ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ[1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. В “Коуровской тетради” А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. Хаги и М. А. Звездина получили такое описание в случае, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор решил этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $G = A^{\pm}_{n-1}(q)$, где $n \in \{3,4,5,6\}$, и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем порядка q_1, где $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений*:* (1) $\{G,G_1\} = \{A_1(7), A_1(8)\}$; (2) $\{G,G_1\} = \{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$; (3) $\{G,G_1\} = \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$; (4) $\{G,G_1\} = \{A_2(q), {}^3D_4(q_1)\}$, где $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 \neq 2^k$ и $q_1 > 2$; (5) $\{G,G_1\} = \{A^{\varepsilon}_4(q), A^{\varepsilon_1}_4(q_1)\}$, где qq_1 нечетно; (6) $\{G,G_1\} = \{A^{\varepsilon}_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, где $(q-\epsilon 1)_5 \neq 5$ и $q_1 > 2$; (7) $G = A^{\varepsilon}_5(q)$, $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$.

Ключевые слова: конечная простая группа лиева типа, граф простых чисел, спектр.

M. R. Zinov’eva. On finite simple linear and unitary groups of small size over fields of different characteristics with coinciding prime graphs.

Suppose that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. A graph with the following adjacency relation is defined on $\pi(G)$: different vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of G and is denoted by $GK(G)$. In A. V. Vasil’ev’s Question 16.26 from the “Kourovka Notebook,” it is required to describe all pairs of nonisomorphic simple nonabelian groups with identical Gruenberg–Kegel graphs. M. Hagie and M. A. Zvezdina gave such a description in the case where one of the groups coincides with a sporadic group and an alternating group, respectively. The author solved this question for finite simple groups of Lie type over fields of the same characteristic. In the present paper we prove the following theorem.

Theorem. Let $G = A^{\pm}_{n-1}(q)$, where $n \in \{3,4,5,6\}$, and let G_1 be a finite simple group of Lie type over a field of order q_1 nonisomorphic to G, where $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, and p and p_1 are different primes. If the graphs $GK(G)$ and $GK(G_1)$ coincide, then one of the following statements holds:

(1) $\{G,G_1\} = \{A_1(7), A_1(8)\}$;

(2) $\{G,G_1\} = \{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$;

(3) $\{G,G_1\} = \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$;

(4) $\{G,G_1\} = \{A_2(q), {}^3D_4(q_1)\}$, where $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 \neq 2^k$, and $q_1 > 2$;

(5) $\{G,G_1\} = \{A^{\varepsilon}_4(q), A^{\varepsilon_1}_4(q_1)\}$, where qq_1 is odd;

(6) $\{G,G_1\} = \{A^{\varepsilon}_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, where $(q-\epsilon 1)_5 \neq 5$ and $q_1 > 2$;

(7) $G = A^{\varepsilon}_5(q)$ and $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$.

Keywords: finite simple group of Lie type, prime graph, Gruenberg–Kegel graph, spectrum.

MSC: 05C25, 20D05, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-73-90

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 18-1-1-17, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности, Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006.

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В “Коуровской тетради” [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случае, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор решил этот вопрос в 2014 г. для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В случае конечных простых групп лиева типа разных характеристик в 2016 г. получена теорема редукции. В 2017 г. автором исследованы две конечные простые группы лиева типа G и G_1 над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \geq 5$, причем одна из групп является линейной группой. Тем самым уточнен первый пункт теоремы редукции.

В данной работе рассмотрены две конечные простые группы лиева типа G и G_1 над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \leq 3$, причем одна из групп является линейной или унитарной группой.

Далее $q = p^f$ и $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа.

Мы рассматриваем только простые группы. Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ через $A_{n-1}^{\varepsilon}(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$, через $D_n^{\varepsilon}(q)$ обозначается $D_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2D_n(q)$ при $\varepsilon = -$.

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [4–7], мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $G = A_{n-1}^{\varepsilon}(q)$, где $n \in \{3,4,5,6\}$, и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем порядка q_1, где $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, p и p_1 — различные простые числа, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{A_1(7), A_1(8)\}$;
(2) $\{G, G_1\} = \{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$;
(3) $\{G, G_1\} = \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$;
(4) $\{G, G_1\} = \{A_2(q), {}^3D_4(q_1)\}$, *где* $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 \neq 2^k$ *и* $q_1 > 2$;
(5) $\{G, G_1\} = \{A_4^{\varepsilon}(q), A_4^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, *где* qq_1 *нечетно*;
(6) $\{G, G_1\} = \{A_4^{\varepsilon}(q), {}^3D_4(q_1)\}$, *где* $(q-\epsilon 1)_5 \neq 5$ *и* $q_1 > 2$;
(7) $G = A_5^{\varepsilon}(q)$, $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$.

З а м е ч а н и е. Автору известны следующие пары конечных простых групп лиева типа $\{G, G_1\}$ над полями разных характеристик с одинаковым графом простых чисел: $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, $\{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$, $\{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$, $\{A_1(13), G_2(3)\}$.

Гипотеза. *Указанные в замечании пары исчерпывают все неизоморфные пары конечных простых групп лиева типа, заданные над полями разных характеристик, с одинаковым графом простых чисел.*

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [4; 5] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [6; 7] получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел каждой конечной простой неабелевой группы.

Индуцированный подграф называется *кокликой* графа, если его вершины попарно несмежны. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной по включению кокликой* будем называть коклику, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q,G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Согласно [7, определения 3.3–3.8] определяются подмножества $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ множества $\pi(G)$. Если $G = A_2^{\varepsilon}(q)$, то $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ определяются согласно [7, определения 3.3–3.7]. Если $G \neq A_2^{\varepsilon}(q)$, то согласно [7, определение 3.8], через $\theta(G)$ обозначается пересечение всех коклик максимального размера графа $GK(G)$, а через $\Theta(G)$ — множество $\{\theta(G)\}$. Множество $\Theta'(G)$ состоит из всех подмножеств $\theta'(G)$ из $\pi(G) \setminus \theta(G)$, для которых $\theta(G) \cup \theta'(G)$ — коклика максимального размера в графе $GK(G)$.

Лемма 1 (теорема Жигмонди [8]). *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число r, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$. Если r существует, то $r \equiv 1 \pmod n$.*

Согласно [6] если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod 4$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod 4$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n.

Для натурального числа n через n_p обозначается его p-часть.

Используя результаты [4–7], составим следующие табл. 1 и 2.

Таблица 1

Конечные простые группы G лиева типа над полем характеристики 2 с $t(G) \leq 3$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
${}^2A_3(2)$		2	2	2	$\{5\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
$C_2(q)$	$q > 2$	2	2	2	$\{r_4\}$	$\{2\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\}$
$C_3(2)$		2	2	2	$\{7\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
$D_4(2)$		2	2	2	$\{7\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
${}^3D_4(2)$		2	2	2	$\{13\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{7\}$
$A_5(2)$		2	3	2	$\{5,7,31\}$	$\varnothing$
$A_6(2)$		2	3	2	$\{31,127\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
$C_4(2)$		2	3	2	$\{5,7,17\}$	$\varnothing$
${}^3D_4(q)$	$q > 2$	2	3	2	$\{r_3,r_6,r_{12}\}$	$\varnothing$
${}^2F_4(2)'$		2	3	2	$\{3,5,13\}$	$\varnothing$
$A_3(4)$		3	3	1	$\{2,7,17\}$	$\varnothing$
$A_3(q)$	$q > 4$	3	3	1	$\{2,r_3,r_4\}$	$\varnothing$
$A_5(q)$	$q > 2$, $(q-1)_3 \neq 3$	3	3	1	$\{r_5\}$	$\{2,r_6\}$, $\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_6\}$
$A_5(q)$	$q > 4$, $(q-1)_3 = 3$	3	3	1	$\{r_5\}$	$\{2,r_6\}$, $\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_6\}$, $\{3,r_6\}$
${}^2A_3(4)$		3	3	1	$\{2,13,17\}$	$\varnothing$
${}^2A_3(8)$		3	3	1	$\{2,19,r_4\}$	$\varnothing$
${}^2A_3(q)$	$q > 8$	3	3	1	$\{2,r_4,r_6\}$	$\varnothing$
${}^2A_5(q)$	$(q+1)_3 \neq 3$	3	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{2,r_3\}$, $\{r_6,r_4\}$, $\{r_4,r_3\}$
${}^2A_5(q)$	$q > 2$,$(q+1)_3 = 3$	3	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{2,r_3\}$, $\{r_6,r_4\}$, $\{r_4,r_3\}$, $\{3,r_3\}$
$C_3(4)$		3	3	1	$\{7,13\}$	$\{2\}$,$\{17\}$
$C_3(8)$		3	3	1	$\{19,73\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$C_3(q)$	$q > 8$	3	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$D_4(4)$		3	3	1	$\{7,13\}$	$\{2\}$,$\{17\}$

Продолжение табл. 1

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$D_4(8)$		3	3	1	$\{19,73\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$D_4(q)$	$q>8$	3	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$A_2(8)$		3	3	2	$\{2,3,73\}$	$\varnothing$
$A_2(q)$	$q>8,\ (q-1)_3\neq 3$	3	3	2	$\{2,r_2,r_3\}$	$\varnothing$
$A_3(2)$		3	3	2	$\{2,5,7\}$	$\varnothing$
$A_4(q)$	$(q-1)_5\neq 5$	3	3	2	$\{r_4,r_5\}$	$\{2\}$,$\{r_3\}$
$A_4(q)$	$(q-1)_5=5$	3	3	2	$\{r_4,r_5\}$	$\{2\}$,$\{5\}$,$\{r_3\}$
$A_5(4)$		3	3	2	$\{r_5\}$	$\{2,13\}$, $\{7,17\}$, $\{13,17\}$, $\{3,13\}$
$A_7(2)$		3	3	2	$\{127\}$	$\{2,17\}$, $\{17,31\}$, $\{7,17\}$, $\{5,31\}$
$^2A_2(8)$		3	3	2	$\{2,7,19\}$	$\varnothing$
$^2A_2(q)$	$q\neq 8,(q+1)_3\neq 3$	3	3	2	$\{2,r_1,r_6\}$	$\varnothing$
$^2A_4(2)$		3	3	2	$\{2,5,11\}$	$\varnothing$
$^2A_4(q)$	$q>2,\ (q+1)_5\neq 5$	3	3	2	$\{r_4,r_{10}\}$	$\{2\}$,$\{r_6\}$
$^2A_4(q)$	$(q+1)_5=5$	3	3	2	$\{r_4,r_{10}\}$	$\{2\}$,$\{5\}$,$\{r_6\}$
$^2D_4(2)$		3	3	2	$\{7,17\}$	$\{2\}$,$\{5\}$
$^2D_5(2)$		3	3	2	$\{11,17\}$	$\{2\}$,$\{5\}$,$\{7\}$
$G_2(4)$		3	3	2	$\{7,13\}$	$\{2\}$,$\{5\}$
$G_2(8)$		3	3	2	$\{19,73\}$	$\{2\}$,$\{7\}$
$G_2(q)$	$q\neq 4,\ q\equiv 1 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_2\}$,$\{r_1\neq 3\}$
$G_2(q)$	$q\neq 8,\ q\equiv 2 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\neq 3\}$
$A_1(q)$	$q>3$	3	3	3	$\{2,r_1,r_2\}$	$\varnothing$
$A_2(2)$		3	3	3	$\{2,3,7\}$	$\varnothing$
$^2A_5(2)$		3	3	3	$\{7,11\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$

Т а б л и ц а 2

Конечные простые группы G лиева типа над полем нечетной характеристики p с $t(G)\leq 3$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	$\Theta'(G)$
$A_2(3)$		2	2	2	$\{13\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
$C_2(3)$		2	2	2	$\{5\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
$^2A_2(3)$		2	2	2	$\{7\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
$^2A_2(9)$		2	2	2	$\{73\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
$C_2(q)$	$q>3$	2	2	2	$\{r_4\}$	$\{p\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\}$
$A_2(q)$	$(q-1)_3\neq 3,\ q+1=2^k>4$	2	2	2	$\{r_3\}$	$\{p\}$,$\{r_1\}$,$\{2=r_2\}$
$^2A_2(q)$	$(q+1)_3\neq 3, q-1=2^k>8$	2	2	2	$\{r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_2\}$,$\{2=r_1\}$
$A_3(q)$	$q>3,(q-1)_2\neq 4$	2	3	1	$\{p,r_3,r_4\}$	$\varnothing$
$^2A_3(q)$	$(q+1)_2\neq 4$	2	3	1	$\{p,r_4,r_6\}$	$\varnothing$
$B_3(q),C_3(q)$	$q>3$	2	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_4\}$
$D_4(q)$	$q>3$	2	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_4\}$
$A_5(q)$	$q>3,(q-1)_3\neq 3$	2	3	1	$\{r_5\}$	$\{p,r_6\},\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_6\}$
$^2A_5(q)$	$(q+1)_3\neq 3$	2	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{p,r_3\},\{r_6,r_4\}$, $\{r_4,r_3\}$
$A_5(q)$	$q>7,(q-1)_3=3$	2	3	1	$\{r_5\}$	$\{p,r_6\},\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_6\},\{3,r_6\}$
$^2A_5(q)$	$q\neq 5,(q+1)_3=3$	2	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{p,r_3\},\{r_6,r_4\}$, $\{r_4,r_3\},\{3,r_3\}$
$A_2(q)$	$(q-1)_3=3,q+1=2^k$	2	3	2	$\{3,p,r_3\}$	$\varnothing$
$^2A_2(q)$	$(q+1)_3=3,q-1=2^k$	2	3	2	$\{3,p,r_6\}$	$\varnothing$
$A_2(q)$	$(q-1)_3\neq 3,q+1\neq 2^k$	2	3	2	$\{p,r_2\neq 2,r_3\}$	$\varnothing$
$^2A_2(q)$	$(q+1)_3\neq 3,q-1\neq 2^k$	2	3	2	$\{p,r_1\neq 2,r_6\}$	$\varnothing$
$A_3(3)$		2	3	2	$\{3,5,13\}$	$\varnothing$
$^3D_4(q)$		2	3	2	$\{r_3,r_6,r_{12}\}$	$\varnothing$

Продолжение табл. 2

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	$\Theta'(G)$
$B_3(3), C_3(3)$		2	3	2	{7,13}	{3},{5}
$D_4(3)$		2	3	2	{7,13}	{3},{5}
$A_4(q)$	$(q-1)_5 \neq 5$	2	3	2	$\{r_4, r_5\}$	$\{p\}$,$\{r_3\}$
$^2A_4(q)$	$(q+1)_5 \neq 5$	2	3	2	$\{r_4, r_{10}\}$	$\{p\}$,$\{r_6\}$
$A_4(q)$	$(q-1)_5 = 5$	2	3	2	$\{r_4, r_5\}$	$\{5\}$,$\{p\}$,$\{r_3\}$
$^2A_4(q)$	$(q+1)_5 = 5$	2	3	2	$\{r_4, r_{10}\}$	$\{5\}$,$\{p\}$,$\{r_6\}$
$A_5(3)$		2	3	2	{11}	{3,7},{5,13}, {5,7}
$A_5(7)$		2	3	2	{2801}	{7,43},{5,19}, {5,43},{3,43}
$^2A_5(5)$		2	3	2	{521}	{5,31},{7,13}, {13,31},{3,31}
$A_3(q)$	$q > 5, (q-1)_2 = 4$	3	3	1	$\{r_3, r_4\}$	$\{p\}$,$\{2\}$
$^2A_3(q)$	$q \neq 3$, $(q+1)_2 = 4$	3	3	1	$\{r_4, r_6\}$	$\{p\}$,$\{2\}$
$A_3(5)$		3	3	2	{13,31}	{2}, {5}
$G_2(q)$	$q \equiv 1 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3, r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_2\}$,$\{r_1 \neq 3\}$
$G_2(q)$	$q \equiv 2 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3, r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2 \neq 3\}$
$A_1(q)$	$q > 3$	3	3	3	$\{p, r_1, r_2\}$	$\varnothing$
$^2A_3(3)$		3	3	3	{5, 7}	{2}, {3}
$G_2(3)$		3	3	3	{7,13}	{2}, {3}
$G_2(q)$	$q = 3^m > 3$	3	3	3	$\{r_3, r_6\}$	$\{3\}$,$\{r_1\}$, $\{r_2\}$

Лемма 2 (Героно [9]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Лемма 3 (Кресчензо [10]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^m - 2q^n = \pm 1$ для некоторых натуральных чисел m, n больших 1. Тогда пара $(p^m,\ q^n)$ равна $(3^5,\ 11^2)$, $(239^2,\ 13^4)$ или $(p^2,\ q^2)$.*

Лемма 4 [11, лемма 6(iii)]. *Пусть a, s, t — натуральные числа. Тогда*

(a) $(a^s - 1, a^t - 1) = a^{(s,t)} - 1$,

(b) $(a^s + 1, a^t + 1) = \begin{cases} a^{(s,t)} + 1, & \text{если } s/(s,t) \text{ и } t/(s,t) \text{ нечетны,} \\ (2, a+1), & \text{иначе,} \end{cases}$

(c) $(a^s - 1, a^t + 1) = \begin{cases} a^{(s,t)} + 1, & \text{если } s/(s,t) \text{ четно и } t/(s,t) \text{ нечетно,} \\ (2, a+1), & \text{иначе.} \end{cases}$

Лемма 5. *Пусть $q = p^f$, где p — простое число, m, n — натуральные числа.*

(1) Если $\pi(p^m - 1) = \pi(p^n - 1)$, то либо $m = n$, либо $(m,n) \in \{(1,2),(2,1)\}$ и $p = 2^s - 1$, где s — простое число.

(2) Если $\pi(p^m - 1) = \pi(p^n + 1)$, то либо $p = 3$ и $(m,n) \in \{(1,1),(4,2)\}$, либо $p = 2^{2^l} + 1$ и $(m,n) = (2,1)$.

(3) Если $\pi(p^m + 1) = \pi(p^n + 1)$, то $m = n$.

Доказательство. (1) Предположим, что $m \neq n$. Если $m = 1$ и $(n,p) \neq (2, 2^s - 1)$, то по лемме 1 существует простое число $t \in \pi(p^n - 1) \setminus \pi(p^m - 1)$; противоречие. Если $n = 1$ и $(m,p) \neq (2, 2^s - 1)$, то по лемме 1 существует простое число $t_1 \in \pi(p^m - 1) \setminus \pi(p^n - 1)$; противоречие. Если $m > n \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t_2 \in \pi(p^m - 1) \setminus \pi(p^n - 1)$; противоречие. Если $n > m \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t_3 \in \pi(p^n - 1) \setminus \pi(p^m - 1)$; противоречие.

(2) Пусть $(m,n) = (1,1)$. Тогда $\pi(p-1) = \pi(p+1)$. Если $p \neq 2^s - 1$, то по лемме 1 существует простое число $t \in \pi(p+1) \setminus \pi(p-1)$; противоречие. Если $p \neq 2^{2^l} + 1$, то существует простое

число $t \in \pi(p-1)\setminus\pi(p+1)$; противоречие. Если $p = 2^s-1 = 2^{2^l}+1$, то $p = 3$. Если $(m,n) = (2,1)$ и $p \neq 2^{2^l}+1$, то по лемме 1 существует простое число $t_1 \in \pi(p^2-1)\setminus\pi(p+1)$; противоречие. Если $n = 1$ и $m \geq 3$, то по лемме 1 существует простое число $t_2 \in \pi(p^m-1)\setminus\pi(p^n+1)$; противоречие.

Если $n = 2$ и $m \leq 3$, то по лемме 1 существует простое число $t_3 \in \pi(p^n+1)\setminus\pi(p^m-1)$; противоречие. Предположим, что $(m,n) = (4,2)$. Тогда $\pi(p^4-1) = \pi(p^2+1)$, поэтому $\pi(p^2-1) \subseteq \pi(p^2+1)$. Так как $(p^2-1, p^2+1) = 2$, то $p^2-1 = 2^l$. По лемме 2 имеем $p = 3$. Если $n = 2$ и $m \geq 5$, то по лемме 1 существует простое число $t_4 \in \pi(p^m-1)\setminus\pi(p^n+1)$; противоречие.

Если $n \geq 3$ и $m < 2n$, то по лемме 1 существует простое число $t_5 \in \pi(p^n+1)\setminus\pi(p^m-1)$; противоречие. Предположим, что $n \geq 3$ и $m = 2n$. Тогда $\pi(p^{2n}-1) = \pi(p^n+1)$, поэтому $\pi(p^n-1) \subseteq \pi(p^n+1)$. Так как $(p^n-1, p^n+1) = 2$, то $p^n-1 = 2^l$. По лемме 2 имеем $n \in \{1,2\}$; противоречие. Если $n \geq 3$ и $m > 2n$, то по лемме 1 существует простое число $t_6 \in \pi(p^m-1)\setminus\pi(p^n+1)$; противоречие.

(3) Предположим, что $m \neq n$. Если $m > n$, то по лемме 1 существует простое число $t \in \pi(p^m+1)\setminus\pi(p^n+1)$; противоречие. Если $n > m$, то по лемме 1 существует простое число $t_1 \in \pi(p^n+1)\setminus\pi(p^m+1)$; противоречие. □

Лемма 6. *Пусть $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа, f, f_1 — натуральные числа. Рассмотрим системы относительно (q, q_1)*

$$(1)\begin{cases} R_4(q) = \{p_1\}, \\ \pi(q^2-1) = \pi(q_1^2-1)\setminus\{2\}, \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} R_4(q) = \{p_1\}, \\ \pi(q^2-1) = \pi(q_1^2-1). \end{cases}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1a) *если $(q_1-1)_2 = 4$, то система* (1) *имеет единственное решение $(q,q_1) = (2,5)$;*

1b) *если $(q_1+1)_2 = 4$, то система* (1) *не имеет решений;*

2) *если (q,q_1) решение системы* (2)*, то либо $q = p$, $q_1 = p_1$ и $p^2 = 2p_1^2-1$, либо $(q,q_1) = (239, 169)$.*

Доказательство. Пусть (q,q_1) — решение системы (1). Тогда q четно и $q^2+1 = p_1^\alpha$ для некоторого натурального числа α. По лемме 2 имеем $q^2 = 2^{2^n}$ и $\alpha = 1$, поэтому $q = 2^{2^{n-1}}$ и $p_1 \equiv 1 \pmod 4$.

Пусть $(q_1-1)_2 = 4$. Так как 4 делит p_1-1, то f_1 нечетно и $(p_1-1)_2 = 4$. Также имеем $(q_1^2-1)_2 = (q_1+1)_2(q_1-1)_2 = 8$, поэтому $p_1^{2f_1}-1 = 8m$, где m нечетно. Так как $\pi(q^2-1) = \pi(q_1^2-1)\setminus\{2\}$, то $\pi(8m) = \pi(2(p_1-2))$. Если существует нечетное простое число s, делящее p_1-1, то s делит m, поэтому s делит $(p_1-1, p_1-2) = 1$; противоречие. Итак, $p_1-1 = 2^k$ для некоторого натурального числа k. Так как $(p_1-1)_2 = 2^k = 4$, то $k = 2$, $p_1 = 5$ и $q = 2$. Так как $\pi(5^{2f_1}-1) = \pi(8m) = \{2,3\}$, то по лемме 1 имеем $f_1 = 1$, т. е. $q_1 = 5$. Пункт 1a) доказан.

Пусть $(q_1+1)_2 = 4$. Тогда $q_1 \equiv 3 \pmod 4$. Отсюда $p_1 \equiv 3 \pmod 4$, но $p_1 \equiv 1 \pmod 4$; противоречие. Пункт 1b) доказан.

Пусть (q,q_1) — решение системы (2). Тогда q нечетно и $q^2+1 = 2p_1^\alpha$ для некоторого натурального числа α. Имеем $p^{2f}-2p_1^\alpha = -1$. По лемме 3 либо $f = 1$, $\alpha = 2$ и $q^2 = p^2 = 2p_1^2-1$, либо $\alpha = 1$ и $q^2 = 2p_1-1$, либо $q = p = 239$, $p_1 = 13$ и $\alpha = 4$.

Так как $\pi(p_1^{2f_1}-1) = \pi(p_1^\alpha-1)$, то по лемме 5 либо $\alpha = 2f_1$, либо $\alpha = 1$, $2f_1 = 2$ и $p_1 = 2^s-1$. Если $\alpha = 2f_1$, то либо $\alpha = 2$, $f_1 = 1$ и $q^2 = p^2 = 2p_1^2-1$, либо $\alpha = 4$, $f_1 = 2$ и $q_1 = 169$. Если $\alpha = 1$, $2f_1 = 2$ и $p_1 = 2^s-1$, то $q^2 = 2^{s+1}-3$, поэтому $2^{(s+1)/2}-1 < q < 2^{(s+1)/2}$; противоречие. Пункт 2) доказан. □

Лемма 7. *Пусть $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные нечетные простые числа, f, f_1, a, c — натуральные числа, причем либо $a = 1$, либо $c = 1$. Рассмотрим системы относи-*

тельно (q, q_1)

$$(1)\begin{cases} q+1 = 2^c p_1^d,\\ q_1+1 = 2^a p^b,\\ \pi(q-1) = \pi(q_1-1), \end{cases} \quad (2)\begin{cases} q+1 = 2^c p_1^d,\\ q_1-1 = 2^a p^b,\\ \pi(q-1) = \pi(q_1+1), \end{cases} \quad (3)\begin{cases} q-1 = 2^c p_1^d,\\ q_1-1 = 2^a p^b,\\ \pi(q+1) = \pi(q_1+1). \end{cases}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) *система* (1) *имеет ровно два решения*: $(q, q_1) = (5, 9)$ *и* $(q, q_1) = (9, 5)$;
2) *система* (2) *не имеет решений*;
3) *система* (3) *имеет ровно два решения*: $(q, q_1) = (13, 27)$ *и* $(q, q_1) = (27, 13)$.

Доказательство. (1) Пусть $a = 1$. Тогда $p_1^{f_1} - 2p^b = -1$. По лемме 3 либо $f_1 = 1$ и $q_1 = p_1 = 2p^b - 1$, либо $b = 1$ и $q_1 = 2p - 1$, либо $f_1 = 2$, $b = 2$ и $q_1 = p_1^2 = 2p^2 - 1$, либо $q_1 = 239^2$, $p = 13$ и $b = 4$.

Рассмотрим случай $f_1 = 1$ и $q_1 = p_1 = 2p^b - 1$. Тогда $\pi(p^f - 1) = \pi(q_1 - 1) = \pi(p^b - 1)$. По лемме 5(1) либо $f = b$, либо $b = 2$ и $q = p = 2^s - 1$ для некоторого простого числа s, либо $f = 2$, $b = 1$ и $p = 2^s - 1$ для некоторого простого числа s. Пусть $f = b$. Тогда $q_1 + 1 = 2p^f = 2q = 2(2^c p_1^d - 1) = 2^{c+1}p_1^d - 2$, поэтому $3 = p_1(2^{c+1}p_1^{d-1} - p_1^{f_1-1})$. Отсюда $p_1 = 3 = 2q - 1$, т. е. $q = 2$; противоречие.

Если $b = 2$ и $q = p = 2^s - 1$, то $2^s = q + 1 = 2^c p_1^d$; противоречие. Пусть $f = 2$, $b = 1$ и $p = 2^s - 1$. Тогда $q_1 = p_1 = 2p - 1 = 2^{s+1} - 3$ и $q = p^2 = (2^s - 1)^2 = 2^{2s} - 2^{s+1} + 1$. Отсюда $2(2^{2s-1} - 2^s + 1) = 2^c(2^{s+1} - 3)^d$, поэтому $c = 1$ и $2^{2s-1} - 2^s + 1 = (2^{s+1} - 3)^d$. Пусть $d = 1$. Тогда $2^{2s} - 6 \cdot 2^s + 8 = 0$, т. е. $(2^s - 2)(2^s - 4) = 0$. Отсюда $s = 2$, $p = 3$, $q = 9$ и $p_1 = 5$. Так как $5^{f_1} + 1 = 6$, то $f_1 = 1$, т. е. $q_1 = 5$. Пусть $d \geq 2$. Тогда $0.5 \cdot 2^{2s} - 2^s + 1 = (2^{s+1} - 3)^d \geq (2^{s+1} - 3)^2 = 2^{2s+2} - 6 \cdot 2^{s+1} + 9$. Отсюда $7 \cdot 2^{2s} - 22 \cdot 2^s + 16 \leq 0$. Но при $s \geq 2$ имеем $7 \cdot 2^{2s} - 22 \cdot 2^s + 16 > 0$; противоречие.

Рассмотрим случай $b = 1$ и $q_1 = 2p - 1$. Так как $\pi(q - 1) = \pi(q_1 - 1)$, то $\pi(p^f - 1) = \pi(p - 1)$. По лемме 5(1) либо $f = 1$, либо $f = 2$ и $p = 2^s - 1$.

Пусть $f = 1$ и $q_1 = 2q - 1$. Тогда $q_1 + 3 = 2q + 2 = 2^c p_1^d$. Имеем $3 = p_1(2^{c+1}p_1^{d-1} - p_1^{f_1-1})$. Отсюда $p_1 = 3$. Так как $p = 2^c 3^d - 1$, то $3^{f_1} + 1 = 2p = 2^{c+1}3^d - 2$, т. е. $3^{f_1} + 3 = 2^{c+1}3^d$. Тогда $3^{f_1-1} + 1 = 2^{c+1}3^{d-1}$, поэтому либо $f_1 = 1$, либо $d = 1$. Если $f_1 = 1$, то $q_1 = 3$ и $q = 2$; противоречие. Таким образом, $d = 1$ и, следовательно, $2^{c+1} - 3^{f_1-1} = 1$. По лемме 2 имеем $f_1 = 2$, т. е. $q_1 = 9$ и $q = 5$.

Пусть $f = 2$ и $p = 2^s - 1$. Тогда $q = p^2 = (2^s - 1)^2 = 2^{2s} - 2^{s+1} + 1$, поэтому $q + 1 = 2(2^{2s-1} - 2^s + 1) = 2^c p_1^d$. Отсюда $c = 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} p_1^d = 2^{2s-1} - 2^s + 1,\\ \qquad p_1^{f_1} = 2^{s+1} - 3. \end{cases}$$

Если $s = 2$, то $q = 9$ и $q_1 = 5$. Если $s = 3$, то $p_1^d = 25$ и $p_1^{f_1} = 13$; противоречие.

Заметим, что при $s \geq 5$ выполняется условие $7 \leq p_1^{2f_1-d} = (2^{s+1} - 3)^2/(2^{2s-1} - 2^s + 1) \leq 8$. Во-первых, $7 \cdot 2^{2s-1} - 7 \cdot 2^s + 7 \leq 2^{2s+2} - 3 \cdot 2^{s+2} + 9$, так как $2^{2s-1} - 5 \cdot 2^s + 2 \geq 0$. Во-вторых, $2^{2s+2} - 3 \cdot 2^{s+2} + 9 \leq 8(2^{2s-1} - 2^s + 1)$, так как $4 \cdot 2^s \geq 1$.

Итак, при $s \geq 5$ имеем $7 \leq p_1^{2f_1-d} = (2^{s+1} - 3)^2/(2^{2s-1} - 2^s + 1) \leq 8$. Отсюда $p_1 = 7$ и $d = 2f_1 - 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} p_1^{2f_1-1} = 2^{2s-1} - 2^s + 1,\\ \qquad p_1^{f_1} = 2^{s+1} - 3. \end{cases}$$

Из системы следует, что $p_1 = p_1^{2f_1}/p_1^{2f_1-1} = (2^{2s+2} - 6 \cdot 2^{s+1} + 9)/(2^{2s-1} - 2^s + 1) = 7$, так как $2^{2s} - 10 \cdot 2^s + 4 = 0$. Положим $y = 2^s$. Тогда $y^2 - 10y + 4 = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения D равен 84, поэтому $\sqrt{D}$ — нецелое число; противоречие.

Рассмотрим случай $f_1 = 2$, $b = 2$ и $q_1 = p_1^2 = 2p^2 - 1$. Так как $\pi(q-1) = \pi(q_1 - 1)$, то $\pi(p^f - 1) = \pi(p^2 - 1)$. По лемме 5(1) либо $f = 1$ и $p = 2^s - 1$, либо $f = 2$. Пусть $f = 2$. Тогда $q = p^2 = (q_1 + 1)/2$. Отсюда $q + 1 = (q_1 + 3)/2 = 2^c p_1^d$. Имеем $3 = p_1(2^{c+1}p_1^{d-1} - p_1^{f_1 - 1})$. Значит, $p_1 = 3$, $q_1 = 9$ и $p^2 = 5$; противоречие. Пусть $f = 1$, $p = 2^s - 1$ и $q = p = 2^s - 1$. Тогда $q + 1 = 2^s \neq 2^c p_1^d$; противоречие.

Рассмотрим случай $q_1 = 239^2$, $p = 13$ и $b = 4$. Тогда $\pi(13^f - 1) = \pi(p^f - 1) = \pi(q_1 - 1) = \pi(239^2 - 1) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. Так как 5 делит $13^f - 1$, то 4 делит f. При $f = 4$ имеем $\pi(13^4 - 1) = \pi(168 \cdot 170) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. При $f > 4$ по лемме 1 множество $\pi(13^f - 1) \setminus \{2, 3, 5, 7, 17\}$ непусто; противоречие. Значит, $f = 4$. Тогда $13^4 + 1 = 2 \cdot 14281$, поэтому $p_1 = 14281$, но $p_1 = 239$; противоречие.

В случае $c = 1$ аналогично получаем, что $q = 5$ и $q_1 = 9$.

Системы (2) и (3) рассматриваются аналогично. □

Лемма 8. *Пусть $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные нечетные простые числа, f, f_1, $a \geq 2$, $c \geq 2$ — натуральные числа. Тогда системы*

$$(1)\begin{cases} q + 1 = 2^c p_1^d, \\ q_1 + 1 = 2^a p^b, \\ \pi(q-1) = \pi(q_1 - 1), \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} q + 1 = 2^c p_1^d, \\ q_1 - 1 = 2^a p^b, \\ \pi(q-1) = \pi(q_1 + 1), \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} q - 1 = 2^c p_1^d, \\ q_1 - 1 = 2^a p^b, \\ \pi(q+1) = \pi(q_1 + 1). \end{cases}$$

не имеют решений.

Доказательство. Рассмотрим систему (1). Тогда $q_1 = 2^a \cdot 3^b - 1 \equiv 3 \pmod 4$ и $q = 2^c p_1^d - 1 \equiv 3 \pmod 4$. Отсюда $p_1 \equiv 3 \pmod 4$, f_1 нечетно, $p \equiv 3 \pmod 4$ и f нечетно. Заметим, что $p + 1$ делит $p^f + 1 = 2^c p_1^d$, поэтому либо $\pi(p+1) = \{2\}$, либо $\pi(p+1) = \{2, p_1\}$. Если $\pi(p+1) = \{2\}$, то $p = 2^s - 1$, где s — простое число. Если $\pi(p+1) = \{2, p_1\} = \pi(p^f + 1)$, то по лемме 5(3) имеем $f = 1$. Если $\pi(p_1 + 1) = \{2\}$, то $p_1 = 2^{s_1} - 1$, где s_1 — простое число. Если $\pi(p_1 + 1) = \{2, p\} = \pi(p_1^{f_1} + 1)$, то по лемме 5(3) имеем $f_1 = 1$.

Рассмотрим случай $p = 2^s - 1$ и $p_1 = 2^{s_1} - 1$. Так как $(2^{s_1} - 1)^{f_1} + 1 = 2^a p^b$, то $(2^{s_1} - 1)^{f_1} + 1 = 2^{s_1}(E - f_1(f_1 - 1)2^{s_1}/2 + f_1) = 2^{s_1} B$, где E — натуральное число, B — нечетное число. Тогда имеем $2^{s_1} B = 2^a p^b$, поэтому $a = s_1$. Аналогично получаем, что $b = s$. Получаем систему

$$\begin{cases} p^f + 1 = (p+1)p_1^d, \\ p_1^{f_1} + 1 = (p_1 + 1)p^b, \\ \pi(p^f - 1) = \pi(p_1^{f_1} - 1). \end{cases}$$

Отсюда $p^b = (p_1^{f_1} + 1)/(p_1 + 1)$ и $p_1^d = (p^f + 1)/(p + 1)$. Тогда $p^b - 1 = p_1(p_1^{f_1 - 1} + 1)/(p_1 + 1)$ и $p_1^d - 1 = p(p^{f-1} + 1)/(p+1)$. Значит, p_1 делит $p^b - 1$ и p делит $p_1^d - 1$.

По лемме 4(c) p делит $(p_1^d - 1, p_1^{f_1} + 1) = p_1^{(d, f_1)} + 1$ при $d/(d, f_1)$ четном и $f_1/(d, f_1)$ нечетном. Так как f_1 нечетно, то (d, f_1) нечетно и d четно. Если $(d, f_1) < f_1$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq p$, $t \in \pi(p_1^{f_1} + 1) \setminus \pi(p^{(d, f_1)} + 1)$; противоречие. Если $(d, f_1) = f_1$, то $d = f_1 t_1$, где t_1 четно. Аналогично получаем, что b четно и $b = ft$, где t четно. Итак, $q_1 + 1 = 2^{s_1} q^t \geq 4q^2$, но $q + 1 = 2^s q_1^{t_1} \geq 4q_1^2 \geq 4(4q^2 - 1)^2$; противоречие.

Рассмотрим случай $p = 2^s - 1$ и $f_1 = 1$. Так как $(2^s - 1)^f + 1 = 2^c(2^a p^b - 1)^d$, то $(2^s - 1)^f + 1 = 2^s(E - f(f-1)2^s/2 + f) = 2^s A$, где E — натуральное число, A — нечетное число, поэтому $c = s$. Имеем $p_1^d = (p^f + 1)/(p+1)$, т. е. $p_1^d - 1 = p(p^{f-1} + 1)/(p+1)$. По лемме 4(c) p делит $(p_1^d - 1, p_1 + 1) = p_1 + 1$ при d четном. Тогда $p_1^d = (2^a p^b - 1)^d = 2^a p^b C + 1$, где C — натуральное число. Имеем $p^f + 1 = 2^s(2^a p^b C + 1)$, т. е. $p^{f-1} = 2^{a+s} p^{b-1} C + 1$. Итак, $f = 1$ или $b = 1$. Если $f = 1$, то $2^s = p + 1 = 2^s p_1^d$; противоречие.

Таким образом, $f > 1$, $b = 1$ и $p_1 = 2^c p - 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} p^f + 1 = (p+1)p_1^d, \\ p + 1 = 2^s, \\ p_1 = 2^a p - 1, \\ \pi(p^f - 1) = \pi(p_1 - 1). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} p^f + 1 = (p+1)(2^a p - 1)^d, \\ \pi(p^f - 1) = \pi(2^a p - 2). \end{cases}$$

Также имеем $(2^a p - 1)^d = ((2^a p - 2) + 1)^d = (2^a p - 2)D + 1$, где D — натуральное число. Получаем систему

$$\begin{cases} p\dfrac{p^{f-1} - 1}{p+1} = (2^a p - 2)D, \\ \pi(p^f - 1) = \pi(2^a p - 2). \end{cases}$$

Имеем цепочку включений $\pi(p^f - 1) = \pi(2^a p - 2) \subseteq \pi\Big(\dfrac{p^{f-1} - 1}{p+1}\Big) \subseteq \pi(p^{f-1} - 1)$.

Заметим, что $f > 2$. По лемме 4(a) имеем $(p^f - 1, p^{f-1} - 1) = p - 1$, но $\pi(p^f - 1) \subseteq \pi(p^{f-1} - 1)$, поэтому $f = 2$; противоречие.

В случае $p_1 = 2^{s_1} - 1$ и $f = 1$ получаем противоречие аналогично случаю $p = 2^s - 1$ и $f_1 = 1$.

Рассмотрим случай $f = 1$ и $f_1 = 1$. Так как $p_1 + 1 = 2^a p^b \geq 4p$, то $p + 1 = 2^c p_1 \geq 4p_1 \geq 4(4p - 1)$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случаях (2) и (3). $\square$

Лемма 9. *Пусть $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные нечетные простые числа. Тогда системы*

$$(1)\begin{cases} R_4(q_1) = \{p\}, \\ \pi(q-1) = \pi(q_1^2 - 1), \\ p_1 \in R_2(q), \\ R_5(q_1) = R_3(q), \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} R_4(q_1) = \{p\}, \\ \pi(q-1) = \pi(q_1^2 - 1), \\ p_1 \in R_2(q), \\ R_{10}(q_1) = R_3(q). \end{cases}$$

не имеют решений.

Доказательство. (1) Так как $R_4(q_1) = \{p\}$, то $p_1^{2f_1} - 2p^\alpha = -1$ для некоторого натурального числа α. По лемме 3 либо $q_1 = 239$, $p = 13$ и $\alpha = 4$, либо $\alpha = 1$, либо $f_1 = 1$ и $\alpha = 2$.

Пусть $q_1 = 239$, $p = 13$ и $\alpha = 4$. Тогда $\pi(13^f - 1) = \pi(239^2 - 1) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. Если 5 делит $13^f - 1$, то 4 делит f. При $f = 4$ имеем $\pi(13^f - 1) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. При $f > 4$ по лемме 1 множество $\pi(13^f - 1) \setminus \{2, 3, 5, 7, 17\}$ непусто. Значит $q = 13^4$. По условию $239 = p_1 \in R_2(13^4) = \{14281\}$; противоречие.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда $p = (q_1^2 + 1)/2$. Так как $\pi(q - 1) = \pi(q_1^2 - 1)$, то $\pi(p^f - 1) = \pi(p - 1)$. По лемме 5(1) либо $f = 1$ и $q = p$, либо $f = 2$ и $p = 2^s - 1$.

Предположим, что $f = 2$ и $p = 2^s - 1$. Тогда $(2^{(s+1)/2} - 1)^2 < q_1^2 = 2p - 1 = 2^{s+1} - 3 < 2^{s+1}$, т. е. $2^{(s+1)/2} - 1 < q_1 < 2^{(s+1)/2}$; противоречие.

Предположим, что $f = 1$ и $q = p = (q_1^2 + 1)/2$. Так как $p_1 \in R_2(q)$, то p_1 делит $(q+1)/2$, поэтому p_1 делит $q_1^2 + 3$. Отсюда $p_1 = 3$. Заметим, что $q_1 = p_1^{f_1} \equiv 3, 9, 21, 27 \pmod{60}$.

Пусть $q_1 \equiv 3, 27 \pmod{60}$. Тогда $p \equiv 0 \pmod 5$, т. е. $p = 5$ и $q_1 = 3$. Так как $R_5(3) = \{11\}$ и $11 \equiv 2 \pmod 3$, получаем противоречие.

Пусть $q_1 \equiv 9 \pmod{60}$. Тогда $q = p \equiv 41 \pmod{60}$ и $f_1 \equiv 2 \pmod 4$. Так как 11 делит $3^5 - 1$, то 11 делит $3^{5f_1} - 1$. Если 11 не делит $3^{f_1} - 1$, то 11 делит $(3^{5f_1} - 1)/(3^{f_1} - 1)$, т. е. $11 \in R_5(q_1) = R_3(q)$, но $11 \equiv 2 \pmod 3$; противоречие. Если 11 делит $3^{f_1} - 1$, то 5 делит f_1, поэтому $f_1 \equiv 10 \pmod{20}$. Итак, $f_1 = 10 + 20t$ для некоторого натурального числа t. Простое число $p = (3^{2f_1} + 1)/2 = (3^{20(1+2t)} + 1)/2$ делится на $(3^{20} + 1)/2 = 41 \cdot 42521761$; противоречие.

Пусть $q_1 \equiv 21 \pmod{60}$. Тогда $(q_1^5 - 1)/((q_1 - 1)(5, q_1 - 1)) \equiv 40841 \equiv 2 \pmod 3$. Отсюда существует $r \in R_5(q_1)$ такое, что $r \equiv 2 \pmod 3$. По лемме 1 имеем $r \notin R_3(q)$; противоречие.

Пусть $\alpha = 2$. Тогда $p^2 = (q_1^2+1)/2$. Так как $\pi(q-1) = \pi(q_1^2-1)$, то $\pi(p^f-1) = \pi(p^2-1)$. По лемме 1 либо $f = 2$, либо $f = 1$ и $p = 2^s-1$. Если $f = 1$ и $p = 2^s-1$, то p_1 делит $(q+1)/2 = 2^{s-1}$; противоречие.

Предположим, что $f = 2$ и $q = p^2$. Так как $p_1 \in R_2(q)$, то p_1 делит $(q+1)/2$, поэтому p_1 делит q_1^2+3. Отсюда $p_1 = 3$. Заметим, что $q_1 = p_1^{f_1} \equiv 3, 9, 21, 27 \pmod{60}$. Тогда $p^2 = (q_1^2+1)/2 \equiv 5, 11 \pmod{30}$ и p не является целым числом; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае (2). □

Лемма 10. *Пусть $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные нечетные простые числа, неравные 5. Тогда системы*

$$(1)\begin{cases} R_4(q_1) = \{p\}, \\ \pi(q-1) = \pi(q_1^2-1) \setminus \{5\}, \\ 5, p_1 \in R_2(q), \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} R_4(q_1) = \{p\}, \\ \pi(q+1) = \pi(q_1^2-1) \setminus \{5\}, \\ 5, p_1 \in R_1(q). \end{cases}$$

не имеют решений.

Доказательство. (1) Так как $R_4(q_1) = \{p\}$, то $p_1^{2f_1} - 2p^\alpha = -1$ для некоторого натурального числа α. По лемме 3 либо $q_1 = 239$, $p = 13$ и $\alpha = 4$, либо $\alpha = 1$, либо $f_1 = 1$ и $\alpha = 2$.

Пусть $q_1 = 239$, $p = 13$ и $\alpha = 4$. Тогда $\pi(13^f - 1) = \pi(239^2 - 1) \setminus \{5\} = \{2, 3, 7, 17\}$. Если 17 делит $13^f - 1$, то 4 делит f. При $f = 4$ имеем $\pi(13^f - 1) = \{2, 3, 5, 7, 17\} \neq \{2, 3, 7, 17\}$; противоречие. При $f > 4$ по лемме 1 множество $t \in \pi(13^f - 1) \setminus \{2, 3, 7, 17\}$ непусто; противоречие.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда $p = (q_1^2+1)/2$. Так как $\pi(q-1) = \pi(q_1^2-1)\setminus\{5\}$, то $\pi(p^f-1) = \pi(p-1)\setminus\{5\}$. По лемме 1 получаем противоречие.

Пусть $\alpha = 2$. Тогда $p^2 = (q_1^2 + 1)/2$. Так как $\pi(q - 1) = \pi(q_1^2 - 1) \setminus \{5\}$, то $\pi(p^f - 1) = \pi(p^2 - 1) \setminus \{5\}$. По лемме 1 имеем $f = 1$ и $p + 1 = 2^s 5^t$ для некоторых неотрицательных чисел t и s. Так как $p_1 \in R_2(q)$, то p_1 делит $2^{s-1}5^t$, поэтому $p_1 = 5$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае (2). □

Лемма 11. *Пусть $q = p^f$, $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные нечетные простые числа. Тогда система*

$$\begin{cases} R_4(q_1) = \{p\}, \\ \pi(q+1) = \pi(q_1^2-1), \\ p_1 \in R_1(q), \end{cases}$$

не имеет решений.

Доказательство. Так как $R_4(q_1) = \{p\}$, то $p_1^{2f_1} - 2p^\alpha = -1$ для некоторого натурального числа α. По лемме 3 либо $q_1 = 239$, $p = 13$ и $\alpha = 4$, либо $\alpha = 1$, либо $f_1 = 1$ и $\alpha = 2$.

Пусть $q_1 = 239$, $p = 13$ и $\alpha = 4$. Тогда $\pi(13^f+1) = \pi(239^2-1) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$, но $13^f+1 \equiv 2 \pmod 3$; противоречие.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда $p = (q_1^2 + 1)/2$. Так как $\pi(q + 1) = \pi(q_1^2 - 1)$, то $\pi(p^f + 1) = \pi(p - 1)$. Из равенства $p^f + 1 = p^f - 1 + 2$ следует, что $(p^f + 1, p - 1) = 2$. Тогда $p^f + 1 = 2^m$ и $p - 1 = 2^l$, поэтому $(2^l + 1)^f + 1 = 2^m$. Если $l = 1$, то $p = 3 = (q_1^2 + 1)/2$ и $q_1^2 = 5$; противоречие.

При $l \geq 2$ имеем $2^{lf} + 2^l A + 2 = 2^m$ для некоторого натурального числа A, поэтому $m > lf$. Тогда $2(2^{l-1}A + 1) = 2^{lf}(2^{m-lf} - 1)$, поэтому $lf = 1$; противоречие.

Пусть $\alpha = 2$. Тогда $p^2 = (q_1^2 + 1)/2$. Если $p = 3$, то $9 = (q_1^2 + 1)/2$ и $q_1^2 = 17$; противоречие. Так как $\pi(q+1) = \pi(q_1^2 - 1)$, то $\pi(p^f + 1) = \pi(p^2 - 1)$. При f четном из равенства $p^f + 1 = (p^2 - 1)\dfrac{p^f - 1}{p^2 - 1} + 2$ следует, что $(p^f + 1, p^2 - 1) = 2$. Тогда $p^f + 1 = 2^m$ и $p^2 - 1 = 2^l$, поэтому $p^2 - 2^l = 1$. По лемме 1 имеем $p = 3$; противоречие.

Пусть f нечетно. Так как $p^f + 1 = (p+1)\dfrac{p^f + 1}{p + 1}$, то $(p^f + 1, p + 1) = p + 1$. Из равенства $p^f + 1 = (p-1)\dfrac{p^f - 1}{p - 1} + 2$ следует, что $(p^f + 1, p - 1) = 2$. Итак, $(p^f + 1, p^2 - 1) = p + 1$. Так как $\pi(q+1) = \pi(q_1^2 - 1)$, то $\pi(p+1) = \pi(p^f + 1) = \pi(p^2 - 1)$. По лемме 1 имеем $f = 1$. Из равенства $\pi(p+1) = \pi(p^2 - 1)$ получаем, что $p = 2^l + 1$. Тогда $q = p = 2^l + 1$, поэтому p_1 делит $(q-1)/2 = 2^{l-1}$; противоречие. $\square$

Пусть $G = A_{n-1}(q)$ и G_1 — неизоморфная G конечная простая группа лиева типа над полем порядка q_1 с характеристикой, отличной от характеристики группы G. Далее мы рассмотрим возможности для G.

Лемма 12. *Пусть G — одна из групп $A_2(2)$, $A_2(3)$, $A_2(4)$, $A_2(5)$, $A_2(7)$, $A_2(8)$, $A_2(9)$, $A_2(31)$, $A_2(64)$, $A_3(2)$, $A_3(3)$, $A_3(4)$, $A_3(5)$, $A_3(8)$, $A_4(2)$, $A_5(2)$, $A_5(3)$, $A_5(4)$, $A_5(7)$, $A_5(8)$, $A_6(2)$, $A_7(2)$, $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, ${}^2A_2(3)$, ${}^2A_2(4)$, ${}^2A_2(5)$, ${}^2A_2(7)$, ${}^2A_2(8)$, ${}^2A_2(9)$, ${}^2A_2(13)$, ${}^2A_2(17)$, ${}^2A_2(27)$, ${}^2A_2(81)$, ${}^2A_3(2)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_3(4)$, ${}^2A_3(8)$, ${}^2A_4(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_5(4)$, ${}^2A_5(5)$, ${}^2A_5(8)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_7(2)$.*

Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений:
(1) $\{G, G_1\} = \{A_1(7), A_1(8)\}$; (2) $\{G, G_1\} = \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$; (3) $\{G, G_1\} = \{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$.

Доказательство. Пусть G — одна из групп $A_2(2)$, $A_2(4)$, $A_6(2)$, $A_7(2)$, $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_7(2)$. По лемме 6 (М.Р. Зиновьева. О конечных простых классических группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2016. Т. 22, № 3. С. 101–116.) выполняются утверждения (1) и (2) леммы.

Пусть G — одна из групп $A_2(3)$, $A_2(8)$, $A_2(64)$, $A_3(4)$, $A_3(5)$, $A_5(3)$, $A_5(4)$, $A_5(8)$, ${}^2A_2(9)$, ${}^2A_2(17)$, ${}^2A_3(4)$, ${}^2A_3(8)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_5(4)$, ${}^2A_5(8)$. По [12] $\pi(G_1) \neq \pi(G)$ и $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Далее предполагаем, что для некоторой группы G_1 имеет место равенство графов $GK(G_1) = GK(G)$.

Пусть $G = A_2(5)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 31\}$ и по [12] $G_1 = A_1(31)$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_2(7)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 7, 19\}$ и по [12] $G_1 = {}^2A_2(8)$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_2(9)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 13\}$. По [12]

$$G_1 \in \{A_1(64), {}^2A_3(5), C_2(8), G_2(4)\}.$$

По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_2(31)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) \subset [2, 331]$. По [12]

$$G_1 \in \Big\{A_1(2^{15}), A_2(2^{10}), A_4(64), A_5(64), {}^2A_2(32), {}^2A_3(32), {}^2A_4(8), {}^2A_5(8), C_3(32), C_5(8),$$

$$C_6(8), D_4(32), D_6(8), {}^2D_5(8), {}^2D_6(8), G_2(32), E_8(2)\Big\}.$$

По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_3(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7\}$. По [12]

$$G_1 \in \{A_1(49), C_2(7), {}^2A_2(5), {}^2A_3(3)\}.$$

По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_3(3)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 13\}$. По [12]

$$G_1 \in \{A_1(25), {}^2A_2(4), C_2(5), {}^2F_4(2)'\}.$$

По табл. 1 и 2 $G_1 = {}^2F_4(2)'$. Таким образом, выполняется утверждение (3) леммы.

Пусть $G = A_3(8)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 13, 73\}$. По [12]

$$G_1 \in \{A_1(3^6), C_2(27), G_2(9)\}.$$

По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_4(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$ и по [12] $G_1 \in \{A_1(125), G_2(5)\}$. По табл. 1 и 2 $G_1 = G_2(5)$, причем $\Theta(G) = \{5, 31\}$, $\Theta'(G) = \{\{2\}, \{7\}\}$, $\Theta(G_1) = \{7, 31\}$, $\Theta'(G_1) = \{\{2\}, \{5\}\}$. Отсюда $\{2, 7, 31\}$ — максимальная коклика в $GK(G_1)$, но не в $GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = A_5(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$ и по [12] $G_1 \in \{A_1(125), G_2(5)\}$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = A_5(7)$. По табл. 1 и 2 имеем $G_1 \in \{A_2(q_1), A_4(q_1), {}^2A_2(q_1), {}^2A_4(q_1), {}^3D_4(q_1)\}$. Заметим, что по табл. 2 имеем $\{2801, 7, 43\}$, $\{2801, 5, 43\}$, $\{2801, 5, 19\}$ и $\{2801, 3, 43\}$ — все коклики порядка 3 в $GK(G)$. Если $G_1 = A_2(q_1)$, то по табл. 2 либо $(q_1 - 1)_3 = 3$ и $q_1 + 1 = 2^{k_1}$, либо $(q_1 - 1)_3 \neq 3$ и $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$. Если $G_1 = A_2(q_1)$, где $(q_1 - 1)_3 = 3$ и $q_1 + 1 = 2^{k_1}$, то все коклики максимального порядка в $GK(G_1)$ имеют вид $\{3, p_1, r_3(q_1)\}$; противоречие. Пусть $G_1 = A_2(q_1)$, где $(q_1 - 1)_3 \neq 3$ и $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$. Заметим, что по лемме 1 имеем $r_3(q_1) \equiv 1 \pmod 3$. Так как $\{2801, 3, 43\} = \{p_1, r_2(q_1), r_3(q_1)\}$, то $p_1 = 2801$ или $p_1 = 3$. Из равенства $\{2801, 5, 19\} = \{p_1, r_2(q_1), r_3(q_1)\}$ следует, что $p_1 = 2801$ или $p_1 = 5$. Таким образом, $p_1 = 2801$ и $5 \in R_2(q_1)$, но 5 делит $q_1 - 1$; противоречие.

Если $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, то по табл. 2 либо $(q_1 + 1)_3 = 3$ и $q_1 - 1 = 2^{k_1}$, либо $(q_1 + 1)_3 \neq 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^{k_1}$. Если $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 = 3$ и $q_1 - 1 = 2^{k_1}$, то все коклики размера 3 в $GK(G_1)$ имеют вид $\{3, p_1, r_6(q_1)\}$; противоречие. Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 \neq 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^{k_1}$. Заметим, что по лемме 1 имеем $r_6(q_1) \equiv 1 \pmod 6$. Так как $\{2801, 3, 43\} = \{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\}$, то $p_1 = 2801$ или $p_1 = 3$. Из равенства $\{2801, 5, 19\} = \{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\}$ следует, что $p_1 = 2801$ или $p_1 = 5$. Итак, $p_1 = 2801$ и 3,5 делят $q_1 - 1 = 2801^{f_1} - 1$. Отсюда f_1 четно. Так как $\{2801, 7, 43\} = \{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\}$, то $7 \in R_1(q_1)$. Из сравнения коклик размера 3 в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$ получаем, что $\pi(q_1 - 1) = \{2, 3, 5, 7\}$. При $f_1 = 2$ имеем $\pi(p_1^2 - 1) = \{2, 3, 5, 7, 467\} \neq \{2, 3, 5, 7\}$. При $f_1 > 2$ по лемме 1 множество $(p_1^{f_1} - 1) \setminus \{2, 3, 5, 7\}$ непусто; противоречие.

Пусть $G_1 = A_4(q_1)$. Так как $3 \notin R_i(q)$, где $i \in \{3, 4, 5\}$, то $\{2801, 3, 43\} = \{p_1, r_4(q_1), r_5(q_1)\}$. Тогда $43 \in R_4(q_1) \cup R_5(q_1)$. По лемме 1 имеем $43 \equiv 1 \pmod 4$ или $43 \equiv 1 \pmod 5$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_4(q_1)$. Так как $3 \notin R_i(q)$, где $i \in \{4, 6, 10\}$, то $\{2801, 3, 43\} = \{p_1, r_4(q_1), r_{10}(q_1)\}$. Тогда $43 \in R_4(q_1) \cup R_{10}(q_1)$. По лемме 1 имеем $43 \equiv 1 \pmod 4$ или $43 \equiv 1 \pmod{10}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^3D_4(q_1)$. Тогда $\{2801, 3, 43\} = \{r_3(q_1), r_6(q_1), r_{12}(q_1)\}$, поэтому $3 \in R_i(q)$, где $i \in \{3, 6, 12\}$; противоречие.

Пусть $G = {}^2A_2(3)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 7\}$. По [12] $G_1 = A_1(8)$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(4)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 13\}$. По [12] $G_1 \in \{A_1(25), C_2(5), A_3(3)\}$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(5)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7\}$. По [12]

$$G_1 \in \{A_1(49), A_2(4), A_3(2), C_2(7), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(3)\}.$$

По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(7)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 7, 43\}$ и по [12] $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(8)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 7, 19\}$ и по [12] $G_1 = A_2(7)$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(13)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) \subset [2, 157]$. По [12] $G_1 \in \{A_1(157^2), C_2(157)\}$. По табл. 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(27)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 7, 13, 19, 37\}$ и по [12] $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_2(81)$. По табл. 1 и 2 имеем

$$G_1 \in \Big\{A_3(3), A_5(2), A_5(3), A_5(7), A_6(2), B_3(3), C_3(3), C_4(2), D_4(3), {}^2A_5(5),$$

$$ {}^2F_4(2)', A_2(q_1), A_4(q_1), {}^2A_2(q_1), {}^2A_4(q_1), {}^3D_4(q_1)\Big\}.$$

Заметим, что по табл. 2 имеем $\{3, 5, 6481\}$ — единственная коклика максимального порядка в $GK(G)$. Если $G_1 \in \{A_3(3), A_5(2), A_5(3), A_5(7), A_6(2), B_3(3), C_3(3), C_4(2), D_4(3), {}^2A_5(5), {}^2F_4(2)'\}$, то вершины $GK(G_1)$ — простые числа, не превосходящие 2801; противоречие. Пусть $G_1 = A_2(q_1)$. По табл. 2 $(q_1 - 1)_3 = 3$, $q_1 = 2^{k_1} - 1$ и $\{3, p_1, r_3(q_1)\}$ — единственная коклика максимального порядка в $GK(G_1)$. По лемме 2 имеем $q_1 = p_1$. Так как $GK(G_1) = GK(G)$, то $2^{k_1} - 1 = p_1 \in \{5, 6481\}$; противоречие. Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$. По табл. 2 имеем $(q_1 + 1)_3 = 3$, $q_1 = 2^{k_1} + 1$ и $\{3, p_1, r_6(q_1)\}$ — единственная коклика максимального порядка в $GK(G_1)$. По лемме 2 имеем $q_1 = p_1$. Так как $GK(G_1) = GK(G)$, то $2^{k_1} + 1 = p_1 \in \{5, 6481\}$. Тогда $p_1 = 5$; противоречие с одним из предыдущих абзацев. Если $G_1 \in \{A_4(q_1), {}^2A_4(q_1)\}$, то коклик максимального размера в графе $GK(G_1)$ не менее двух; противоречие. Если $G_1 = {}^3D_4(q_1)$, то $\{r_3(q_1), r_6(q_1), r_{12}(q_1)\}$ — коклика максимального порядка в $GK(G_1)$ и $3 \in \{r_3(q_1), r_6(q_1), r_{12}(q_1)\}$; противоречие. Таким образом, $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_3(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5\}$. По [12] $G_1 \in \{A_1(5), A_1(9)\}$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_4(2)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 11\}$. По [12] $G_1 = A_1(11)$. По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$.

Пусть $G = {}^2A_5(5)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) \subset [2, 521]$ и по [12]

$$G_1 \in \{A_1(43^4), A_1(521^3), A_2(521), {}^2A_2(521), C_2(43^2), G_2(521)\}.$$

По табл. 1 и 2 имеем $G_1 \in \{A_2(521), {}^2A_2(521)\}$. Заметим, что по табл. 2 $\{521, 5, 31\}$, $\{521, 13, 31\}$, $\{521, 7, 13\}$ и $\{521, 3, 31\}$ — все коклики порядка 3 в $GK(G)$. Если $G_1 = A_2(521)$, то $\{521, 29, 31\}$ — коклика максимального порядка в $GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 = {}^2A_2(521)$, то $\{521, 5, 19\}$ — коклика максимального порядка в $GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2A_5(8)$. Имеем $\pi(G) = \pi(G_1) \subset [2, 331]$. По [12]

$$G_1 \in \big\{A_1(31^3), A_2(31), A_2(31^2), A_3(31), B_3(31), C_3(31), D_4(31), G_2(31)\big\}.$$

По табл. 1 и 2 $GK(G_1) \neq GK(G)$. □

Лемма 13. *Пусть $G = A_2^{\pm}(q)$ и $G_1 = A_{n-1}^{\pm}(q_1)$ — неизоморфная группе G конечная простая классическая группа над полем порядка q_1, где $n \geq 3$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполняется один из случаев:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, *где qq_1 нечетно;*

(2) $\{G, G_1\} = \{A_2(q), {}^3D_4(q_1)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. По табл. 1, 2 $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где qq_1 нечетно; $\{A_2^{\pm}(q), A_4^{\pm}(q_1)\}$, где qq_1 нечетно; $\{A_2^{\pm}(q), {}^3D_4(q_1)\}$.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), A_4^{\pm}(q_1)\}$, где qq_1 нечетно. Предположим, что $\{G, G_1\} = \{A_2(q), A_4(q_1)\}$, где qq_1 нечетно. Рассматривая равенство коклик в графах $GK(G)$ и

$GK(G_1)$, получаем систему (1) из леммы 9. По лемме 9(1) получаем противоречие. В случаях $\{G, G_1\} = \{A_2(q), {}^2A_4(q_1)\}$ и $\{G, G_1\} = \{{}^2A_2(q), A_4^{\pm}(q_1)\}$ аналогично получаем противоречие, используя леммы 9(2), 10 и 11.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{{}^2A_2(q), {}^3D_4(q_1)\}$. Рассмотрим все коклики в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{p, r_1(q), r_6(q)\}$, $\{2, r_6(q)\}$, $\{3, r_6(q)\}$ при $(q+1)_3 > 3$, $\{r_2(q), r_6(q)\}$ при $r_2(q) \neq 2, 3$. В $GK(G_1)$ это $\{r_3(q_1), r_6(q_1), r_{12}(q_1)\}$, $\{2, r_{12}(q)\}$, $\{r_1(q_1), r_{12}(q_1)\}$ при $r_1(q_1) \neq 2$, $\{r_2(q_1), r_{12}(q_1)\}$. Так как $GK(G) = GK(G_1)$, то коклики максимального размера совпадают, поэтому $R_{12}(q_1) = R_6(q)$. Из равенства $\{r_3(q_1), r_6(q_1)\} = \{p, r_1(q)\}$ следует, что либо $R_3(q_1) = \{p\}$, либо $R_6(q_1) = \{p\}$. В любом случае по лемме 1 $p \equiv 1 \pmod 3$, т. е. $q \equiv 1 \pmod 3$. Если $(q+1)_3 = 1$, то либо $p = 3$, либо 3 делит $q-1$, поэтому $3 = t(3, G) \neq t(3, G_1) = 2$; противоречие. Значит, $(q+1)_3 > 3$, т. е. $q \equiv 2 \pmod 3$; противоречие. □

Лемма 14. *Пусть $G = A_2^{\pm}(q)$ и $G_1 \neq A_{n-1}^{\pm}(q_1)$ — неизоморфная группе G конечная простая классическая группа над полем порядка q_1, где $n \geq 3$. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), C_2(q_1)\}$, где $(q \mp 1)_3 \neq 3$, $q \pm 1 = 2^k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. По табл. 1, 2 $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A_2^{\pm}(q), C_2(q_1)\}$, где $(q \mp 1)_3 \neq 3$, $q \pm 1 = 2^k$; $\{A_2^{\pm}(q), C_4(q_1)\}$, где q_1 четно, $q > 4$, $(q \mp 1)_3 = 3$ и $q \pm 1 \neq 2^k$; $\{A_2^{\pm}(q), B_4(q_1)\}$, где qq_1 нечетно; $\{A_2^{\pm}(q), C_4(q_1)\}$, где qq_1 нечетно; $\{A_2^{\pm}(q), {}^2D_4(q_1)\}$, где qq_1 нечетно.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), C_4(q_1)\}$, где q_1 четно, $q > 4$, $(q \mp 1)_3 = 3$ и $q \pm 1 \neq 2^k$. Предположим, что $\{G, G_1\} = \{A_2(q), C_4(q_1)\}$. Тогда коклики максимального размера в $GK(G_1)$ имеют вид $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$, в $GK(G_1)$ — $\{p_1, 3, r_2(q_1), r_8(q)\}$. Так как $GK(G) = GK(G_1)$, то коклики максимального размера совпадают, поэтому $3 \in R_i(q)$; противоречие с малой теоремой Ферма. В случае $\{G, G_1\} = \{{}^2A_2(q), C_4(q_1)\}$, где q_1 четно, $q > 4$, $(q \mp 1)_3 = 3$ и $q \pm 1 \neq 2^k$ аналогично получаем противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), C_4(q_1)\}$ или $\{A_2^{\pm}(q), {}^2D_4(q_1)\}$, где qq_1 нечетно, аналогично случаю $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), C_4(q_1)\}$, где q_1 четно, $q > 4$, $(q \mp 1)_3 = 3$ и $q \pm 1 \neq 2^k$, получаем противоречие. □

Лемма 15. *Пусть $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где*

$$(q \mp 1)_3 \neq 3, \quad q \pm 1 = 2^k > 4, \quad (q_1 \mp 1)_3 \neq 3, \quad q_1 \pm 1 = 2^{k_1} > 4;$$

$\{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где

$$(q \mp 1)_3 = 3, \quad q \pm 1 = 2^k, \quad (q_1 \mp 1)_3 = 3, \quad q_1 \pm 1 = 2^{k_1};$$

$\{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где

$$(q \mp 1)_3 = 3, \quad q \pm 1 = 2^k, \quad (q_1 \mp 1)_3 \neq 3, \quad q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1}.$$

Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_2(q), A_2(q_1)\}$, где $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 = 2^k > 4$, $(q_1-1)_3 \neq 3$, $q_1 + 1 = 2^{k_1} > 4$. Рассмотрим все коклики в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{p, r_3(q)\}$, $\{r_1(q), r_3(q)\}$ при $r_1(q_1) \neq 2$, $\{2 = r_2(q), r_3(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{p_1, r_3(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_3(q_1)\}$ при $r_1(q_1) \neq 2$, $\{2 = r_2(q_1), r_3(q_1)\}$. Положим $A = \{\{p, r_3(q)\}\} \cup \{\{r_1(q), r_3(q)\}\}$, $B = \{\{p_1, r_3(q_1)\}\} \cup \{\{r_1(q_1), r_3(q_1)\}\}$.

Заметим, что $\{2, r_3(q)\} = \{2, r_3(q_1)\}$, т. е. $R_3(q_1) = R_3(q)$. Так как $A = B$, то $\pi(q(q-1)) = \pi(q_1(q_1-1))$. Так как $q = 2^k - 1$ и $q_1 = 2^{k_1} - 1$, то $\pi((2^k-1)(2^{k-1}-1)) = \pi((2^{k_1}-1)(2^{k_1-1}-1))$. Без ограничения общности можно считать, что $q > q_1$, т. е. $k > k_1$. Так как $q = 2^k - 1$, то k — простое число. По лемме 1 множество $\pi(2^k-1) \setminus \pi((2^{k_1}-1)(2^{k_1-1}-1))$ непусто; противоречие.

В случаях пар $\{G, G_1\}$, равных $\{A_2(q), {}^2A_2(q_1)\}$, где

$$(q-1)_3 \neq 3, \quad q+1 = 2^k > 4, \quad (q_1+1)_3 \neq 3, \quad q_1 - 1 = 2^{k_1} > 8;$$

$\{{}^2A_2(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где

$$(q+1)_3 \neq 3, \quad q-1 = 2^k > 8, \quad (q_1 \pm 1)_3 \neq 3, \quad q_1 \mp 1 = 2^{k_1} > 8;$$

$\{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где

$$(q \mp 1)_3 = 3, \quad q \pm 1 = 2^k, \quad (q_1 \mp 1)_3 = 3, \quad q_1 \pm 1 = 2^{k_1};$$

$\{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где

$$(q \mp 1)_3 = 3, \quad q \pm 1 = 2^k, \quad (q_1 \mp 1)_3 \neq 3, \quad q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1},$$

аналогично получаем противоречие. □

Лемма 16. *Пусть $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), A_2^{\pm}(q_1)\}$, где $(q \mp 1)_3 \neq 3$, $q \pm 1 \neq 2^k$, $(q_1 \mp 1)_3 \neq 3$, $q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1}$. Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_2(q), A_2(q_1)\}$, где $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 \neq 2^k$, $(q_1-1)_3 \neq 3$, $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$. Рассмотрим все коклики в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это

$$\{p, r_2(q), r_3(q)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2; \quad \{2, r_3(q)\}; \quad \{r_1(q), r_3(q)\} \text{ при } r_1(q) \neq 3;$$

$$\{3, r_3(q)\} \text{ при } (q-1)_3 > 3.$$

В $GK(G_1)$ это

$$\{p_1, r_2(q_1), r_3(q_1)\} \text{ при } r_2(q_1) \neq 2; \quad \{2, r_3(q_1)\}; \quad \{r_1(q_1), r_3(q_1)\} \text{ при } r_1(q_1) \neq 3;$$

$$\{3, r_3(q_1)\} \text{ при } (q_1-1)_3 > 3.$$

Положим

$$A = \{\{r_1(q), r_3(q)\} \mid r_1(q) \neq 3\} \cup \{\{3, r_3(q)\} \mid (q-1)_3 > 3\},$$

$$B = \{\{r_1(q_1), r_3(q_1)\} \mid r_1(q_1) \neq 3\} \cup \{\{3, r_3(q_1)\} \mid (q_1-1)_3 > 3\},$$

$$C = \{\{p, r_2(q), r_3(q)\} \mid r_2(q) \neq 2\}, \quad D = \{\{p_1, r_2(q_1), r_3(q_1)\} \mid r_2(q_1) \neq 2\}.$$

Заметим, что $\{2, r_3(q)\} = \{2, r_3(q_1)\}$, т. е. $R_3(q_1) = R_3(q)$.

Предположим, что $p = 3$. Так как $t(3, G) = 3 = t(3, G_1)$, то $3 \in R_2(q_1)$. Из равенства $A = B$ следует, что $\pi(q-1) = \pi(q_1 - 1)$. Так как $C = D$, то $q_1 + 1 = 2^a 3^b$ и $q + 1 = 2^c p_1^d$, где a, b, c, d — натуральные числа. По леммам 7 и 8 получаем противоречие.

В случае $p_1 = 3$ получаем противоречие аналогично случаю $p = 3$.

Предположим, что $3 \in R_2(q)$. Так как $t(3, G) = 3 = t(3, G_1)$, то $3 \in R_2(q_1)$. Из равенства $\{p, 3, r_3(q)\} = \{p_1, r_2(q_1), r_3(q_1)\}$ следует, что $3 = p_1$ или $p = p_1$; противоречие.

В случае $3 \in R_2(q_1)$ получаем противоречие аналогично случаю $3 \in R_2(q)$.

Предположим, что $3 \in R_1(q)$. Тогда $(q-1)_3 > 3$. Так как $t(3, G) = 3 = t(3, G_1)$, то $3 \in R_1(q_1)$ и $(q_1 - 1)_3 > 3$. Из равенства $A = B$ следует, что $\pi(q-1) = \pi(q_1 - 1)$. Так как $C = D$, то $q_1 + 1 = 2^a p^b$ и $q + 1 = 2^c p_1^d$, где a, b, c, d — натуральные числа. По леммам 7 и 8 получаем противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), {}^2A_2(q_1)\}$, где $(q \mp 1)_3 \neq 3$, $q \pm 1 \neq 2^k$, $(q_1 + 1)_3 \neq 3$, $q_1 - 1 \neq 2^{k_1}$ аналогично получаем противоречие. □

Лемма 17. *Пусть* $\{G, G_1\} = \{A_2^{\pm}(q), C_2(q_1)\}$, *где* $(q \mp 1)_3 \neq 3$, $q \pm 1 = 2^k > 4$. *Тогда графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_2(q), C_2(q_1)\}$, где $2 < q_1$ четно, $(q-1)_3 \neq 3$, $q + 1 = 2^k > 4$. Рассмотрим все коклики в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_3(q)\}$, $\{p, r_3(q)\}$, $\{r_1(q), r_3(q)\}$ при $r_1(q) \neq 2$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_4(q_1)\}$, $\{r_1(q_1), r_4(q_1)\}$, $\{r_2(q_1), r_4(q_1)\}$. Положим $A = \{\{p, r_3(q)\} \cup \{\{r_1(q), r_3(q)\} \mid r_1(q) \neq 2\}$, $B = \{\{r_1(q_1), r_4(q_1)\} \cup \{\{r_2(q_1), r_4(q_1)\} \mid r_1(q_1) \neq 2\}$.

Заметим, что $\{2, r_4(q_1)\} = \{2, r_3(q)\}$, т. е. $R_4(q_1) = R_3(q)$. Так как $A = B$, то $\pi(q_1^2 - 1) = \pi(q(q-1)) \setminus \{2\}$. Так как $q_1 = 2^f$ и $q = 2^k - 1$, то $\pi(2^{2f} - 1) = \pi((2^k - 1)(2^{k-1} - 1))$. Если $k > 2f$, то по лемме 1 существует $t \in \pi(2^k - 1) \setminus \pi(2^{2f} - 1)$; противоречие. Если $6 \neq 2f > k$, то по лемме 1 существует $t_1 \in \pi(2^{2f} - 1) \setminus \pi((2^{k-1} - 1)(2^k - 1))$; противоречие. Пусть $2f = 6$. Тогда $\pi((2^{k-1} - 1)(2^k - 1)) = \{3, 7\}$. По лемме 1 имеем $k = 3$ и $q_1 = 7$. По лемме 12 получаем противоречие. Пусть $2f = k$. Тогда $\pi((2^{k-1} - 1)(2^k - 1)) = \pi(2^k - 1)$. Если $k \neq 7$, то по лемме 1 существует $t_2 \in \pi(2^{k-1} - 1) \subseteq \pi(2^k - 1)$, но $(2^{k-1} - 1, 2^k - 1) = 1$; противоречие. Если $k = 7$, то $\{127\} = \{3, 7, 127\}$; противоречие.

В случаях пары $\{G, G_1\}$, равной $\{{}^2A_2(q), C_2(q_1)\}$, где $2 < q_1$ четно, $(q+1)_3 \neq 3$, $q - 1 = 2^k > 8$; $\{A_2(q), C_2(q_1)\}$, где $3 < q_1$ нечетно, $(q-1)_3 \neq 3$, $q + 1 = 2^k > 4$; $\{{}^2A_2(q), C_2(q_1)\}$, где $3 < q_1$ нечетно, $(q+1)_3 \neq 3$, $q - 1 = 2^k > 8$, аналогично получаем противоречие. □

Лемма 18. *Пусть* $G = A_3^{\pm}(q)$ *и* G_1 *— неизоморфная группе* G *конечная простая классическая группа над полем порядка* q_1. *Тогда графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. По табл. 1, 2 либо пара $\{G, G_1\}$ равна $\{A_3^{\pm}(q), A_3^{\pm}(q_1)\}$ или $\{A_3^{\pm}(q), A_5^{\pm}(q_1)\}$, либо $G = A_3^{\pm}(q)$ и $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$.

Рассмотрим случай $\{G, G_1\} = \{A_3^{\pm}(q), A_3^{\pm}(q_1)\}$, где q четно. Предположим, что $\{G, G_1\} = \{A_3(q), A_3(q_1)\}$, где $q > 4$, $q_1 > 5$ и $(q_1 - 1)_2 = 4$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядка 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_3(q), r_4(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{p_1, r_3(q_1), r_4(q_1)\}$; $\{2, r_3(q_1), r_4(q_1)\}$. Заметим, что в $GK(G)$ нет коклики $\{p_1, r_3(q), r_4(q)\}$; противоречие.

В случае $\{G, G_1\} = \{A_3(q), {}^2A_3(q_1)\}$, где $4 < q$ четно, $q_1 \neq 3$, $(q_1 + 1)_2 = 4$; $\{G, G_1\} = \{{}^2A_3(q), A_3(q_1)\}$, где $8 < q$ четно, $q_1 > 5$ и $(q_1 - 1)_2 = 4$; $\{G, G_1\} = \{A_3^{\pm}(q), A_3^{\pm}(q_1)\}$, где qq_1 нечетно, аналогично получаем противоречие.

Рассмотрим случай $G = A_3^{\pm}(q)$, $G_1 = A_5^{\pm}(q_1)$. Рассматривая равенство коклик в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем противоречие.

Рассмотрим случай $G = A_3^{\pm}(q)$, $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$. Рассматривая равенство коклик в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$ и используя лемму 6, получаем противоречие. □

Лемма 19. *Пусть* $G = A_4^{\pm}(q)$, $G_1 \neq A_2^{\pm}(q)$ *и* $GK(G) = GK(G_1)$. *Тогда* $G_1 \in \{A_4^{\pm}(q_1), {}^3D_4(q_1)\}$.

Доказательство. По табл. 1, 2 либо $G_1 = G_2(q_1)$, либо $G_1 \in \{A_4^{\pm}(q_1), {}^3D_4(q_1)\}$. Если $\{G, G_1\} = \{A_4^{\pm}(q), G_2(q_1)\}$, то рассматривая равенство коклик в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем противоречие. □

Лемма 20. *Пусть* $G = A_5^{\pm}(q)$, $G_1 \neq A_3^{\pm}(q)$ *и* $GK(G) = GK(G_1)$. *Тогда* $G_1 \in \{B_3(q_1), C_3(q_1), D_4(q_1)\}$.

Доказательство. По табл. 1, 2 получаем заключение леммы. □

Из лемм 13–21 и теоремы 1 (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2016. Т. 22, № 3. С. 101–116) следует теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 16-е изд. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-т, 2006.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
6. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
8. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
9. **Gerono G.C.** Note sur la *ré*solution en nombres entiers et positifs de l'*é*quation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
10. **Crescenzo P.** A Diophantine Equation Which Arises in the Theory of Finite groups // Adv. in Math. 1975. Vol. 17. P. 25–29.
11. **Zavarnitsine A.V.** Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. Vol. 7. P. 81–97.
12. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elec. Math. Rep. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Зиновьева Марианна Рифхатовна Поступила 10.07.2018
канд. физ.-мат. наук, старший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

REFERENCES

1. *Kourovskaya tetrad': Nereshennye voprosy teorii grupp* (The Kourovka Notebook: Unsolved Problems of Group Theory). Edited by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 16th ed., IM RAN, Novosibirsk, 2006, 177 p. ISBN: 5-94356-348-2 .
2. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
3. Zvezdina M.A. On nonabelian simple groups having the same prime graph as an alternating group. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 47–55. doi: 10.1134/S0037446613010072 .
4. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363 .
5. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .
6. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. An Adjacency Criterion for the Prime Graph of a Finite Simple Group. *Algebra and Logic*, 2005, vol. 44, no. 6, pp. 381–406. doi: 10.1007/s10469-005-0037-5 .
7. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 291–322. doi: 10.1007/s10469-011-9143-8 .
8. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444 .
9. Gerono G.C. Note sur la *ré*solution en nombres entiers et positifs de l'*é*quation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math. (2)*, 1870, vol. 9, pp. 469–471.

10. Crescenzo P. A Diophantine Equation Which Arises in the Theory of Finite Groups. *Adv. in Math.*, 1975, vol. 17, no. 1, pp. 25–29. doi: 10.1016/0001-8708(75)90083-3 .
11. Zavarnitsine A.V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders. *J. Group Theory*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 81–97. doi: 10.1515/jgth.2003.044 .
12. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elec. Math. Rep.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on July 10, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Integrated Program for Fundamental Research of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. 18-1-1-17) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Marianna Rifkhatovna Zinov'eva, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru .