ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРАФЫ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ r

А. Х. Журтов

А.Ноймайер перечислил параметры сильно регулярных графов с наименьшим собственным значением $-m$. Как следствие, доказано, что для данного натурального числа r существует лишь конечное число псевдогеометрических графов для $pG_{s-r}(s,t)$ с параметрами, отличными от параметров сети $pG_{s-r}(s,s-r)$ и от параметров $pG_{s-r}(s,(s-r)(r+1)/r)$ (s делится на r) дополнительного графа для блочного графа 2-схемы Штейнера. В работе явно указаны такие функции $f(r)$, $g(r)$, что для $s>f(r)$ или для $t>g(r)$ любой псевдогеометрический граф для $pG_{s-r}(s,t)$ имеет параметры сети $pG_{s-r}(s,s-r)$ или параметры $pG_{s-r}(s,(s-r)(r+1)/r)$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, псевдогеометрический граф.

A. Kh. Zhurtov. Exceptional pseudogeometric graphs with eigenvalue r.

A. Neumaier enumerated the parameters of strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$. As a corollary it is proved that for a positive integer r there exist only finitely many pseudogeometric graphs for $pG_{s-r}(s,t)$ with parameters different from the parameters of the net $pG_{s-r}(s,s-r)$ and from the parameters of the $pG_{s-r}(s,(s-r)(r+1)/r)$ graph complementary to the line graph of a Steiner 2-design (s is a multiple of r). In this paper we explicitly specify functions $f(r)$ and $g(r)$ such that for $s>f(r)$ or $t>g(r)$ any pseudogeometric graph for $pG_{s-r}(s,t)$ has parameters of the net $pG_{s-r}(s,s-r)$ or parameters of $pG_{s-r}(s,(s-r)(r+1)/r)$.

Keywords: strongly regular graph, pseudogeometric graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-68-72

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим *i-окрестность* вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит ровно в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\cap[b]$ содержит ровно μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,l)\in(P,L)$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s,t)$, а в случае $\alpha=t$ геометрия называется *сетью.* Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α,s,t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

А. Ноймайер [1] доказал, что для данного натурального числа r существует лишь конечное число исключительных графов (псевдогеометрических графов для $pG_{s-r}(s,t)$ с параметрами, отличными от параметров сети $pG_{s-r}(s,s-r)$ и от параметров $pG_{s-r}(s,(s-r)(r+1)/r)$ (s делится на r) дополнительного графа для блочного графа 2-схемы Штейнера).

Мы хотим найти такие функции $f(r)$, $g(r)$, что для $s > f(r)$ или для $t > g(r)$ любой псевдогеометрический граф для $pG_{s-r}(s,t)$ имеет параметры сети $pG_{s-r}(s,s-r)$ или параметры $pG_{s-r}(s,(s-r)(r+1)/r)$.

Теорема. Имеем $g(r) = r(r+1)^5 - (r+1)$, $f(r) = r + r(r+1)g(r)/2$.

Следствие. *Если* Γ *— исключительный псевдогеометрический граф для* $pG_{s-r}(s,t)$*, то* $s \le r + r(r+1)g(r)/2$*,* $t \le r(r+1)^5 - (r+1)$*.*

Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственными значениями $n-m, -m$. Из [1, теорема 5.1] следует, что Γ является одним из следующих графов:

а) полный многодольный граф с l долями порядка m;

б) псевдогеометрический граф для $pG_{m-1}(s,m-1)$;

в) псевдогеометрический граф для $pG_m(s,m-1)$;

г) графы из некоторого конечного множества.

Графы из п. а) имеют $n = m$, $\mu = m(l-1)$ и существуют для любого $l \ge 2$.

Графы из п. б) имеют $\mu = (m-1)m$ и для достаточно большого s являются геометрическими.

Графы из п. в) имеют $\mu = m^2$, существуют для $s(s+1)$ кратного m, и для достаточно большого s являются геометрическими.

Граф из п. г) имеет множество параметров

$$(m,n,\mu,\bar{\mu},f,v,k,\bar{k},\lambda,\bar{\lambda}), \quad \mu \notin \{(m-1)m, m^2\}, \quad n > m.$$

Параметры вычисляются по m,n,μ:

$$k = \mu + m(n-m), \quad \lambda = \mu + n - 2m, \quad v = 1 + k + k(k-\lambda-1)/\mu,$$

$$\bar{k} = v - k - 1, \quad \bar{\mu} = v - 2k + \lambda, \quad \bar{\lambda} = v - 2k - 2 + \mu,$$

кратность собственного значения $n-m$ определяется как $f = (m-1)k(k+m)/(n\mu)$.

Граф назовем *исключительным* при соблюдении

(1) условия Крейна: $\mu(n-(m-1)m) \le (m-1)(n-m)(n+(m-1)m)$, если $1 < m < n$;

(2) абсолютной границы:

$$v \le f(f+3)/2 (v \le f(f+1)/2), \text{ если } \mu(n-(m-1)m) \ne (m-1)(n-m)(n+(m-1)m);$$

(3) μ-границы: $\mu \le m^3(2m-3)$ (в случае равенства имеем $n = m(m-1)(2m-1)$);

(4) границы для числа 3-лап: $n \le m(m-1)(\mu+1)/2 + m - 1$.

Лемма 1. *Пусть* $\bar{\Gamma}$ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-r}(s,t)$*. Тогда*

$$m = r+1, \quad n = m+t, \quad \bar{b}_1 = (r+1)t, \quad k = st(r+1)/(s-r), \quad \mu = r(r+1)t/(s-r).$$

В случае $\mu = 1$ *имеем* $t \le (r+1)^2$ *и* $s \le r + r(r+1)^3$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как неглавные собственные значения графа $\bar{\Gamma}$ равны r, $-(t+1)$, то $m = r+1$, $n = m+t = r+t+1$. Далее, $\bar{k} = s(t+1)$, $\bar{\lambda}+1 = s+(s-r-1)t$, поэтому $\bar{b}_1 = (r+1)t$. Имеем $k = (s+1)(1+st/(s-r)-1-s(t+1) = st(s/(s-r)+1/(s-r)-1) = st(r+1)/(s-r)$. Наконец, $\mu = k - \bar{b}_1 = r(r+1)t/(s-r)$.

Допустим, что $\mu = 1$. Тогда $s = r + r(r+1)t$, $k = st(r+1)/(r(r+1)t) = s/r = (r+1)t+1$, $b_1 = r(t+1)$ и $\lambda = k - b_1 - 1 = (r+1)t+1-r(t+1)-1 = t-r$. Отсюда $t-r+1$ делит $(r+1)t+1$.

Далее, $(t-r+1, rt+t+1) = (t^2-rt+t, rt+t+1) = ((t+1)^2, t-r+1)$ и для $d = (t+1, r)$ число $t-r+1$ делит d^2.

По условию целочисленности для $pG_{s-r}(s,t)$ число $r(r+1)t(r+t+1)$ делит $t(t+1)(r+r(r+1))(r+1)^2$, поэтому $(r+t+1)$ делит $(t+1)(r+2)(r+1)$. Далее, $(t+r+1, t+1) = (r, t+1)$, $(t+r+1, r+1) = (r+1, t)$ и $(t+r+1, r+2) = (t-1, r+2)$.

В случае $t = r$ имеем $\lambda = 0$ и $k \in \{2, 3, 7, 57\}$. Если $k = 3$, то $r = t = 1$ и $s = 3$. Если $k = 7$, то $v = 50$, поэтому $r = 2, t = 2$ и $s = 14$. Если $k = 57$, то $v = 3250$, поэтому $r = 7, t = 7$ и $s = 399$. В любом случае ввиду границы Хофмана для коклик графа $\bar{\Gamma}$ имеем $t-r+1 \le 1 + s/(r(r+1)) = 1 + (rt+r+1)/(r+1)$, поэтому $(t-r)(r+1) \le rt+r+1$ и $t \le (r+1)^2$. Отсюда $s = r + r(r+1)t \le r + r(r+1)^3$. □

Лемма 2. *Если Γ — исключительный граф с неглавными собственными значениями $n-m$, m, то $m < n < m^5(m-1)$ и $1 \le \mu \le m^3(2m-3)$.*

Доказательство. Если $n > m^4(m-1)^2$, то с учетом неравенства $\mu \le m^3 \times (2m-3)$ имеем $n > m(m-1)(\mu+1)/2 + m - 1$ и ввиду границы для числа 3-лап получаем $\mu \in \{(m-1)m, m^2\}$. Если $n \le m$, то $n = m$ и Γ — полный многодольный граф с l долями порядка m. В любом случае имеем противоречие с исключительностью графа. Значит, $m < n < m^5(m-1)$ и $1 \le \mu \le m^3(2m-3)$. □

Лемма 3. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-r}(s,t)$. Положим*

$$g(r) = r(r+1)^5 - (r+1), \quad f(r) = r + r(r+1)g(r)/2.$$

Если $s > f(r)$ или $t > g(r)$, то Γ имеет параметры сети $(t = s-r)$ или параметры $pG_{s-r}(s, (s-r)(r+1)/r)$. □

Доказательство. Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-r}(s,t)$. По лемме 2 имеем $n = t+r+1 < r(r+1)^5$. Далее, $\mu = r(r+1)t/(s-r) \ge 1$. В случае $\mu = 1$ по лемме 1 имеем $t \le (r+1)^2$ и $s \le r + r(r+1)^3$. В случае $\mu \ge 2$ имеем $s - r \le r(r+1)t/2$. Положим $g(r) = r(r+1)^5 - (r+1)$, $f(r) = r + r(r+1)g(r)/2$. Тогда заключение леммы выполняется. □

Из леммы 3 следует теорема.

Лемма 4. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s,t)$. Если $s > \alpha$, то $t \le (s+1-\alpha)^2(2\alpha-1)$.*

Доказательство. Утверждение доказано Ноймайером [1, теорема 4.5] для геометрического графа. Нетрудно увидеть, что рассуждения верны и для псевдогеометрического графа. □

Заметим, что для малых r точные значения функций f и g гораздо меньше. Так, для $r = 1$ имеем $f(1) = 31$ и $g(1) = 30$. С другой стороны, имеются точно два исключительных псевдогеометрических графа с $r = 1$ — это точечные графы для $GQ(2,4)$ и $pG_2(3,1)$ (треугольный граф $T(5)$). Следовательно, фактические значения $f(1)$ и $g(1)$ равны 3 и 4 соответственно.

Для $r = 2$ имеем $f(2) = 1451$ и $g(2) = 483$. С другой стороны, если Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-2}(s,t)$, то по [2, теорема 1] параметры (s,t) принимают одно из следующих значений:

(1) $(3,3)$, $(3,5)$, $(3,9)$, $(4,1)$, $(4,7)$, $(4,9)$, $(4,12)$, $(4,17)$, $(4,27)$;

(2) $(5,2), (5,7), (5,9), (5,12), (5,17), (5,27), (6,18), (7,25)$;

(3) $(8,5), (8,15), (8,21), (8,33), (9,42), (10,52)$;

(4) $(14,4), (14,32), (17,65), (20,9), (20,81), (32,5)$.

Следовательно, фактические значения $f(2)$ и $g(2)$ равны 32 и 81 соответственно.

Для $r = 3$ имеем $f(3) = 18411$ и $g(3) = 3068$. С другой стороны, ввиду [3] если Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-3}(s,t)$, то параметры (s,t) принимают одно из следующих значений:

(i) $(4,2),(4,4),(4,6),(4,8),(4,11),(4,12),(4,16)$;

(ii) $(5,1),(5,5),(5,6),(5,8),(5,11),(5,14),(5,16),(5,53)$;

(iii) $(6,8),(6,10),(6,17),(6,20),(6,24),(6,38),(6,52)$;

(iv) $(7,8),(7,10),(7,17),(7,20),(7,24),(7,38),(7,52),(7,80),(8,20)$;

(v) $(9,5),(9,11),(9,14),(9,16),(9,26),(9,32),(9,41),(9,56),(9,86),(9,140),(9,220),(9,500)$;

(vi) $(10,52),(10,56),(10,84),(11,32),(11,40),(12,48),(13,35),(14,66)$;

(vii) $(15,2),(15,4),(15,6),(15,8),(15,11),(15,20),(15,26),(15,36),(15,44),(15,56),(15,76),(15,116)$;

(viii) $(17,98),(18,5),(18,110),(20,9),(20,68),(20,136),(21,3),(21,150),(23,65),(23,180)$;

(ix) $(24,56)$, $(25,11)$, $(27,8)$, $(27,104)$, $(31,182)$, $(33,200)$, $(39,6)$, $(39,9)$, $(39,126)$, $(45,14)$, (45,203);

(x) $(55,26),(55,260),(55,416),(63,5),(63,20),(69,341),(105,17),(135,11)$.

Ввиду леммы 4 возможности $(s,t) = (9,220)$ и $(s,t) = (9,500)$ не возникают. Следовательно, фактические значения $f(3)$ и $g(3)$ равны 135 и 416 соответственно.

Для $r = 4$ имеем $f(4) = 124954, g(4) = 12495$.

С другой стороны, ввиду [4] если Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-4}(s,t)$, то параметры (s,t) принимают одно из следующих значений:

(1) $(5,3)$, $(5,5)$, $(5,7)$, $(5,10)$, $(5,15)$, $(5,19)$, $(5,20)$, $(5,25)$, $(6,1)$, $(6,5)$, $(6,7)$, $(6,9)$, $(6,10)$, $(6,15)$, $(6,16)$, $(6,23)$, $(6,25)$, $(6,30)$, $(6,37)$, $(7,9)$, $(7,15)$, $(7,27)$, $(7,30)$, $(7,51)$, $(7,75)$;

(2) $(8,3)$, $(8,7)$, $(8,10)$, $(8,13)$, $(8,15)$, $(8,19)$, $(8,25)$, $(8,31)$, $(8,35)$, $(8,40)$, $(8,55)$, $(8,67)$, $(8,85)$, $(8,115)$, $(9,4)$ $(9,7)$, $(9,10)$, $(9,13)$, $(9,15)$, $(9,19)$, $(9,25)$, $(9,31)$, $(9,35)$, $(9,40)$, $(9,55)$, $(9,67)$, $(9,85)$, $(9,115)$, $(9,175)$;

(3) $(10,15)$, $(10,39)$, $(10,45)$, $(10,105)$, $(11,28)$, $(11,35)$, $(11,105)$, $(12,34)$, $(12,60)$, $(12,190)$, $(13,99)$, $(13,135)$, $(14,9)$, $(14,15)$, $(14,16)$, $(14,23)$, $(14,25)$, $(14,30)$, $(14,37)$, $(14,55)$, $(14,65)$, $(14,79)$, $(14,100)$, $(14,135)$, $(14,205)$, $(15,55)$, $(15,187)$, $(16,63)$, $(16,75)$, $(16,165)$;

(4) $(18,175)$, $(19,33)$, $(19,75)$, $(19,90)$, $(19,147)$, $(20,100)$, $(21,51)$, $(22,225)$, $(23,133)$, $(24,19)$, $(24,35)$, $(24,45)$, $(24,55)$, $(24,70)$, $(24,95)$, $(24,115)$, $(24,145)$, $(24,195)$, $(24,295)$, $(26,55)$, $(27,115)$, $(27,184)$, $(28,198)$, $(31,243)$, $(32,91)$, $(32,105)$, $(32,259)$;

(5) $(33,435)$, $(34,63)$, $(34,114)$, $(34,135)$, $(34,165)$, $(35,310)$, $(36,328)$, $(38,255)$, $(39,91)$, $(39, 203)$, $(39,385)$, $(40,405)$, $(43,468)$, $(44,94)$, $(44,160)$, $(44,490)$, $(47,559)$, $(48,275)$, $(48,583)$, $(49, 135)$, $(49,387)$, $(51,235)$, $(51,658)$, $(52,684)$, $(54,175)$, $(54,325)$;

(6) $(59,231)$, $(64,99)$, $(64,255)$, $(64,315)$, $(64,411)$, $(69,156)$, $(69,455)$, $(74,217)$, $(74,735)$, $(84,352)$, $(90,645)$, $(99,171)$, $(104,275)$, $(104,450)$, $(104,775)$, $(114,869)$, $(114,1375)$, $(119,667)$, $(120,435)$, $(134,598)$, $(139,1107)$, $(144,343)$, $(144,1155)$, $(174,1445)$, $(184,846)$, $(189,1591)$, $(194,1159)$.

Следовательно, фактические значения $f(4)$ и $g(4)$ равны 194 и 1591.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33. P. 392–400. doi: 10.1007/BF01222774.
2. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 5. С. 583–586.

3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Исключительные сильно регулярные графы с собственным значением 3 // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 7–30.
4. **Махнев А.А.** Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширеня // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2014. Т. 84, № 3. С. 84–85.

Журтов Арчил Хазешович

д-р физ.-мат. наук

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,

г. Нальчик

e-mail: zhurtov_a@mail.ru

Поступила 05.06.2018

REFERENCES

1. Neumaier A. Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$. *Arch. Math.*, 1979, vol. 33, no. 1, pp. 392–400. doi: 10.1007/BF01222774 .
2. Kabanov V.V., Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On strongly regular graphs with eigenvalue 2 and their extensions. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 268–271. doi: 10.1134/S1064562410020298 .
3. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Exceptional strongly regular graphs with eigenvalue 3. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 89, no. 1, pp. 20–23. doi: 10.1134/S1064562414010050 .
4. Makhnev A.A. Strongly regular graphs with non-principal eigenvalue 4 and their extensions. *Proc. of the F. Scorina Gomel State University*, 2014, vol. 84, no. 3, pp. 84–85 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on July 5, 2018.

Archil Khazeshovich Zhurtov, Dr. Phys.-Math. Sci., Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: zhurtov_a@mail.ru .