ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 512.554.3

КОММУТАТИВНЫЕ ИДЕАЛЫ НАИБОЛЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ НИЛЬТРЕУГОЛЬНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЕМ[1]

Е. А. Кириллова, Г. С. Сулейманова

Пусть N — нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле. В статье изучается проблема описания коммутативных подалгебр наибольшей размерности подалгебры N над произвольным полем. Доказывается, что N содержит коммутативный идеал этой размерности. Найдены все такие идеалы. Также описаны максимальные коммутативные идеалы подалгебры N для типов G_2 и F_4. Как следствие, найдена наибольшая размерность коммутативных подалгебр во всех подалгебрах N.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, коммутативные идеалы и идеалы наибольшей размерности.

E. A. Kirillova, G. S. Suleimanova. Highest dimension commutative ideals of a niltriangular subalgebra of a Chevalley algebra over a field.

Let N be a niltriangular subalgebra of a Chevalley algebra. We study the problem of describing commutative ideals of N of the highest dimension over an arbitrary field. It is proved that N contains a commutative ideal of this dimension, and all such ideals are found. In addition, all maximal commutative ideals of N are described for the types G_2 and F_4. As a consequence, the highest dimension of commutative subalgebras in all subalgebras of N is found.

Keywords: Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, commutative ideals and highest dimension ideals.

MSC: 17B05, 17B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-98-108

Введение

И. Шур [1] указал наибольшую размерность абелевых подгрупп группы $SL(n,\mathbb{C})$ и доказал, что абелевы подгруппы этой размерности при $n>3$ автоморфны. В 1945 г. А. И. Мальцев [2] исследовал задачу описания абелевых подгрупп максимальной размерности во всех конечномерных комплексных простых группах Ли, применяя переход к комплексным алгебрам Ли.

Методы [2] модифицировались и применялись к проблеме описания больших абелевых подгрупп конечной группы Шевалле и редукционной задаче для унипотентного радикала U ее подгруппы Бореля, [3–10]. *Большой $\mathcal{P}$-подгруппой* конечной группы ($\mathcal{P}$ — любое теоретико-групповое свойство) называют все ее $\mathcal{P}$-подгруппы наибольшего порядка.

Пусть $L_\Phi(K)$ — алгебра Шевалле над произвольным полем K, ассоциированная с системой корней Φ [11, § 4.4]. Базу Шевалле в ней составляют элементы e_r $(r\in\Phi)$ и подходящая база подалгебры Картана. Элементы e_r $(r\in\Phi^+)$ образуют базу нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры $L_\Phi(K)$. Свою задачу А. И. Мальцев решил редукцией к аналогичной задаче для алгебр Ли $N\Phi(\mathbb{C})$.

В [12] наряду с обобщенной задачей Мальцева записана следующая задача.

Обобщенная редукционная задача. *Описать коммутативные подалгебры наибольшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

Разработка в [13] решения этой задачи развивает схему [9], использующую методы А. И. Мальцева и Е. П. Вдовина. В настоящей статье (теорема 7) подтверждается высказанная в [13] гипотеза.

Гипотеза (А). *Всякий коммутативный идеал наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является ее коммутативной подалгеброй наибольшей размерности.*

Вместе с тем для алгебры Ли $N\Phi(K)$ указаны явно наибольшие размерности коммутативных подалгебр и завершено описание коммутативных идеалов наибольшей размерности (табл. 1 и 2).

1. Предварительные замечания и тип G_2

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ евклидова пространства, характеризуют [11, § 4.4] базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ вместе с подходящей базой подалгебры Картана. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу максимальной нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$. По теореме Шевалле о базисе если $r, s \in \Phi^+$, то

$$e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s}, \quad N_{sr} = -N_{rs} \quad (r+s \in \Phi), \qquad e_r * e_s = 0 \quad (r+s \notin \Phi),$$

где $N_{rs} = \pm 1$, или $|r| = |s| < |r+s|$ и $N_{rs} = \pm 2$, или Φ типа G_2 и $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3.

Сумму $\mathrm{ht}(r)$ коэффициентов в разложении корня r по базису называют *высотой корня*. В алгебре $N\Phi(K)$ выделяют идеалы $L_i = \langle Ke_r | r \in \Phi^+,\ \mathrm{ht}(r) \geqslant i \rangle$. Через $\{r\}^+$ обозначаем множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении $s-r$ по базису все коэффициенты неотрицательны, через $T(r)$ и $Q(r)$ — подалгебры в $N\Phi(K)$ с базисами $\{e_s \mid s \in \{r\}^+\}$ и $\{e_s \mid s \in \{r\}^+ \setminus \{r\}\}$ соответственно. Если $H \subseteq T(r_1) + T(r_2) + \cdots + T(r_m)$ и включение нарушается при любой замене $T(r_i)$ на $Q(r_i)$, то назовем $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\} = \mathcal{L}(H)$ *множеством углов для* H.

Описание коммутативных идеалов наибольшей размерности в алгебре Ли $N\Phi(K)$ над произвольным полем K естественно получать, по аналогии с [9], из решения более общей задачи:

(Б) *Описать максимальные коммутативные идеалы алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем K.*

Решение задачи **(Б)** для типа G_2, а при $2K = K$ также для типа F_4 анонсировалось ранее в [14]. Мы используем представление из [15, табл. IX] системы корней типа G_2 с базой $\{a, b\}$, где $|a| < |b|$.

Теорема 1. *Все максимальные коммутативные идеалы алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 исчерпывают при $6K = K$ идеал L_3, при $3K = 0$ идеалы L_2 и*

$$K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + Ke_{b+2a} + L_5 \quad (d \in K), \tag{1.1}$$

наконец, при $2K = 0$ идеалы L_3, $Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$, $K(e_{b+a} + de_{b+2a}) + L_4$ $(d \in K,\ d \neq 0)$ и

$$K(e_b + ce_{2a+b} + de_{b+3a}) + K(e_{a+b} + ce_{b+3a}) + L_5 \quad (c, d \in K). \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем произвольный максимальный коммутативный идеал M в $N\Phi(K)$. Он обязан совпадать со своим централизатором $C(M) = \{\beta \in N\Phi(K) \mid \beta * M = 0\}$.

Предположим, $M \not\subseteq L_3$. Тогда в M существует элемент α с углом $a+b$:

$$\alpha = \sum_{r \in \Phi^+} c_r e_r \in M, \quad c_a = c_b = 0, \quad c_{a+b} \neq 0.$$

Если M имеет простой угол, то такой элемент можно выбрать в $M * e_b$ или в $M * e_a$. Учитывая коммутативность идеала M, приходим к равенствам

$$0 = (e_a * \alpha) * \alpha = \pm 2c_{b+a}(e_{b+2a} * \alpha) = \pm 6c_{b+a}^2 e_{b+3a} \mod L_5.$$

При $6K = K$ это дает противоречие с условием $c_{a+b} \neq 0$. Поэтому здесь $M = L_3$.

Пусть $3K = 0$. Тогда L_2 — коммутативный идеал. Кроме того, $Ke_{b+2a} + L_5$ есть центр в $NG_2(K)$, и поэтому он лежит в M. Если M имеет простой угол a, то произведение $M * \alpha$ имеет угол $2a + b$, т. е. является ненулевым; это противоречит коммутативности M. Следовательно, $M \subseteq T(b)$ и централизатор $C(M) = M$ содержит централизатор $C(T(b)) = Ke_{a+b} + Ke_{2a+b} + L_5$ идеала $T(b)$ в $NG_2(K)$. При $M \nsubseteq L_2$ любой элемент из M по модулю централизатора $C(T(b))$ записывается в виде $xe_b + x'e_{3a+b} = \beta(x)$ для некоторых $x, x' \in K$, причем $\beta(1) \in M$. Соотношения

$$0 = \beta(1) * \beta(x) = \pm(x' - xd)e_{3a+2b}, \quad d = 1',$$

дают равенство $x' = xd$, так что M совпадает с идеалом (1.1).

Допустим, что $2K = 0$. Пусть вначале в M существует элемент γ с простым углом a. Тогда произведение $M * e_{2a+b}$ имеет угол $3a + b$, и поэтому в M нет элемента с углом b. Отсюда

$$T(a) \supseteq M = C(M) \supseteq C(T(a)) = L_4, \quad M \supset K(\gamma * e_b) + L_4 \supset Ke_{a+b}.$$

Следовательно, элемент $\gamma \in M$ можно выбрать в виде $\gamma = e_a + ce_{2a+b}$, где $c \in K$. Соотношения $0 = e_{a+b} * \gamma = ce_{3a+b}$ сразу же дают равенства $c = 0$ и $M = Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$.

Если идеал M имеет элемент γ с простым углом b, то аналогично находим включения

$$T(b) \supseteq M = C(M) \supseteq C(T(b)) = L_5, \quad M \supseteq L_5 + K\alpha + K\gamma.$$

Элементы α, γ здесь можно выбрать для некоторых $c, d \in K$ в виде

$$\gamma = e_b + ce_{2a+b} + de_{3a+b}, \quad \alpha = \gamma * e_a = e_{a+b} + ce_{3a+b}.$$

Легко видеть, что подалгебра с базой $\gamma, \gamma * e_a, e_{3a+2b}$ алгебры Ли $NG_2(K)$ является коммутативным идеалом при любом выборе $c, d \in K$. Таким образом, M есть идеал вида (1.2).

В случае идеала M с углом $a + b$ имеем

$$T(a + b) \supseteq M = C(M) \supseteq C(T(a + b)) = L_4.$$

Поэтому M содержит элемент $\alpha = e_{a+b} + de_{2a+b}$ для некоторого $d \in K$. Если M содержит также элемент $\beta = xe_{a+b} + x'e_{2a+b}$ $(x, x' \in K)$, то из соотношения

$$0 = \alpha * \beta = (x' + xd)e_{3a+2b}$$

получаем равенство $x' = xd$ и, следовательно, $M = K(e_{b+a} + de_{b+2a}) + L_4$. Остается заметить, что этот идеал при $d = 0$ лежит в коммутативном идеале с простым углом a.

Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Наибольшая размерность коммутативных идеалов алгебры Ли* $NG_2(K)$ *равна* 4, *когда* K *— поле характеристики* 2 *или* 3, *и равна* 3 *при* $6K = K$. *Такие идеалы исчерпывают идеалы* L_2 *и* (1.1) *при* $3K = 0$, *идеал* $Ke_a + Ke_{b+a} + L_4$ *при* $2K = 0$ *и идеал* L_3 *при* $6K = K$.

Аналогичный подход мы применим в следующем разделе к алгебрам Ли $N\Phi(K)$ типа F_4. В общем случае для исследования гипотезы **(A)** эффективным оказывается использование метода, который А. И. Мальцев применял в исследованиях алгебры Ли $L_\Phi(C)$ и $N\Phi(C)$. Он называет подмножество корней $\Psi \subseteq \Phi$ *коммутативным*, если $r + s \notin \Phi \cup \{0\}$ для любых корней $r, s \in \Psi$ [2]. Е. П. Вдовин [8] обобщает это понятие. Подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ он называет *p-коммутативным* для простого числа p, если в алгебре Ли $N\Phi(K)$ над любым полем K характеристики p имеем $e_r * e_s = 0$ при всех $r, s \in \Psi$.

В [9] подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ названо *нормальным*, если для любого корня $s \in \Psi$ выполняется включение $\{s\}^+ \subseteq \Psi$. Если $p(\Phi) := \max\{(r, r)/(s, s) \,|\, r, s \in \Phi^+\}$ и $p(\Phi)!K = K$ (в частности, когда элементы 2 и 3 обратимы в поле K), понятия p-коммутативности и коммутативности совпадают.

Как и в [11, Lemma 5.3.1], далее используем *регулярное упорядочение корней* $>$; в этом случае из неравенства $\mathrm{ht}(r) > \mathrm{ht}(s)$ следует $r > s$. *Первым углом* произвольного ненулевого элемента $a \in N\Phi(K)$ назовем корень s, если в разложении $a = \sum_{r\in\Phi^+} \lambda_r e_r$ по базе, упорядоченной согласно возрастанию корней, первым ненулевым коэффициентом является λ_s. Множество первых углов всех элементов подмножества $M \subseteq N\Phi(K)$ обозначим через $\mathcal{L}_1(M)$.

Опираясь на методы работ [2; 8], приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Наибольшая размерность коммутативных подалгебр алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p равна наибольшему порядку p-коммутативных множеств корней в Φ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Если M — коммутативная подалгебра алгебры $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p, то множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ является p-коммутативным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если множество $\mathcal{L}_1(M)$ коммутативно, то оно p-коммутативно для любого простого числа p. Поэтому рассмотрим случай, когда существуют корни $s_1, t_1 \in \mathcal{L}_1(M)$ такие, что сумма $s_1 + t_1$ является корнем. Выберем в M элементы α и β с первыми углами s_1 и t_1 соответственно:

$$\alpha = a_1 e_{s_1} + a_2 e_{s_2} + \ldots + a_n e_{s_n}, \quad a_1 \neq 0, \quad \beta = b_1 e_{t_1} + b_2 e_{t_2} + \ldots + b_m e_{t_m}, \quad b_1 \neq 0.$$

Так как $s_1 + t_1$ — наименьший из всевозможных корней $s_i + t_j$, то произведение

$$\alpha * \beta = \sum_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m} a_i b_j (e_{s_i} * e_{t_j})$$

имеет при базисном элементе $e_{s_1+t_1}$ коэффициент $a_1 b_1 N_{s_1,t_1}$. В силу коммутативности подалгебры M произведение $\alpha * \beta$ равно 0. Отсюда $e_{s_1} * e_{t_1} = N_{s_1,t_1} e_{s_1+t_1} = 0$ и $p = |N_{s_1,t_1}|$ — простое число, равное $p = char\ K$. Таким образом, множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ является p-коммутативным.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Размерность подалгебры M алгебры $N\Phi(K)$ равна порядку множества $\mathcal{L}_1(M)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $n = \mid \mathcal{L}_1(M) \mid$; корни $\{r_1, \ldots, r_n\}$, составляющие $\mathcal{L}_1(M)$, располагаем в порядке возрастания. Выберем в M элементы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ так, что при любом i корень r_i есть первый угол элемента a_i. Нам достаточно показать, что элементы a_i образуют базу в M.

Пусть M_i $(1 \leq i < n)$ есть подалгебра в M, которую линейно порождают $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$, и $M_n = 0$. Зафиксируем произвольный элемент $b \in M$. Согласно определению множества $\mathcal{L}_1(M)$ существует и единствен скаляр λ_1 такой, что первый угол элемента $b - \lambda_1 a_1$ больше корня r_1. Более того, пользуясь индукцией, однозначно определяем скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$b - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 \cdots - \lambda_i a_i \in M_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ и $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — база в M.

Лемма доказана.

Теорема 2 непосредственно вытекает из лемм 1 и 2.

Поясним введенные понятия на примере идеалов M из теоремы 1. Множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ здесь нормально только при $M = L_3$ и $M = L_2$, причем в первом случае оно коммутативно, а во втором — 3-коммутативно, как и для идеала (1.1). Для остальных идеалов M из теоремы 1 множество $\mathcal{L}_1(M)$ является p-коммутативным только при $p = 2$.

2. Максимальные коммутативные идеалы алгебры $NF_4(K)$

В этом разделе задача **(Б)** решена для типа F_4. Как и в [15], через $abcd$ обозначаем корень $a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+d\alpha_4$, где α_1, α_2, α_3, α_4 — простые корни системы корней типа F_4.

Перенесением теоремы 5.1 из [9] решение при $2K=K$ устанавливает (см. [14]) следующую теорему.

Теорема 3. *Максимальные коммутативные идеалы алгебры $NF_4(K)$ над полем $K=2K$ исчерпывают идеал $T(1221)+T(0122)$ размерности 9 и идеалы $T(1221)+K(e_{1220}+de_{1122})$, $d\in K$, размерности 8.*

Следствие 2. *Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $NF_4(K)$ над полем K при char $K\neq 2$ исчерпываются идеалом $T(1221)+T(0122)$ размерности 9.*

Заметим, что при $p(\Phi)!K=K$ описания больших абелевых подгрупп группы U и коммутативных идеалов наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ в большинстве случаев совпадают. В общем случае это не так. Например, для случая $\Phi=F_4$, char $K=2$, все большие абелевы подгруппы группы U лежат в U_3, а для соответствующей алгебры $N\Phi(K)$ существуют коммутативные идеалы наибольшей размерности с углом высоты 2.

Исследуем случай $2K=0$. Выделим подалгебры

$$K(e_{1100}+ce_{1122}+de_{1242})+K(e_{1220}+ce_{1242})+Ke_{1110}+Ke_{1111}$$

$$+Ke_{1121}+Ke_{1221}+Ke_{1222}+Ke_{1231}+Ke_{1232}+Ke_{1342}+Ke_{2342},\quad c,d\in K; \tag{2.1}$$

$$K(e_{1110}+ce_{0120}+de_{0121})+K(e_{1111}+ce_{0121})$$

$$+Ke_{1120}+Ke_{1220}+Ke_{1121}+Ke_{1221}+T(1231),\quad c\neq 0; \tag{2.2}$$

$$K(e_{1110}+ce_{0122})+T(1111),\quad c\neq 0; \tag{2.3}$$

$$Ke_{1110}+K(e_{1120}+c_1e_{1122}+c_2e_{1220}+c_3e_{1222})$$

$$+K(e_{1220}+c_1e_{1222})+Ke_{1111}+Ke_{1121}+Ke_{1221}+T(1231),\quad c_1,c_2,c_3\in K; \tag{2.4}$$

$$Ke_{1110}+K(e_{1220}+ce_{1122})+Ke_{1111}+Ke_{1121}+T(1221),\quad c\in K; \tag{2.5}$$

$$Ke_{0120}+Ke_{1120}+Ke_{0121}+Ke_{1220}+Ke_{1121}+Ke_{1221}+T(1231); \tag{2.6}$$

$$K(e_{1120}+ce_{1222})+K(c_1e_{1111}+c_2e_{0121})+Ke_{1220}+Ke_{1121}+Ke_{1221}+T(1231),$$

$$(c_1,c_2)\neq(0,0),\quad c\in K; \tag{2.7}$$

$$K(c_1e_{1111}+c_2e_{0121})+K(d_1e_{0122}+d_2e_{1220})+T(1121),\quad (c_1,c_2)\neq(0,0),\quad (d_1,d_2)\neq(0,0); \tag{2.8}$$

$$K(c_1e_{1111}+c_2e_{0121})+K(d_1e_{1122}+d_2e_{1220})+Ke_{1121}+T(1221),$$

$$(c_1,c_2)\neq(0,0),\quad (d_1,d_2)\neq(0,0); \tag{2.9}$$

$$T(0121). \tag{2.10}$$

Теорема 4. *Максимальные коммутативные идеалы алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики 2 исчерпываются идеалами (2.1)–(2.10).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — максимальный коммутативный идеал. Согласно [14] $M \subseteq T(1100)+T(0120)$. Под r-проекцией множества M будем понимать множество r-проекций всех элементов из M.

Рассмотрим случай, когда $M \nsubseteq L_3$, т. е. M имеет угол 1100. Покажем, что в этом случае $M \subseteq T(1100)$. Если M имеет угол 0120, то множество $M * e_{0001} \subseteq M$ имеет угол 0121 и содержится в $T(1111) + T(0121)$. Множество

$$(M * e_{0010}) * e_{0001} \subseteq M$$

имеет единственный угол 1111, следовательно, множество

$$(M * e_{0001}) * ((M * e_{0010}) * e_{0001})$$

имеет ненулевую 1231-проекцию, что противоречит коммутативности M. Таким образом, $M \subseteq T(1100) + T(0121)$.

Аналогично, если M имеет угол 0121, то множество

$$M * ((M * e_{0010}) * e_{0001})$$

имеет ненулевую 1232-проекцию, что противоречит коммутативности M. Таким образом, $M \subseteq T(1100) + T(0122)$. Наконец, если M имет угол 0122, то множество $(M * e_{0010}) * M$ имеет ненулевую 1232-проекцию. Таким образом, $M \subseteq T(1100)$.

Кроме того, 1120-проекция множества M нулевая, так как в противном случае множество $M*(M*e_{0122})$ будет иметь ненулевую 1342-проекцию, что противоречит коммутативности M.

Заметим, что идеал

$$I = Ke_{1110} + Ke_{1111} + Ke_{1121} + Ke_{1221} + Ke_{1222} + Ke_{1231} + Ke_{1232} + Ke_{1342} + Ke_{2342}$$

централизует M, следовательно, содержится в M в силу его максимальности. Запишем произвольный элемент $a \in M$ в виде

$$a = a_{1100}e_{1100} + a_{1220}e_{1220} + a_{1122}e_{1122} + a_{1242}e_{1242} \mod I.$$

Так как $a*xe_{0120} = xa_{1100}e_{1220}+xa_{1122}e_{1242} \mod I$, $x \in K$, то из соотношения $M*(M*e_{0120}) = 0$ получаем, что $a_{1122} = ca_{1100}$ для некоторого $c \in K$, т. е.

$$M \supseteq K(e_{1220} + ce_{1242}). \tag{2.11}$$

Рассмотрим произвольный элемент $b \in M$ с углом 1220. Запишем его в виде

$$b = b_{1220}e_{1220} + b_{1122}e_{1122} + b_{1242}e_{1242} \mod I.$$

Так как $a * b = (a_{1100}b_{1242} + ca_{1100}b_{1220})e_{2342} = 0$, то $b_{1242} = cb_{1220}$. Тогда $b_{1122} = 0$, поскольку в противном случае, учитывая соотношение (2.11), получаем $M \supseteq Ke_{1122}$, но $Ke_{1122} * K(e_{1220} + ce_{1242}) \neq 0$. Таким образом, M совпадает с идеалом (2.1).

Рассмотрим случай, когда $M \subseteq L_3$ и M имеет угол высоты 3. Пусть M имеет угол 1110. Тогда идеал

$$Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231)$$

централизует M, следовательно, содержится в M в силу его максимальности.

Рассмотрим элемент $a \in M$ вида

$$a = a_{1110}e_{1110} + a_{0120}e_{0120} \mod L_4, \quad a_{1110} \neq 0.$$

Тогда

$$a * e_{0001} = a_{1110}e_{1111} + a_{0120}e_{0121} \mod Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231).$$

Если M содержит элемент $b = b_{0120}e_{0120} \mod L_4$, $b_{0120} \neq 0$, то произведение $(a * e_{0001}) * b$ имеет ненулевую 1231-проекцию. Следовательно, $a_{0120} = ca_{1110}$ для некоторого $c \in K$. Кроме того, в силу коммутативности M имеем $a_{0121} = da_{1110}$ для некоторого $d \in K$.

Предположим, что M имеет еще угол 0120. Тогда при ненулевой 0122-проекции множества M множество $M * (M * e_{1000})$ имеет ненулевую 1242-проекцию, что противоречит коммутативности M. Таким образом, 0122-проекция множества M нулевая. Следовательно,

$$M * Ke_{1000} = Ke_{1120} \mod Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231),$$

откуда в силу коммутативности 1222-проекция (а следовательно, и 1122-проекция) в M нулевые. Таким образом, M совпадает с идеалом (2.2).

Если 0120-проекция в M нулевая, то

$$M \supseteq M * Ke_{0001} \supseteq Ke_{1111} \mod Ke_{1121} + Ke_{1221} + T(1231),$$

откуда в силу коммутативности 0121-проекция в M нулевая. При ненулевой 0122-проекции M совпадает с идеалом (2.3), а при нулевой — с одним из идеалов (2.4) или (2.5).

Если M содержится в $T(0120) + L_4$ и имеет угол 0120, легко показать, что M совпадает с идеалом (2.6).

Пусть $M \subseteq L_4$. Если M имеет угол 1120, то множество $M * e_{0100} \subseteq M$ содержит элемент с единственным углом 1220, следовательно, 1122-проекция в M нулевая и M совпадает с идеалом (2.7).

Наконец, если $M \subseteq T(1111) + T(0121) + T(1220)$, то M совпадает с одним из идеалов (2.8), (2.9) или (2.10).

Теорема доказана.

Следствие 3. *Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $NF_4(K)$ над полем K характеристики* 2 *исчерпываются идеалами* (2.1)–(2.6), (2.8) *и* (2.10) *размерности* 11.

3. Наибольшая размерность коммутативных подалгебр алгебры $N\Phi(K)$

Далее для исследования гипотезы **(A)** ограничимся описанием коммутативных идеалов наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$.

С этой целью в [13] используется специальное матричное представление из [16] алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов. Для типа A_{n-1} ее ассоциируют с алгеброй $NT_n(K)$ нильтреугольных $n \times n$-матриц над K. Обычные матричные единицы e_{ij} здесь составляют базу Шевалле $\{e_r \mid r \in \Phi^+,\ e_r = e_{ij}\}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ после соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$ $(1 \leq j < i \leq n)$.

Алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n, C_n и D_n заданы в [16] базисом из “матричных единиц” e_{iv} с ограничениями $i \leq n$ и, соответственно,

$$-i < v < i, \quad -i \leq v < i \ (v \neq 0), \quad 1 \leq |v| < i.$$

При $e_r = e_{iv}$ полагаем $r = p_{iv}$ и $T(r) = T_{iv}$. Помимо сумм $p_{ij} + p_{jv} = p_{iv}$ (аналогично типу A_{n-1}) к суммам двух корней, являющимся корнем, здесь относят еще $p_{kv} + p_{m,-v} = p_{k,-m}$ при $k > m > |v|$, а для типа C_n — также при $k = m > |v|$. Структурные константы выписаны по теореме Шевалле о базисе [16, лемма 2].

В [13] приведена таблица (см. табл. 1) и установлена следующая теорема.

Теорема 5. *Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ классического типа над полем K исчерпываются идеалами из табл.* 1.

Т а б л и ц а 1

Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ классических типов

Тип $N\Phi(K)$	Коммутативные идеалы наибольшей размерности	Наибольшая размерность
A_{2n-1} $A_{2n},\ \ n>1$ A_2	$T_{n+1,n}$ $T_{n+1,n}$, $T_{n+2,n+1}$ $L_2+K\alpha,\ \ \alpha\notin L_2$	n^2 $n(n+1)$ 2
$B_n,\ 2K=K;\ n=3$ $n>4$ $n=4$	T_{nn-1} $T_{2,-1}+T_{n0}$ $T_{2,-1}+T_{n0}$, T_{nn-1}	5 $\binom{n}{2}+1$
$B_n,\ 2K=0;\ n>2$	T_{10}	$\binom{n+1}{2}$
$B_2=C_2,\ 2K=0$	$L_2+K\alpha,\ \ \alpha\notin L_2$	3
$C_n;\ n>2$ или $2K=K,\ n=2$	$T_{1,-1}$	$\binom{n+1}{2}$
$D_n,\ \ n>4$	$T_{3,-2}+\sum_{m=2}^{n}K(ae_{m1}+be_{m,-1})$, $(a,b)\neq(0,0)$ при $2K=0$ и $(a,b)=(1,0)$ или $(0,1)$ при $2K=K$	$\binom{n}{2}$
$D_4,\ 2K=K$	$T(p_{2,-1})$, $T(p_{21})$, $T(p_{43})$	$\binom{4}{2}$
$D_4,\ 2K=0$	$T_{3,-2}+\sum_{m=2}^{4}K(e_{m1}+ae_{m,-1})$, $T_{2,-1}$ и их автоморфные образы	$\binom{4}{2}$

Т а б л и ц а 2

Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ исключительных типов

Тип $N\Phi(K)$	Коммутативные идеалы наибольшей размерности	Наибольшая размерность
E_6 E_7 E_8	$T_(\alpha_1)$, $T_(\alpha_6)$ $T_(\alpha_7)$ $T(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6)$	16 27 36
$F_4,\ 2K=K$ $F_4,\ 2K=0$	$T(1221)+T(0122)$ идеалы (2.1)–(2.6), (2.8) и (2.10)	9 11
$G_2,\ 6K=K$ $G_2,\ 2K=0$ $G_2,\ 3K=0$	L_3 $Ke_a+Ke_{b+a}+L_4$ L_2, $K(e_b+de_{b+3a})+Ke_{b+a}+Ke_{b+2a}+L_5\ \ (d\in K)$	3 4 4

В следующей теореме приводится описание коммутативных идеалов наибольшей размерности для оставшегося случая $\Phi=E_n$, $n=6,7,8$.

Теорема 6. *Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $NE_6(K)$ исчерпываются идеалами $T(\alpha_1)$, $T(\alpha_6)$ размерности 16, алгебры $NE_7(K)$ — идеалом $T(\alpha_7)$ размерности 27, алгебры $NE_8(K)$ — идеалом $T(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6)$ размерности 36.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Базисные корни систем корней типа E_n обозначим через α_i, $i = 1, \ldots, n$, [15]. Согласно [2] каждая система корней типа E_n имеет нормальное максимальное коммутативное подмножество корней. Для типа E_6 такими подмножествами являются $\{\alpha_1\}^+$ и $\{\alpha_6\}^+$ порядка 16, для типа E_7 это $\{\alpha_7\}^+$ порядка 27, а для типа E_8 это $\{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6\}^+$ порядка 36. Им можно сопоставить коммутативные идеалы соответствующих размерностей: $T(\alpha_1)$, $T(\alpha_6)$, $T(\alpha_7)$ и $T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$.

Покажем, что приведенными выше идеалами исчерпываются все коммутативные идеалы наибольшей размерности. Пусть M — произвольный коммутативный идеал наибольшей размерности подалгебры $N\Phi(K)$ типа $\Phi = E_n$, ρ — максимальный корень системы E_n^+. В случае $n = 6$ и $\mathcal{L}_1(M) = \{\alpha_1\}^+$ в силу соотношения

$$M \supseteq ((M * e_{\alpha_3}) * e_{\alpha_4}) * Ke_{\alpha_2} = Ke_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \mod Ke_\rho$$

и коммутативности M получаем, что $(\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$-проекция в M нулевая, и поэтому $M \subseteq T(\alpha_1)$. Случай $\mathcal{L}_1(M) = \{\alpha_6\}^+$ рассматривается аналогично. Для типа E_7 из соотношения

$$M \supseteq ((((M * e_{\alpha_6}) * e_{\alpha_5}) * e_{\alpha_4}) * e_{\alpha_3}) * Ke_{\alpha_1} = Ke_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7} \mod Ke_\rho$$

получаем, что $(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$-проекция в M является нулевой, и поэтому $M \subseteq T(\alpha_7)$. Для типа E_8 из включения

$$M \supseteq (M * e_{\alpha_7}) * Ke_{\alpha_8} = Ke_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8} \mod Ke_\rho$$

вытекает, что $(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8)$-проекция в M нулевая и $M \subseteq T(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$. Теорема доказана.

Резюмируем полученные результаты в табл. 2.

Гипотезу **(A)** подтверждает следующая теорема.

Теорема 7. *Всякий коммутативный идеал наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является ее коммутативной подалгеброй наибольшей размерности. Коммутативные идеалы наибольшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ над полем K исчерпываются идеалами из табл.* 1 *и табл.* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 для проверки истинности гипотезы **(A)** для алгебры $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p достаточно сравнить наибольшую размерность коммутативных идеалов этой алгебры и наибольший порядок p-коммутативных множеств корней в Φ.

Максимальный порядок коммутативных множеств корней системы типа G_2 равен 3 [2], а 2- и 3-коммутативных множеств корней — 4 [8], что подтверждает гипотезу при $\Phi = G_2$. Максимальный порядок коммутативных множеств корней системы типа F_4 равен 9 [2], а 2-коммутативных множеств корней — 11 [8]. Таким образом, для $\Phi = F_4$ справедливость гипотезы также доказана. Теорема 6 подтверждает гипотезу для типов E_n, с учетом описания максимальных коммутативных множеств корней для соответствующих типов из [2]. Остается заметить, что для классических типов подтверждение гипотезы вытекает из [9; 13].

Теорема доказана.

Для конечных групп G лиева типа почти всегда большие абелевы подгруппы группы U являются G-сопряженными с нормальными подгруппами группы U [9, Theorem 6.5]. Аналогично, для решения обобщенной редукционной задачи достаточно получить список коммутативных подалгебр наибольшей размерности с точностью до автоморфизмов алгебры Шевалле (см. также [17]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schur I.** Zur theorie der vertauschbaren matrizen // J. reine und angew. Math. 1905. Vol. 130. P. 66–76.
2. **Мальцев А.И.** Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1945. Т. 9, № 4. С. 291–300.
3. **Barry M. J.J.** Large Abelian subgroups of Chevalley groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. Vol. 27, no. 1. P. 59–87. doi: 10.1017/S1446788700016645 .
4. **Wong W.J.** Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. 1982. Vol. 32, no. 2. P. 223–245. doi: 10.1017/S1446788700024575 .
5. **Wong W.J.** Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. 1982. Vol. 33, no. 2. P. 331–344. doi: 10.1017/S1446788700018759 .
6. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 57–96.
7. **Вдовин Е.П.** Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 1. С. 53–76.
8. **Вдовин Е.П.** Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 523–544.
9. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349, iss. 1. P. 98–116. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.025 .
10. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups // J. Siberian Federal University. Math. & Physics. 2013. Vol. 6, no. 1. P. 64–74.
11. **Carter R.** Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972. 332 p. ISBN 0-471-13735-9 .
12. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** A problem of large abelian subgroups and the generalized Mal'cev problem // Proc. XII Intern. Conf. "Algebra and number theory". Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та, 2014. С. 108–111. ISBN: 978-5-87954-874-7 ,
13. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii J. Math. 2015. Vol. 86. No. 4. P. 384–388. doi: 10.1134/S1995080215040083 .
14. **Кравцова Е.А.** Максимальные коммутативные идеалы подалгебры NΦ(K) алгебр Ли типа F4 // Молодежь и наука: сб. материалов X Всерос. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Красноярск: Сиб. федеральный ун-т, 2014. ISBN: 978-5-7638-3102-3 .
15. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли (гл. IV–VI). М.: Мир, 1976. 332 с.
16. **Левчук В. М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
17. **Левчук В.М., Литаврин А.В.** Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 467–477.

Кириллова Евгения Алексеевна
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск
e-mail: kea92@bk.ru

Поступила 10.06.2018

Сулейманова Галина Сафиуллановна
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры ПИМиЕД
Хакасский технический институт
(филиал Сибирского федерального университета),
г. Абакан
e-mail: suleymanova@list.ru

REFERENCES

1. Schur I. Zur theorie der vertauschbaren matrizen. *J. reine und angew. Math.*, 1905, vol. 130, pp. 66–76.
2. Mal'tsev A.I. Commutative subalgebras of semi-simple Lie algebras. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 291–300 (in Russian).
3. Barry M.J.J. Large Abelian subgroups of Chevalley groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 1979, vol. 27, no. 1, pp. 59–87. doi: 10.1017/S1446788700016645 .
4. Wong W.J. Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, 1982, vol. 32, no. 2, pp. 223–245. doi: 10.1017/S1446788700024575 .
5. Wong W.J. Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, 1982, vol. 33, no. 2, pp. 331–344. doi: 10.1017/S1446788700018759 .
6. Kondrat'ev A.S. Subgroups of finite Chevalley groups. *Russian Math. Surveys*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 65–118. doi: 10.1070/RM1986v041n01ABEH003203 .
7. Vdovin E.P. Maximal orders of Abelian subgroups in finite Chevalley groups. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3-4, pp. 475–498. doi: 10.1023/A:1010256129959 .
8. Vdovin E.P. Large Abelian unipotent subgroups of finite Chevalley groups. *Algebra and Logic*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 292–305. doi: 10.1023/A:1012549701336 .
9. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type. *J. Algebra*, 2012, vol. 349, no. 1, pp. 98–116. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.025 .
10. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups. *J. Siberian Federal. University. Math. & Physics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 63–73.
11. Carter R. *Simple groups of Lie type.* N Y: Wiley and Sons, 1972. 332 p. ISBN 0-471-13735-9 .
12. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. A problem of large Abelian subgroups and the generalized Mal'cev problem. *Proceed. XII Intern. conf. "Algebra and number theory"*. Tula: Tul'sk. Gos. Ped. Univ. Publ., 2014, pp. 108–111. ISBN: 978-5-87954-874-7 .
13. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. The generalized Mal'cev problem on Abelian subalgebras of the Chevalley algebras. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 384–388. doi: 10.1134/S1995080215040083 .
14. Kravtsova E.A. Maximal commutative ideals of subalgebra NF(K) of Lie algebras of type F4. *Proc. 10th All-Russian Sci. Tech. Conf. "Molodezh' i nauka"* (*Youth and Science*). Krasnoyarsk: Sib Fed. Univ. Publ., 2014 (in Russian). ISBN: 978-5-7638-3102-3 .
15. Bourbaki N. *Groupes et algebres de Lie* (*Chapt. IV–VI*). Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9 . Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li* (*glavy IV–VI*). Moscow: Mir Publ., 1976, 332 p.
16. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups in Chevalley groups. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, no. 3, pp. 211–224. doi: 10.1007/BF01979936 .
17. Levchuk V.M., Litavrin A.V. Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 467–477 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.040 .

The paper was received by the Editorial Office on Juny 10, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00707).

Evgeniya Alekseevna Kirillova, doctoral student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: kea92@bk.ru .

Galina Safiullanovna Suleimanova, Dr. Phys.-Math. Sci., Khakas Technical Institute — Branch of Siberian Federal University, Abakan, 655017 Russia, e-mail: suleymanova@list.ru .