).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $B \geqslant n$ утверждение очевидно. Если $0 \leqslant B < 1$, то требуемое неравенство получается с помощью неравенства $B \leqslant 2\ln(B+1)$, которое следует из разложения в ряд Тейлора величины $\ln(B+1)$. Рассмотрим случай $1 \leqslant B < n$. Обоснуем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A}{i}.$$

Действительно,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} = \sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A-a_i}{i} - \sum_{B<i\leqslant n} \frac{a_i}{i} \geqslant \frac{1}{B}\Bigl(\sum_{1\leqslant i\leqslant B}(A-a_i) - \sum_{B<i\leqslant n} a_i\Bigr) = \frac{1}{B}\Bigl(AB - \sum_{i=1}^{n} a_i\Bigr) \geqslant 0.$$

Теперь получим искомую оценку:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A}{i} \leqslant A \sum_{1\leqslant i\leqslant B} \int_{i}^{i+1} \frac{2}{t}dt \leqslant 2A \int_{1}^{B+1} \frac{1}{t}dt = 2A\ln(B+1).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция. Тогда для всех $x \in [0, 2\pi]$*

$$\bigl|S_n(f, x) - f(x)\bigr| \leqslant C\omega(f, \pi/n) \ln\Bigl(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n)}{n}\Bigr) + o(1), \tag{3}$$

где C — абсолютная константа и оценка $o(1)$ равномерная по x при $n \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя доказательству признака Салема [3, гл. 4, § 5], можно увидеть, что при нечетных n

$$\bigl|S_n(f, x) - f(x)\bigr| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\Bigl(\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |T_n(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |Q_n(t)|\Bigr) + o(1),$$

где

$$T_n(x)=\frac{f(x)-f\Big(x+\dfrac{\pi}{n}\Big)}{1}+\frac{f\Big(x+\dfrac{2\pi}{n}\Big)-f\Big(x+\dfrac{3\pi}{n}\Big)}{3}+\ldots+\frac{f\Big(x+\dfrac{(n-1)\pi}{n}\Big)-f(x+\pi)}{n}$$

и

$$Q_n(x)=\frac{f(x)-f\Big(x-\dfrac{\pi}{n}\Big)}{1}+\frac{f\Big(x-\dfrac{2\pi}{n}\Big)-f\Big(x-\dfrac{3\pi}{n}\Big)}{3}+\ldots+\frac{f\Big(x-\dfrac{(n-1)\pi}{n}\Big)-f(x-\pi)}{n}.$$

Оценим абсолютные значения $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ сверху через выражения из правой части (3). Рассмотрим $T_n(x)$. Случай с $Q_n(x)$ рассматривается аналогично.

Применив левое неравенство из (1) и добавив недостающие члены к получившейся сумме, получаем

$$|T_n(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi\nu_{[x+\frac{(i-1)\pi}{n},x+\frac{i\pi}{n}]}(f,\pi/n)}{in}. \tag{4}$$

При любом фиксированном $x\in[0,2\pi]$, каждому $i\in\mathbb{N}$ сопоставим минимальное целое k_i, для которого $\Big[x+\dfrac{(i-1)\pi}{n},x+\dfrac{i\pi}{n}\Big]\subset I(n,k_i)\cup I(n,k_i+1)$ и соответственно

$$\nu_{[x+\frac{(i-1)\pi}{n},x+\frac{i\pi}{n}]}(f,\pi/n)\leqslant\nu_{I(n,k_i)}(f,\pi/n)+\nu_{I(n,k_i+1)}(f,\pi/n).$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi\nu_{[x+\frac{(i-1)\pi}{n},x+\frac{i\pi}{n}]}(f,\pi/n)}{in}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi\nu_{I(n,k_i)}(f,\pi/n)+\pi\nu_{I(n,k_i+1)}(f,\pi/n)}{in}. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что для каждого $k=1,\ldots,2n$ величина $\nu_{I(n,k)}(f,\pi/n)$ встречается в правой части (5) не более двух раз (в силу периодичности f, отрезки $I(n,i)$ и $I(n,i+2kn)$ считаем одинаковыми). Используя этот факт и лемму 2, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi\nu_{I(n,k_i)}(f,\pi/n)+\pi\nu_{I(n,k_i+1)}(f,\pi/n)}{n}\leqslant\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}\nu_{I(n,k)}(f,\pi/n)\leqslant\frac{6\pi\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}. \tag{6}$$

Кроме того, согласно лемме 1 для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$

$$\frac{\pi\nu_{I(n,k_i)}(f,\pi/n)+\pi\nu_{I(n,k_i+1)}(f,\pi/n)}{n}\leqslant 2\omega(f,\pi/n)+\frac{2\pi}{n}. \tag{7}$$

Теперь, имея (6), (7), воспользуемся леммой 3. Также пользуясь замечанием после определения 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi\nu_{I(n,k_i)}(f,\pi/n)+\pi\nu_{I(n,k_i+1)}(f,\pi/n)}{in}\leqslant 4\Big(\omega(f,\pi/n)+\frac{\pi}{n}\Big)\ln\Big(\frac{3\pi\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n\omega(f,\pi/n)+\pi}+1\Big)$$

$$=4\omega(f,\pi/n)\ln\Big(\frac{3\pi\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)+n\omega(f,\pi/n)+\pi}{n}\Big)+\frac{4\pi}{n}\ln\Big(\frac{3\pi\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)+n\omega(f,\pi/n)+\pi}{n}\Big)$$

$$+4\Big(\omega(f,\pi/n)+\frac{\pi}{n}\Big)\ln\Big(\frac{1}{\omega(f,\pi/n)+\pi/n}\Big)$$

$$\leqslant 4\omega(f,\pi/n)\ln\Big(\frac{3\pi\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}+1\Big)+\frac{4\pi}{n}\ln\big(Cn\big)+o(1)\leqslant 4\omega(f,\pi/n)\ln\Big(\frac{\nu^5_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n^5}\Big)+o(1)$$

$$\leqslant 20\omega(f,\pi/n)\ln\Big(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\Big)+o(1),$$

что вместе с (4) и (5) завершает получение оценки (3) для нечетных n. Ясно, что тогда для четных n оценка (3) также имеет место. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы автоматически вытекают два следствия.

Следствие 1. *Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция и ее модули непрерывности и фрактальности удовлетворяют условию*

$$\omega(f,\pi/n)\ln\Big(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\Big)\longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad n\longrightarrow +\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на $[0,2\pi]$.

Следствие 2. *Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция и $f\notin F^{1/\varepsilon}$. Тогда равномерно по $x\in[0,2\pi]$ имеет место оценка*

$$S_n(f,x)=o\Big(\ln\Big(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\Big)\Big). \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 3. Если в следствиях 1 и 2 функция f принадлежит F^μ, где $\mu(\varepsilon)=1/\varepsilon^\alpha$, $1<\alpha\leqslant 2$, то мы получим признак Дини — Липшица и известную оценку для непрерывных функций $S_n(f,x)=o(\ln n)$ соответственно, которые, как известно, неулучшаемы. Если же $\mu(\varepsilon)$ — функция, стремящаяся к бесконечности в нуле медленнее, чем $1/\varepsilon^\alpha$, при любом $\alpha>1$, но быстрее чем $1/\varepsilon$, например, если $\mu(\varepsilon)=\ln(1/\varepsilon)/\varepsilon$, то получим усиление данных утверждений для более узкого, чем $C_{2\pi}$, класса функций F^μ.

Следующее утверждение показывает, что оценка (8) является неулучшаемой.

Теорема 2. *Пусть $\mu\colon(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ не возрастает и стремится к $+\infty$ при $\varepsilon\to+0$. Тогда для любой неубывающей последовательности положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющей условию*

$$\lambda_n=o\Big(\ln\Big(\frac{\mu(\pi/n)}{n}\Big)\Big), \tag{9}$$

найдется функция $f\in F^\mu$ такая, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n(f,0)|}{\lambda_n}>0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Искомую функцию $f\in F^\mu$ заимствуем из доказательства теоремы 1 в [2], где единственным отличием будут другие коэффициенты c_k, участвующие в определении f. А именно, по определенным в той же статье последовательностям a_k и k_i коэффициенты c_k теперь будут определяться следующим образом:

$$c_k=\begin{cases}\lambda_{a_{k_i}}/\ln\Big(\dfrac{3\mu(\pi/a_{k_i})}{a_{k_i}}-1\Big), & k\in\{k_i\}_{i=1}^\infty;\\ 0, & k\notin\{k_i\}_{i=1}^\infty.\end{cases}$$

Тогда из конструкции f будет вытекать

$$S_{a_{k_i}}(f,0)\geqslant\frac{c_{k_i}}{\pi}\ln\frac{a_{k_i}}{a_{k_i-1}}+o(1)\geqslant\frac{c_{k_i}}{\pi}\ln\Big(3\mu\Big(\frac{\pi}{a_k}\Big)\frac{1}{a_k}-1\Big)+o(1)=\lambda_{a_{k_i}}/\pi+o(1),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гриднев М.Л.** О классах функций с ограничением на фрактальность их графика // Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Yekaterinburg, 2017. Vol. 1894. C. 167–173. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr5.pdf.

2. **Gridnev M.L.** Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P 46–50. doi: 10.15826/umj.2017.2.007 .
3. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИМФЛ, 1961. 937 с.

Поступила 31.08.2018
После доработки 28.10.2018
Принята к публикации 05.11.2018

Гриднев Максим Леонидович
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: coraxcoraxg@gmail.com

REFERENCES

1. Gridnev M. L. On classes of functions with a restriction on the fractality of their graphs. In: A. A. Makhnev, S. F. Pravdin (eds.): *Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. "Modern Problems in Mathematics and its Applications"*, Yekaterinburg, 2017, vol. 1894, pp. 167–173 (in Russian). Published at http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr5.pdf .
2. Gridnev M. L. Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 46–50. doi: 10.15826/umj.2017.2.007 .
3. Bary N.K. *A treatise on trigonometric series*, vol. I; II. Oxford; N Y: Pergamon Press, 1964, 553 p.; 508 p. doi: 10.1002/zamm.19650450531 . Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady*, Moscow: GIMFL Publ., 1961, 937 p.

Received August 31, 2018
Revised October 28, 2018
Accepted November 05, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00702).

Maksim Leonidovich Gridnev, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: coraxcoraxg@gmail.com .