ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17+512.54

О ВЕРШИННО СИММЕТРИЧНОМ ГРАФЕ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$

А. М. Кагазежева

А. А. Махнев и Д. В. Падучих нашли массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 3. А. А. Махнев и М. С. Самойленко добавили в этот список массивы пересечений $\{196, 76, 1; 1, 19, 196\}$ и $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. Однако в графах с такими массивами окрестности вершин не могут быть сильно регулярными. Существование графов с указанными массивами пересечений остается неизвестным. В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек элементов группы автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. Доказано, что вершинно транзитивный дистанционно регулярный граф с указанным массивом пересечений является графом Кэли.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм.

A. M. Kagazezheva. On a vertex-symmetric graph with intersection array $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$.

A. Makhnev and D. Paduchikh found intersection arrays of distance-regular graphs that are locally strongly regular with the second eigenvalue 3. A. Makhnev and M. Samoilenko added to this list the intersection arrays $\{196, 76, 1; 1, 19, 196\}$ and $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. However, graphs with these intersection arrays cannot be locally strongly regular. The existence of graphs with these intersection arrays is unknown. We find possible orders and fixed-point subgraphs for the elements of the automorphism group of a distance-regular graph with intersection array $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. It is proved that a vertex-transitive distance-regular graph with this intersection array is a Cayley graph.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

MSC: 05C25, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-91-97

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа ($k = b_0$), $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечения графа* Γ.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим t. На первом этапе перечисляются массивы пересечений графов, а на втором этапе исследуются автоморфизмы графов с полученными массивами пересечений.

Первый этап решения задачи Кулена для $t = 1$ получен в [1], а для $t = 2$ завершен в [2]. Второй этап решения задачи Кулена для $t \le 2$ завершен в [3; 10].

В работе [5, теорема] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 3. Объявлено завершение второго этапа решения задачи Кулена для $t = 3$ в [6]. В [5, теорема] не попали массивы пересечений $\{196, 76, 1; 1, 19, 196\}$ и $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$ из [7]. Однако окрестности вершин в графах с такими массивами пересечений не могут быть сильно регулярными. Существование дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$ и $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$ без дополнительных ограничений остается неизвестным.

В работе найдены автоморфизмы дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *пересекает* t *антиподальных классов по* s *вершинам. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 37, 47, 59, 67, 103\}$ *и выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, и либо* $p = 103$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) \in \{0, 103, 206\}$, *либо* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 6(3n + 1)$, $\alpha_1(g) = 2(102 - 3n)$, $\alpha_2(g) = 4(102 - 3n)$, *либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 206$;

(2) Ω *является* n*-кликой,* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 206 - n$;

(3) Ω *совпадает с антиподальным классом,* $p = 5$, *и либо* $\alpha_1(g) = 205$, $\alpha_2(g) = 410$, *либо* $\alpha_1(g) = 615$;

(4) $7 < p \le 67$ *и либо*

(i) $p = 67$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$, *либо*

(ii) $p = 59$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{28, 18, 1; 1, 9, 28\}$, *либо*

(iii) $p = 47$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$, *либо*

(iv) $p = 31$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{19, 12, 1; 1, 6, 19\}$ *или* $\{50, 12, 1; 1, 6, 50\}$, *либо*

(v) $p = 29$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{31, 20, 1; 1, 10, 31\}$, *либо*

(vi) $p = 19$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{53, 22, 1; 1, 11, 53\}$, *либо*

(vii) $p = 17$ *и* Ω *— объединение двух антиподальных классов или имеет массив пересечений* $\{35, 34, 1; 1, 17, 35\}$, $\{52, 34, 1; 1, 17, 52\}$, *либо*

(vii) $p = 13$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{23, 6, 1; 1, 3, 23\}$ *или* $t \in \{37, 50, 63\}$, *либо*

(ix) $p = 11$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, $\{18, 4, 1; 1, 2, 18\}$ *или* $t \in \{30, 41, 52, 63\}$, *либо*

(5) $p \le 7$ *и либо*

(i) $p = 7$ *и* $t \in \{27, 24, \dots, 66\}$, *либо*

(ii) $p = 5$ *и* $t \in \{11, 16, \dots, 66\}$, *либо*

(iii) $p = 3$, Ω *— объединение двух антиподальных классов или* $t \in \{8, 11, \dots, 65\}$, *либо*

(iv) $p = 2$, $s = 3$ *и* $t \in \{2, 4, \dots, 68\}$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то* G *содержит нормальную циклическою группу* Z *порядка* 103, *полурегулярную на множестве антиподальных классов графа и* $|G|$ *делит* $206 \cdot 102$. *В частности,* Γ *— граф Кэли.*

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [8, с . 431]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. Тогда Γ имеет $v = 1+205+410+2 = 618 = 6\cdot 103$ вершин и спектр $205^1, \sqrt{205}^{206}, -1^{205}, -\sqrt{205}^{206}$. Порядок клики в Γ не превосходит 15 (ввиду границы Дельсарта он не больше $1 - k/\theta_3 = 1 + \sqrt{205})$).

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа из [9, гл. 3] и на нижепредставленные леммы.

Лемма 1 [10, лемма 2]. *Пусть O_K — кольцо целых алгебраических чисел поля K. Если d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ — соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца O_K равен $(1, (1+\sqrt{d})/2)$, если $d \equiv 1 \pmod 4$ и равен $(1, \sqrt{d})$, если $d \equiv 2, 3 \pmod 4$.*

В случае $d = 205$ имеем базис $(1, (1+\sqrt{205})/2)$.

Следующая лемма позволяет удалить некоторые массивы пересечений, отвечающие дистанционно регулярным накрытиям клик с $\lambda = \mu$.

Лемма 2 [11, теорема 5.4]. *Пусть Γ — дистанционно регулярное r-накрытие $(k+1)$-клики с $\lambda = \mu$. Через n^* обозначим часть натурального числа n, свободную от квадратов. Тогда*

(1) если $k \equiv 1 \pmod 4$ и r четно, то $p \equiv 1 \pmod 4$ для любого нечетного простого числа p, делящего k^*;

(2) если k четно, то $(-1)^{(r-1)/2}r$ — квадрат по модулю p для любого нечетного простого числа p, делящего k^*.

Лемма 3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 206, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 205. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = [2\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + \sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/3 - 1$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 205$ делится на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 206 & 206\sqrt{205}/205 & -103\sqrt{205}/205 & -103 \\ 205 & -1 & -1 & 205 \\ 206 & -206\sqrt{205}/205 & 103\sqrt{205}/205 & -103 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = [2\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + \sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$.

Аналогично $\chi_2(g) = [205\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 205\alpha_3(g)]/618$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 618 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/3 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [12].

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Замечание. Если g фиксирует антиподальный класс K и $a \in \Omega$, то K пересекает Ω, а если Ω пересекает антиподальные классы K, L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \le |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \le |K \cap \Omega|$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 103$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) \in \{0, 103, 206\}$, *либо* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 6(3n+1)$, $\alpha_1(g) = 6(34-n)$, $\alpha_2(g) = 12(34-n)$, *либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 206$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 206 - n$;

(3) *если* Ω *содержится в антиподальном классе, то* $p = 5$, $s = 3$, *либо* $\alpha_1(g) = 205$, $\alpha_2(g) = 410$, *либо* $\alpha_1(g) = 615$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — пустой граф. Так как $618 = 6 \cdot 103$, то $p = 2, 3, 103$.

Если $p = 103$, то $\alpha_3(g) = 0$, по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = [\sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$, ввиду леммы 1 $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ делится на 103 и либо $\alpha_1(g) = 0$, либо $\alpha_1(g) = 103$, либо $\alpha_1(g) = 206$.

Если $p = 3$, то $\alpha_3(g) = 3l$, число $\chi_2(g) = l - 1$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $l = 3m+2$. Далее, $\chi_1(g) = [-3(3m+2) + \sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ или $2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 615$, соответственно m четно или m нечетно. В последнем случае $\alpha_1(g) = 411 - l$ не делится на 3, противоречие.

Если $p = 2$, то с учетом равенства $p^3_{22} = 205$ (прямые вычисления, см. [8, лемма 4.1.7]) имеем $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = [\sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$, поэтому $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 206$.

Пусть Ω является n-кликой, $a \in \Omega$. Тогда g действует без неподвижных точек на $F - \{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a, поэтому $p = 2$.

Если $n = 1$, то g действует без неподвижных точек на $[a]$, противоречие.

Если $n > 1$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 0 или четным числом вершин из Ω и $\alpha_3(g) = 2n$. Далее, $\chi_1(g) = [\sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$, поэтому $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 206 - n$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F. Тогда p делит $3 - s$ и 205, поэтому $p = 5$. Далее, $s = 3$, $\chi_1(g) = [6 + \sqrt{205}(2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/205]/6$, поэтому либо $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$, либо $2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 205 \cdot 6$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $p \geq 11$, *то выполняется одно из утверждений*:

(1) $p = 67$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$;

(2) $p = 59$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{28, 18, 1; 1, 9, 28\}$;

(3) $p = 47$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$;

(4) $p = 31$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{19, 12, 1; 1, 6, 19\}$ *или* $\{50, 12, 1; 1, 6, 50\}$;

(5) $p = 29$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{31, 20, 1; 1, 10, 31\}$;

(6) $p = 19$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{53, 22, 1; 1, 11, 53\}$;

(7) $p = 17$ *и* Ω *— объединение двух антиподальных классов или имеет массив пересечений* $\{35, 34, 1; 1, 17, 35\}$, $\{52, 34, 1; 1, 17, 52\}$;

(8) $p = 13$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{23, 6, 1; 1, 3, 23\}$ *или* $t \in \{37, 50, 63\}$;

(9) $p = 11$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, $\{18, 4, 1; 1, 2, 18\}$ *или* $t \in \{30, 41, 52, 63\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$. Если $p \geq 3$, то $s = 3$ и вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω.

Если $p > 67$, то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leq 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t-1, 136, 1; 1, 68, t-1\}$, противоречие.

В случае $p = 67$ имеем $t = 5$ и Ω имеет массив пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$.

В случае $p = 61$ имеем $t = 23$ и Ω имеет массив пересечений $\{22, 14, 1; 1, 7, 22\}$, противоречие с леммой 2 (k четно, $(-1)^{(r-1)/2}r = -1$ — не квадрат по модулю 11).

В случае $p = 59$ имеем $t = 29$ и Ω имеет массив пересечений $\{28, 18, 1; 1, 9, 28\}$.

В случае $p = 53$ имеем $t = 47$ и Ω имеет массив пересечений $\{46, 30, 1; 1, 15, 46\}$, противоречие с леммой 2 (k четно, $(-1)^{(r-1)/2}r = -3$ — не квадрат по модулю 23).

В случае $p = 47$ имеем $t \in \{18, 65\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$.

В случае $p = 43$ имеем $t = 34$ и Ω имеет массив пересечений $\{33, 50, 1; 1, 25, 33\}$, противоречие с тем, что $b_1 > k$.

В случае $p = 41$ имеем $t = 42$ и Ω имеет массив пересечений $\{41, 54, 1; 1, 27, 41\}$, противоречие с тем, что $b_1 > k$.

В случае $p = 37$ имеем $t \in \{21, 58\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{57, 62, 1; 1, 31, 57\}$, противоречие с тем, что $b_1 > k$.

В случае $p = 31$ имеем $t \in \{20, 51\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{19, 12, 1; 1, 6, 19\}$ или $\{50, 12, 1; 1, 6, 50\}$.

В случае $p = 29$ имеем $t \in \{3, 32, 61\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{31, 20, 1; 1, 10, 31\}$ или $\{60, 20, 1; 1, 10, 60\}$. Во втором случае имеем противоречие с леммой 2 (k четно, $(-1)^{(r-1)/2}r = -3$ — не квадрат по модулю 5).

В случае $p = 23$ имеем $t \in \{22, 45\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{44, 44, 1; 1, 22, 44\}$, противоречие с тем, что $b_1 = k$.

В случае $p = 19$ имеем $t \in \{16, 35, 54\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{34, 22, 1; 1, 11, 34\}$, $\{53, 22, 1; 1, 11, 53\}$. В первом случае имеем противоречие с леммой 2 (k четно, $(-1)^{(r-1)/2}r = -3$ — не квадрат по модулю 17).

В случае $p = 17$ получаем $t \in \{2, 19, 36, 53\}$ и Ω — объединение двух антиподальных классов или имеет массив пересечений $\{35, 34, 1; 1, 17, 35\}$, $\{52, 34, 1; 1, 17, 52\}$.

В случае $p = 13$ получаем $t \in \{11, 24, 37, 50, 63\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{10, 6, 1; 1, 3, 10\}$, $\{23, 6, 1; 1, 3, 23\}$ или $t \in \{37, 50, 63\}$. В первом случае k четно, $(-1)^{(r-1)/2}r = -3$ — не квадрат по модулю 5, противоречие с леммой 2.

В случае $p = 11$ получаем $t \in \{8, 19, 30, 41, 52, 63\}$ и Ω имеет массив пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, $\{18, 4, 1; 1, 2, 18\}$ или $t \in \{30, 41, 52, 63\}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $p \le 7$, то выполняется одно из утверждений*:
(1) $p = 7$ *и* $t \in \{27, 24, \ldots, 66\}$;
(2) $p = 5$ *и* $t \in \{11, 16, \ldots, 66\}$;
(3) $p = 3$, *либо* Ω — *объединение двух антиподальных классов, либо* $t \in \{8, 11, \ldots, 65\}$;
(4) $p = 2$, $s = 3$ *и* $t \in \{2, 4, \ldots, 68\}$.

Доказательство. В случае $p = 7$ получаем $t \in \{10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66\}$. Если $t = 10$, то Ω имеет массив пересечений $\{11, b_1, 1; 1, 7, 11\}$, противоречие.

В случае $p = 5$ получаем $t \in \{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66\}$. Если $t = 6$, то Ω имеет массив пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, противоречие.

В случае $p = 3$ получаем $t \in \{2, 5, 8, \ldots, 68\}$. Если $t = 2$, то Ω — объединение двух антиподальных классов. Если $t = 5$, то Ω имеет массив пересечений $\{6, 4, 1; 1, 2, 6\}$, противоречие. В случае $t = 68$ получаем $\alpha_1(g) = 0$, $\chi_1(g) = 68 - \sqrt{205}(103 - 68)/205$, противоречие.

Пусть $p = 2$. Тогда $s = 3$ и $t \in \{2, 4, \ldots, 68\}$. Лемма доказана.

Из лемм 4–6 следует теорема. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 7. *Пусть f — элемент порядка* 103 *из G. Если g — элемент простого порядка $p < 103$ из $C_G(f)$, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $p = 2$, Ω — пустой граф, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 206$.*

Доказательство. По теореме 1 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_3(f) = 0$ и $\alpha_1(f) \in \{0, 103, 206\}$.

Если Ω — пустой граф, то либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 6(3n+1)$ делится на 103 и $n = 34$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 206$. Но в случае $p = 3$ группа $\langle g\rangle$ действует регулярно на любом антиподальном классе и по [11, теорема 9.2] число $p = 3$ должно делить $k + 1 = 206$, противоречие.

Если же Ω — непустой граф, то t делится на 103, противоречие. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть неразрешимая группа G действует транзитивно на множестве вершин, F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a. Тогда $|G : G_{\{F\}}| = 206$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, $Q = O_2(G)$, Σ — множество отличных от F антиподальных классов и f — элемент порядка 103 из G.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) $S(G)$ *является* $\{2,3\}$-*группой*;
(2) *группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(103)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $v = 6 \cdot 103$, то ввиду леммы 4 разрешимый радикал $S(G)$ является $\{2,3\}$-группой.

Ввиду теоремы 1 $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,13,17,19,29,31,37,47,59,67,103\}$ и $\bar{T}$ — простая неабелева группа. Ввиду [13, табл. 2, 3] (с учетом того, что $|G|$ не делится на 47^2 и на 103^2) группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(103)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. По лемме 8 имеем $\bar{T} \cong L_2(103)$. Но группа $L_2(103)$ не содержит подгрупп индекса, делящего 206, противоречие. Ввиду леммы 7 цоколь T группы G является циклической группой порядка 206, регулярной на множестве антиподальных классов графа. В этом случае $|G|$ делит $206 \cdot 102$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карданова М.Л., Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин являются графами, дополнительными к графу Зейделя // Докл. РАН 2010. Т. 434, № 4. С. 447–449.
2. **Белоусов И.Н., Махнев А.А., Нирова М.С.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 2 // Докл. РАН 2012. Т. 447, № 5. С. 475–478.
3. **Гаврилюк А.Л., Го Вэнбинь, Махнев А.А.** Об автоморфизмах графов Тервиллигера с $\mu = 2$ // Алгебра и логика 2008. Т. 47, № 5. С. 584–600.
4. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{81,60,1;1,20,81\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 435, № 3. С. 305–309.
5. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно-регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. РАН 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400.
6. **Махнев А.А., Шерметова М.Х.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{96,76,1;1,19,96\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 167–174. doi: 10.17377/semi.2018.15.016 .
7. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** О дистанционно регулярных накрытиях клик с сильно регулярными окрестностями вершин // Современные проблемы математики: тр. 46-й международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 2015. С. 13–18.
8. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Springer-Verlag, 1989. 495 p.
9. **Cameron P.** Permutation Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
10. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О группе автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$ // Алгебра и логика 2012. Vol. 51, № 4. С. 476–495.
11. **Godsil C.D., Henzel A.D.** Distance-regular covers of the complete graphs // J. Comb. Theory, ser. B. 1992. Vol. 56, iss. 2. P. 205–238. doi: 10.1016/0095-8956(92)90019-T .
12. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. РАН. 2010. Vol. 432, № 5. С. 583–587.
13. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Кагазежева Алена Мухамедовна Поступила 21.05.2018
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель
Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, г. Нальчик
e-mail: fkagazezhev@mail.ru

REFERENCES

1. Kardanova M.L., Makhnev A.A. On graphs in which the neighborhood of each vertex is the complementary graph of a Seidel graph. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 82, no. 2, pp. 762–764. doi: 10.1134/S1064562410050212 .
2. Belousov I.N., Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular extensions of strongly regular graphs with eigenvalue 2 *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 816–819. doi: 10.1134/S1064562412060257 .
3. Gavrilyuk A. L., Guo Wenbin, Makhnev A.A. Automorphisms of Terwilliger graphs with $\mu = 2$. *Algebra and Logic*, 2008, vol. 47, iss. 5, pp. 330–339. doi: 10.1007/s10469-008-9024-y .
4. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 82, no. 3, pp. 905–908. doi: 10.1134/S1064562410060177 .
5. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Distance regular graphs in which local subgraphs are strongly regular graphs with the second eigenvalue at most 3. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, no. 2, pp. 568–571. doi: 10.1134/S1064562415050191 .
6. Makhnev A.A., Shermetova M. Kh. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$. *Sib. Eektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 167–174. doi: 10.17377/semi.2018.15.016 .
7. Makhnev A.A., Samoilenko M.S. On distance-regular covers of cliques with strongly regular neighborhoods of vertices. *Modern problems of mathematics and its applications*: Proc. 46th Int. Youth School-Conf., Ekaterinburg, 2015, pp. 13–18 (in Russian).
8. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin: Springer-Verlag, 1989, 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2 .
9. Cameron P. *Permutation groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 220 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
10. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. An automorphism group of a distance-regular graph with intersection array $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$. *Algebra Logic*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 319-332. doi: 10.1007/s10469-012-9194-5 .
11. Godsil C.D., Henzel A.D. Distance-regular covers of the complete graphs. *J. Comb. Theory*, Ser. B, 1992, vol. 56, iss. 2, pp. 205–238. doi: 10.1016/0095-8956(92)90019-T .
12. Gavrilyuk A.L., Makhnev, A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
13. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sibirean Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on May 21, 2018.

Alena Mukhamedovna Kagazezheva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: fkagazezhev@mail.ru .