ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 517.538+519.651

МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ НА КВАДРАТЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ[1]

Э. Б. Байрамов

Исследуется задача Чебышева на квадрате $\Pi = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon \max\{|x|, |y|\} \le 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $\mathfrak{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов заданной степени n с единичным старшим коэффициентом. Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее значение $\tau_n(\Pi)$ равномерной нормы $\|p_n\|_{C(\Pi)}$ на квадрате Π многочленов $p_n \in \mathfrak{P}_n$ и многочлен с наименьшей нормой, называемый многочленом Чебышева (для квадрата). Найдена постоянная Чебышева $\tau(Q) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n(Q)}$ для квадрата. Тем самым найдена логарифмическая асимптотика наименьшего уклонения $\tau_n(\Pi)$ по степени многочлена. Дано точное решение задачи для многочленов от первой до седьмой степени. Сужен класс многочленов в задаче, а именно, доказано, что если $n = 4m + s,\ 0 \le s \le 3$, то задачу достаточно решать на множестве многочленов $z^s q_m(z),\ q_m \in \mathfrak{P}_m$. Получены эффективные двусторонние оценки величины наименьшего уклонения $\tau_n(\Pi)$ по n.

Ключевые слова: алгебраический многочлен, равномерная норма, квадрат комплексной плоскости, многочлен Чебышева.

E. B. Bayramov. Polynomials least deviating from zero on a square of the complex plane.

The Chebyshev problem is studied on the square $\Pi = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon \max\{|x|, |y|\} \le 1\}$ of the complex plane $\mathbb{C}$. Let $\mathfrak{P}_n$ be the set of algebraic polynomials of a given degree n with the unit leading coefficient. The problem is to find the smallest value $\tau_n(\Pi)$ of the uniform norm $\|p_n\|_{C(\Pi)}$ of polynomials $p_n \in \mathfrak{P}_n$ on the square Π and a polynomial with the smallest norm, which is called the Chebyshev polynomial (for the squire). The Chebyshev constant $\tau(Q) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n(Q)}$ for the squire is found. Thus, the logarithmic asymptotics of the least deviation $\tau_n(\Pi)$ with respect to the degree of a polynomial is found. The problem is solved exactly for polynomials of degrees from 1 to 7. The class of polynomials in the problem is restricted; more exactly, it is proved that, for $n = 4m + s,\ 0 \le s \le 3$, it is sufficient to solve the problem on the set of polynomials $z^s q_m(z),\ q_m \in \mathfrak{P}_m$. Effective two-sided estimates for the value of the least deviation $\tau_n(\Pi)$ with respect to n are obtained.

Keywords: algebraic polynomial, uniform norm, square of the complex plane, Chebyshev polynomial.

MSC: 30C10, 30C15, 30E10

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-5-15

1. Введение

Алгебраические многочлены играют важную роль во многих областях математики. Многочлены имеют простую структуру, однако согласно известной теореме Вейерштрасса и ее аналогам они плотны в ряде классических функциональных пространств.

Для многочленов существует несколько экстремальных задач, которые возникли в различных разделах математики и ее приложений. Одной из таких задач является задача о многочленах Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля на компактах комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Эту задачу для отрезка впервые рассматривал и решил П. Л. Чебышев в 1854 г. [1]. Такие задачи возникают в теории приближения, численных методах, в частности при построении оптимальных квадратурных формул и др. В настоящее время точное решение задачи Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, известно лишь для ряда компактов: для отрезка, нескольких отрезков, круга, дуги окружности.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Задаче Чебышева для алгебраических многочленов в равномерной норме, в интегральной норме с весами, для рациональных дробей, для тригонометрических полиномов и тригонометрических рациональных дробей посвящена обширная литература (см. монографии [2; 3], статьи [1; 4] и приведенную в них библиографию). Задаче Чебышева на дугах окружности для многочленов с нулями на этих дугах посвящены работы [5; 6]; такой задаче на нескольких дугах посвящены работы [5; 7]. Близкие задачи и развитие этой тематики см. в [8–12].

В данной работе рассматривается задача Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной норме на единичном квадрате $\Pi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ |x| \le 1, \ |y| \le 1\}$ комплексной плоскости. Будет приведено решение задачи для малых значений порядков многочленов, найдена логарифмическая асимптотика наименьшего уклонения по степени многочлена, получены двусторонние оценки величины наименьшего уклонения, приведены некоторые общие результаты, которые, в частности, позволяют строить гипотезу о расположении нулей экстремальных многочленов. Результаты исследований были анонсированы автором в докладе на Международной (49-й Всероссийской) молодежной школе-конференции “Современные проблемы математики и ее приложений” (Екатеринбург, 3–9 февраля 2018 г.) [13].

1.1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathscr{P}_n$ множество алгебраических многочленов

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

порядка (не выше) n с комплексными коэффициентами, а через $\mathfrak{P}_n$ множество многочленов

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \tag{1.1}$$

из $\mathscr{P}_n$ с единичным старшим коэффициентом. Для компакта $Q \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ определим величину наименьшего (наилучшего) равномерного уклонения от нуля многочленов (1.1) на компакте Q:

$$\tau_n(Q) = \min\{\|p_n\|_{C(Q)} \colon p_n \in \mathfrak{P}_n\}. \tag{1.2}$$

Многочлены, на которых в (1.2) достигается минимум (экстремальные многочлены задачи (1.2)), называют *многочленами Чебышева* для компакта Q.

Целью данной работы является изучение задачи Чебышева

$$\tau_n(\Pi) = \min\{\|p_n\|_{C(\Pi)} \colon p_n \in \mathfrak{P}_n\} \tag{1.3}$$

для квадрата

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} \colon \max\{|\Re z|, |\Im z|\} \le 1\}\,. \tag{1.4}$$

1.2. Задача Чебышева для круга

Хорошо известно решение задачи (1.2) для круга, см., например, [2, гл. V, § 1]. Результат для круга будет использоваться в дальнейшем, поэтому мы его точно сформулируем. Обозначим через ϱD круг радиуса $\varrho > 0$ с центром в начале координат: $\varrho D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le \varrho\}$; здесь символом D обозначен единичный круг. Для круга ϱD имеет место равенство

$$\tau_n(\varrho D) = \varrho^n, \tag{1.5}$$

и многочлен z^n является экстремальным.

2. Многочлены Чебышева на квадрате

2.1. Постоянная Чебышева квадрата

Хорошо известно (см., например, [14, гл. VII, §1]), что для произвольного компакта Q существует предел последовательности $\sqrt[n]{\tau_n(Q)}$; величину

$$\tau(Q) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n(Q)} \tag{2.1}$$

называют *постоянной Чебышева* для компакта Q.

В этой части работы будет выписано значение постоянной Чебышева для квадрата П, т. е. получена логарифмическая асимптотика изучаемой величины $\tau_n(\Pi)$ при $n \to \infty$.

Постоянная Чебышева для компакта хорошо изучена в геометрической теории функций комплексного переменного. В частности, установлена (см., например, [14, гл. VII]) ее взаимосвязь с характеристиками компактов плоскости. Так, известно, что величина $\tau(Q)$ совпадает с *трансфинитным диаметром* $d(Q)$ (Фекете, 1923) и с *емкостью* $C(Q)$ компакта Q (Сеге, 1924). Таким образом, справедлива цепочка равенств

$$\tau(Q) = d(Q) = C(Q).$$

Мы, следуя достаточно стандартному подходу, выпишем эту величину для квадрата, используя ее взаимосвязь с конформным радиусом дополнительной области (внешним конформным радиусом квадрата). Точнее, будем использовать следующий факт. Пусть Q является связным неодноточечным компактом (ограниченным континуумом). Дополнение $\mathbb{C} \setminus Q$ к нему состоит из конечного, или счетного, числа непересекающихся областей. Ту из областей, которая содержит бесконечность, обозначим через G; эта область является односвязной. Допустим, что однолистное отображение $\zeta = f(z)$ переводит область G во внешность единичного круга $\{\zeta\colon |\zeta| > 1\}$ так, что $f(\infty) = \infty$. Величина, определяемая равенством

$$R(G) = \frac{1}{|f'(\infty)|}, \tag{2.2}$$

т. е. такое число, что область G однолистно отображается на $|z| > R(G)$ посредством нормированной функции $\zeta = F(z)$, $F(\infty) = \infty$, $F'(\infty) = 1$, есть *конформный радиус* области G. Справедливо следующее утверждение [15; 14, гл. VII, §4].

Теорема (Фекете, 1923). *Пусть Q является связным неодноточечным компактом. Тогда справедливо равенство*

$$R(G) = \tau(Q) = d(Q) = C(Q).$$

В нашем случае компакт Q — это квадрат П и $G = \mathbb{C} \setminus \Pi$. В силу теоремы Фекете для вычисления постоянной Чебышева $\tau(\Pi)$ квадрата П достаточно найти конформный радиус $R(\mathbb{C} \setminus \Pi)$ области $\mathbb{C} \setminus \Pi$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\tau(\Pi) = R(\mathbb{C} \setminus \Pi) = \sqrt{\pi}\Big\{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Big\}^{-2}, \tag{2.3}$$

в котором Γ есть Γ-функция Эйлера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать формулу Кристоффеля — Шварца для отображения единичного круга D во внешность многоугольника (см., например, [16, п. 4.4; 17, п. 6.3])

$$w(z) = A + C \int\limits_{z_1}^{z} t^{-2} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{t}{z_k}\Big)^{1-\alpha_k} dt, \tag{2.4}$$

в которой z_k — точки единичного круга, переходящие в вершины многоугольника, и $\pi\alpha_k$ — внутренние углы при соответствующих вершинах. Как обычно, в подынтегральном выражении степень с нецелым показателем $1-\alpha_k$ понимается как значение произвольной фиксированной однозначной аналитической ветви функции $\zeta^{1-\alpha_k}$, определенной в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Ясно, что для отображения (2.4) справедливо равенство $w(0)=\infty$.

Построим отображение внешности единичного круга на внешность квадрата Π. Вначале построим отображение $w = w(z)$ внешности единичного круга на внешность квадрата с вершинами в точках $z_k = e^{i\frac{\pi(k-1)}{2}}$, $k=\overline{1,4}$, удовлетворяющее равенствам $w(z_k) = z_k$, $k = \overline{1,4}$. Такое отображение известно (см., например, [18, гл. IX, § 1, задача 1236]); тем не менее мы сейчас осуществим построение этого отображения, а точнее, выбор значений параметров в (2.4). Подставляя в формулу (2.4) точки z_k, получаем

$$w(z) = A + C \int\limits_{1}^{z} t^{-2}\left(1-t^4\right)^{1/2} dt.$$

Условие $w(1) = 1$ дает равенство $A = 1$. Аналогично, используя равенство $w(i) = i$, получим

$$i - 1 = C \int\limits_{1}^{i} t^{-2}\left(1-t^4\right)^{1/2} dt = C\, i \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-i\tau}\left(1 - e^{4i\tau}\right)^{1/2} d\tau = C\, i\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^{1/2} 2\tau\, d\tau.$$

Преобразовав последний интеграл с помощью формулы (см., например, [19, т. 2, гл. XIV, § 5]) $\int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} 2\tau\, d\tau = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\Big(\dfrac{3}{4}\Big)$, получим, что

$$C = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big\}^{-2}.$$

Функция g, которая осуществляет отображение внешности единичного круга на внешность квадрата Π, определяется равенством $g(\zeta) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} w\left(1/\zeta\right)$, т. е. имеет вид

$$g(\zeta) = e^{-i\pi/4}\, C_0 \int\limits_{1/\zeta}^{1} (1-t^4)^{1/2} t^{-2}\, dt + A_0, \quad C_0 = i\sqrt{\pi}\Big\{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big\}^{-2}, \quad A_0 = 1 - i.$$

Функция g является обратной к функции f из определения (2.2) конформного радиуса, т. е. однолистно отображающей внешность квадрата на внешность круга. Следовательно, для конформного радиуса имеем равенство

$$R(\mathbb{C}\setminus\Pi) = \frac{1}{|f'(\infty)|} = |g'(\infty)|.$$

Вычисляя производную функции g, получим равенство

$$g'(\zeta) = e^{-i\pi/4}\, C_0 \Big(1 - \frac{1}{\zeta}\Big)^{1/2}.$$

Отсюда следует соотношение $R(\mathbb{C}\setminus\Pi) = |g'(\infty)| = |C_0|$. Применив теперь теорему Фекете, получим равенство (2.3) теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. *Постоянная Чебышева* (2.3) *для квадрата имеет следующее приближенное значение*:
$$\tau(\Pi) \approx 1.18034.$$

Следствие 2. *В силу определения* (2.1) *постоянной Чебышева и утверждения* (2.3) *при любом* $\varepsilon > 0$ *для достаточно больших* n *справедливы неравенства*
$$\Big\{\sqrt{\pi}\Big[\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big]^{-2} - \varepsilon\Big\}^n < \tau_n(\Pi) < \Big\{\sqrt{\pi}\Big[\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big]^{-2} + \varepsilon\Big\}^n.$$

Для сравнения с последующими результатами заметим, что имеют место соотношения
$$1.0574 \approx \Big(\frac{5}{4}\Big)^{1/4} < \tau(\Pi) = \sqrt{\pi}\Big\{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big\}^{-2} < \Big(\frac{5}{2}\Big)^{1/4} \approx 1.2574.$$

2.2. Многочлены Чебышева малых порядков на квадрате

В этом разделе будет дано решение задачи (1.3) для многочленов до порядка 7. В обосновании результатов будет использоваться (линейный) функционал
$$F_n(f) = F_n(f, \zeta) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\zeta e^{i\frac{2\pi j}{n+1}}\right), \quad \zeta \in \varrho D. \tag{2.5}$$

Отметим некоторые его свойства. Для функции $f(z) = z^k,\ k \in \mathbb{Z}$, имеем
$$F_n(z^k) = \zeta^k \sum_{j=0}^{n} e^{i\frac{2jk\pi}{n+1}} = \zeta^k \sum_{j=0}^{n} \left(e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)^j.$$

В случае, когда k кратно $n+1$, т. е. $k = m(n+1),\ m \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство
$$F_n(z^k) = \zeta^k \sum_{j=0}^{n} e^{i2\pi m} = (n+1)\zeta^k.$$

Иначе, т. е. если k не является кратным $n+1$, получаем
$$F_n(z^k) = \zeta^k \frac{1 - e^{i\frac{2\pi(n+1)}{n+1}}}{1 - e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}} = 0.$$

Как следствие, для полинома (1.1) имеем $F_n(zp_n(z)) = \zeta^{n+1}(n+1)$.

Теорема 2. *Для* $n = 1, 2, 3$ *имеет место равенство*
$$\tau_n(\Pi) = \big(\sqrt{2}\big)^n$$
и многочлен $q_n(z) = z^n$ *является экстремальным.*

Доказательство. Оценкой сверху величины $\tau_n(\Pi)$ является норма произвольного многочлена из $\mathfrak{P}_n$. В качестве такого многочлена рассмотрим многочлен $q_n(z) = z^n$. В результате для произвольного $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенство
$$\tau_n(\Pi) \le \|q_n\|_{C(\Pi)} = \big(\sqrt{2}\big)^n.$$

Впрочем, последнее неравенство также следует из вложения $\Pi \subset \sqrt{2}D$ и равенства (1.5).

Для оценки $\tau_n(\Pi)$ снизу воспользуемся функционалом (2.5) с $\zeta = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Вершины квадрата Π лежат на окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, поэтому для произвольного многочлена $p_n \in \mathfrak{P}_n$ при $1 \le n < 4$ имеем

$$\left(\sqrt{2}\right)^{4-n}\|p_n\|_{C(\Pi)} \ge \|z^{4-n}p_n(z)\|_{C(\Pi)} \ge \frac{1}{4}\left|F_3(z^{4-n}p_n(z))\right| = \left(\sqrt{2}\right)^4$$

и, следовательно, справедливо неравенство $\tau_n(\Pi) \ge \left(\sqrt{2}\right)^n$. Теорема 2 доказана.

Обозначим через p_n^* при $n = 4, 5, 6, 7$ многочлены, определяемые равенством

$$p_n^*(z) = z^s(z^4 + h_s), \quad n = 4 + s, \quad s = 0, 1, 2, 3, \tag{2.6}$$

где параметры h_s являются положительными корнями уравнения $|p_n^*(1+i)| = |p_n^*(1)|$ и имеют явный вид

$$h_s = \frac{4\left(\sqrt{2}\right)^s - 1}{\left(\sqrt{2}\right)^s + 1}.$$

Многочлены p_n^*, $n = 4, 5, 6, 7$, обладают (по построению) следующими свойствами:

1) четыре нуля многочлена p_n^* симметричны и находятся на диагоналях квадрата, остальные $s = n - 4$ — в начале координат;

2) норма многочлена p_n^* достигается в вершинах квадрата и в серединах его сторон, т. е. справедливо равенство

$$\|p_n^*\|_{C(\Pi)} = \left|p_n^*\left(\sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}\right)\right| = \left|p_n^*\left(e^{i\frac{\pi k}{2}}\right)\right| = \frac{5\left(\sqrt{2}\right)^s}{\left(\sqrt{2}\right)^s + 1}, \quad k = \overline{0,3}.$$

Вид многочленов p_n^*, $n = 4, 5, 6, 7$, и гипотеза об их экстремальности появились в результате численного эксперимента. В следующем утверждении этот факт будет доказан аналитически.

Теорема 3. *Для $n = 4, 5, 6, 7$ справедливо равенство*

$$\tau_n(\Pi) = \frac{5\left(\sqrt{2}\right)^s}{\left(\sqrt{2}\right)^s + 1}, \quad s = n - 4.$$

Многочлены вида (2.6) *являются экстремальными в задаче* (1.3), *т. е. многочленами Чебышева на квадрате.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для обоснования теоремы будем использовать функционал, определяемый равенством

$$P(f) = aF_3(f, \zeta) + bF_3(f, 1), \tag{2.7}$$

в котором $\zeta = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Вычислим значение функционала P для функции $f(z) = z^{-s}p_n(z)$, $p_n \in \mathfrak{P}_n$. Используя свойства функционала F_3, получаем

$$P(f) = 4(a\zeta^4 + b) + 4c_s(a + b),$$

где c_s — коэффициент многочлена p_n при z^s. Свяжем параметры a и b в определении функционала (2.7) равенством $b = -a$. В этом случае для произвольного полинома $p_n \in \mathfrak{P}_n$, имеем

$$P(f) = 4a(\zeta^4 - 1) = -20a. \tag{2.8}$$

С другой стороны, справедлива цепочка неравенств

$$|P(f)| \le |a|\left(|F_3(f,\zeta)| + |F_3(f,1)|\right) \le 4|a|\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-s} + 1\right)\|p_n\|_{C(\Pi)}. \tag{2.9}$$

Объединив соотношения (2.8) и (2.9), получим оценку снизу

$$\|p_n\|_{C(\Pi)} \geq \frac{5\left(\sqrt{2}\right)^s}{\left(\sqrt{2}\right)^s + 1}.$$

Для получения оценки величины $\tau_n(\Pi)$ сверху достаточно рассмотреть многочлены p_n^*, определенные равенством (2.6). Теорема доказана.

В завершение этой части работы приведем гипотезу о виде экстремального многочлена (многочлена Чебышева) восьмой степени (в случае $n = 8$), полученного по результатам численного эксперимента:

$$\widetilde{p}_8^*(z) = (z^4 + t_1)(z^4 + t_2).$$

Значения параметров t_1 и t_2 такие, что многочлен $\widetilde{p}_8^*$ удовлетворяет системе равенств

$$|\widetilde{p}_8^*(1)| = |\widetilde{p}_8^*(1+i)| = |\widetilde{p}_8^*(1+ix)| = |\widetilde{p}_8^*(1-ix)| = \|\widetilde{p}_8^*\|_{C(\Pi)},$$

где число x, $0 < x < 1$, является корнем уравнения

$$2x^{14} - 54x^{12} - 305x^{10} - 663x^8 + 1607x^6 + 5145x^4 + 2976x^2 - 708 = 0.$$

Параметры x, t_1 и t_2 имеют следующие приближенные значения:

$$x = 0.42355, \quad t_1 = 0.13359, \quad t_2 = 2.86641.$$

Соответственно этот многочлен дает для величины $\tau_8(\Pi)$ приближенное значение 4.38293.

3. Некоторые свойства многочленов Чебышева для квадрата

3.1. Сужение класса экстремальных многочленов

Теорема 4. *Для любого $n = 4m + s$, $0 \leq s \leq 3$, существует многочлен Чебышева на квадрате степени n с вещественными коэффициентами вида*

$$p_n^*(z) = z^s\, q_m(z^4), \quad q_m \in \mathfrak{P}_m. \tag{3.1}$$

Доказательство. Для произвольного многочлена $p_n \in \mathscr{P}_n$ обозначим через $\widetilde{p_n}$ многочлен, определенный равенством

$$\widetilde{p}_n(z) = \frac{1}{2}\left(p_n(z) + \overline{p_n(\overline{z})}\right).$$

Многочлен $\widetilde{p}_n$ имеет вещественные коэффициенты и справедливо неравенство

$$|\widetilde{p}_n(z)| \leq \frac{1}{2}\left(|p_n(z)| + |\overline{p_n(\overline{z})}|\right),$$

а потому и неравенство $\|\widetilde{p}_n\|_{C(\Pi)} \leq \|p_n\|_{C(\Pi)}$. Отсюда следует, что в задаче (1.3) при любом $n \geq 1$ существует многочлен Чебышева с вещественными коэффициентами.

Обоснуем теперь представление (3.1). Вначале рассмотрим случай n, кратных четырем, т. е. $n = 4m$, $m \in \mathbb{Z}$. Воспользуемся конкретным вариантом функционала (2.5):

$$F_3(f, z) = \sum_{j=0}^{3} f\left(ze^{i\pi j/2}\right).$$

Сопоставим произвольному многочлену

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \tag{3.2}$$

многочлен

$$p_n^{\diamond}(z) = \frac{1}{4} F_3(p_n, z) = \sum_{j=0}^{m} c_{4j} z^{4j}; \tag{3.3}$$

этот многочлен получается из (3.2) отбрасыванием членов $c_k z^k$ со степенями, не кратными четырем. Для произвольной точки $z \in \Pi$ справедливо неравенство

$$|p_n^{\diamond}(z)| = \left|\frac{1}{4} F_3(p_n, z)\right| \le \|p_n\|_{C(\Pi)}.$$

Следовательно, равномерная норма на квадрате Π многочлена (3.3) не больше, чем норма многочлена (3.2), т. е. справедливо неравенство $\|p_n^{\diamond}\|_{C(\Pi)} \le \|p_n\|_{C(\Pi)}$. Многочлен (3.3) имеет вид

$$p_n^{\diamond}(z) = q_m(z^4), \quad q_m(\zeta) = \sum_{j=0}^{m} c_{4j} \zeta^j. \tag{3.4}$$

При этом если $p_n \in \mathfrak{P}_n$, то $q_m \in \mathfrak{P}_m$. Более того, если коэффициенты многочлена p_n вещественные, то коэффициенты обоих многочленов (3.4) также будут вещественными. Утверждения теоремы 4 для $n = 4m$ доказаны.

Теперь рассмотрим случай $n = 4m + s$, $s \in \{1, 2, 3\}$. Произвольному многочлену $p_n \in \mathscr{P}_n$ сопоставим многочлен

$$p_n^{\diamond}(z) = \frac{1}{4}\, z^s F_3(f_n, z) = \sum_{j=0}^{m} c_{4j+s}\, z^{4j+s}, \quad f_n(z) = z^{-s} p_n(z).$$

Этот многочлен можно записать в виде

$$p_n^{\diamond}(z) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} e^{-i\pi s j/2} p_n(z e^{i\pi j/2}).$$

Отсюда следует неравенство $\|p_n^{\diamond}\|_{C(\Pi)} \le \|p_n\|_{C(\Pi)}$. Теорема 4 доказана полностью.

З а м е ч а н и е. Обозначим через Ω компакт плоскости, являющийся образом квадрата Π при отображении $w = z^4$, т. е.

$$\Omega = \left\{ w \in \mathbb{C} \colon w = z^4,\, z \in \Pi \right\}. \tag{3.5}$$

Из теоремы 4 следует, что при $n = 4m,\ m \ge 1$, имеет место равенство

$$\tau_{4m}(\Pi) = \tau_m(\Omega). \tag{3.6}$$

3.2. Эффективные оценки величины наименьшего уклонения (1.3)

Вложения $D \subset \Pi \subset \sqrt{2} D$ и утверждение (1.5) дают при произвольном n оценки

$$1 \le \tau_n(\Pi) \le \left(\sqrt{2}\right)^n.$$

Теорема 4 позволяет получить более точные оценки.

Теорема 5. *При* $n = 4m + s$, $0 \le s \le 3$, $m > 1$, *для* $\tau_n(\Pi)$ *справедливы двусторонние оценки*

$$2\Big(\frac{5}{4}\Big)^m \le \tau_n(\Pi) \le \frac{5\,(\sqrt{2})^s}{(\sqrt{2})^s + 1}\Big(\frac{5}{2}\Big)^{m-1}. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для множества (3.5) имеют место вложения

$$[-4, 1] \subset \Omega \subset \widetilde{D}, \quad \widetilde{D} = \{w \,:\, |w + 3/2| \le 5/2\}.$$

Поэтому при $n = 4m$, применяя утверждение (3.6), будем иметь следующую цепочку соотношений

$$2\Big(\frac{5}{4}\Big)^m = \tau_m([-4, 1]) \le \tau_m(\Omega) = \tau_{4m}(\Pi) \le \tau_m(\widetilde{D}) = \Big(\frac{5}{2}\Big)^m. \tag{3.8}$$

А это и есть (3.7) для рассматриваемого случая.

Теперь рассмотрим случай $n = 4m + s$, $1 \le s \le 3$, $m > 1$. С помощью многочленов Чебышева p^*_{4+s}, $p^*_{4(m-1)}$ соответствующих порядков определим многочлен $p_n = p^*_{4+s}p^*_{4(m-1)}$. Имеем

$$\tau_n(\Pi) \le \|p_n\|_{C(\Pi)} \le \|p^*_{4+s}\|_{C(\Pi)}\,\|p^*_{4(m-1)}\|_{C(\Pi)} = \tau_{4+s}(\Pi)\,\tau_{4(m-1)}(\Pi).$$

Используя теорему 3 и последнее неравенство в (3.8), получим оценку сверху величины $\tau_n(\Pi)$ теоремы 5.

Согласно теореме 4 существует многочлен Чебышева вида $p^*_n(z) = z^s\,q_m(z^4)$, $q_m \in \mathfrak{P}_m$. Пусть точка z_0 такая, что $\left|q_m\left(z_0^4\right)\right| = \left\|q_m\left(z^4\right)\right\|_{C(\Pi)}$, которая (по принципу максимума) принадлежит контуру квадрата Π и, следовательно, удовлетворяет неравенству $|z_0| \ge 1$. Тогда первое неравенство (3.8) и цепочка соотношений

$$\tau_n(\Pi) = \|p^*_n\|_{C(\Pi)} \ge |z_0|^s\,\left|q_m\left(z_0^4\right)\right| \ge \left\|q_m\left(z^4\right)\right\|_{C(\Pi)} \ge \tau_{4m}(\Pi)$$

завершают доказательство теоремы 5.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за постановку задачи и помощь в исследованиях, а также Р. Р. Акопяна за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чебышев П.Л.** Теория механизмов, известных под названием параллелограмов // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева: в 5 т. Т. 2: Математический анализ. М.; Л. : АН СССР, 1947. С. 23–51.
2. **Смирнов В.И.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л. : Наука, 1964. 327 с.
3. **Milovanovic G.V.** Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994. 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .
4. **Thiran J.-P.** Chebyshev polynomials on circular arcs in the complex plane // Progress in Approximation Theory / eds. P. Nevai, A. Pinkus. Boston: Acad. Press, 1991. P. 771–786. ISBN: 0-12-516750-4 .
5. **Маергойз Л.С.** Многочлены Чебышева с нулевым множеством на дуге окружности // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 1. С. 26–28.
6. **Лукашов А.Л.** Экстремальные полиномы на дугах окружности с нулями на этих дугах // Изв. НАН Армении. Математика 2009. № 3. С. 19–29.
7. **Лукашов А.Л.** Неравенства для производных рациональных функций // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, № 3. С. 115–138.
8. **Арестов В.В.** О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 6. С. 733–736.
9. **Arestov V.V.** Trigonometric polynomials that deviate the least from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852–1878. doi: 10.1016/j.jat.2010.07.007 .

10. **Арестов В.В.** Алгебраические многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля по мере на отрезке // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 292–301.
11. **Бабенко А.Г.** Неравенства слабого типа для тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 34–41.
12. **Бернштейн С.Н.** Экстремальные свойства полиномов. М. : ОНТИ, 1937. 203 р.
13. **Байрамов Э.Б.** О многочленах Чебышева на квадрате комплексной плоскости // Современные проблемы математики и ее приложений: тез. докл. Междунар. 49-й мол. шк.-конф. / ИММ УрО РАН, УрФУ. Екатеринбург, 2018. С. 72.
14. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного: учебное пособие. М., Л. : Наука ГИТТЛ, 1952. 628 с.
15. **Fekete M.** Über die Verteilung der Wuzzeln bei gewissen algebraiscnen Gleichugen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. 1923. Vol. 17, no. 1. P. 228–249.
16. **Tobin A.D., Lloyd N.T.** Schwarz-Christoffel mapping: textbook. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2002. 132 p. ISBN: 9780511029110 .
17. **Иванов В.И., Попов В.Ю.** Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 324 с.
18. **Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. Наука, 1975. 320 с.
19. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2001. 864 р.

Байрамов Эмир Батырович
инженер-исследователь
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: mrequ@yandex.ru

Поступила 01.07.2018

REFERENCES

1. Chebyshev P.L. Theory of the mechanisms known as parallelograms. In: Chebyshev P. L. *Collected works. Vol. II. Mathematical analysis.* Moscow; Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1947, 520 p., pp. 23–51.
2. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* London: Iliffe Books Ltd., 1968, 488 p. Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 327 p.
3. Milovanovic G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M. *Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros.* Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994, 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .
4. Thiran J.-P., Detaille C. Chebyshev polynomials on circular arcs in the complex plane. In: *Progress in Approximation Theory*, P. Nevai, A. Pinkus (eds.). Boston, QA: Academic Press, 1991, pp. 771–786. ISBN: 0-12-516750-4 .
5. Maergoiz L.S., Rybakova N.N. Chebyshev polynomials with zeros lying on a circular arc. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 319–321. doi: 10.1134/S1064562409030053 .
6. Lukashov A.L., Tyshkevich S.V. Extremal polynomials on arcs of the circle with zeros on these arcs. *J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci.*, 2009, vol. 44, no. 3, pp. 172–179. doi: 10.3103/S1068362309030030 .
7. Lukashov A.L. Inequalities for derivatives of rational functions on several intervals. *Izv. Math.*, 2004. vol. 68, no. 3, pp. 543–565. doi: 10.1070/IM2004v068n03ABEH000488 .
8. Arestov V.V., Mendelev A.S. On trigonometric polynomials least deviating from zero. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 2, pp. 280–283. doi: 10.1134/S1064562409020343 .
9. Arestov V.V., Mendelev A.S. Trigonometric polynomials that deviate the least from zero in measure and related problems. *J. Approx. Theory*, 2010, vol. 162, no. 10, pp. 1852–1878. doi: 10.1016/j.jat.2010.07.007 .
10. Arestov V.V. Algebraic polynomials least deviating from zero in measure on a segment. *Ukr. Math. J.*, 2010, vol. 62, no. 3, pp. 331–342. doi: 10.1007/s11253-010-0357-z .
11. Babenko A.G. Weak-type inequalities for trigonometric polynomials. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 1992, vol. 2, pp. 34–41 (in Russian).

12. Bernstein S.N. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable]. Moscow; Leningrad: ONTI NKTP SSSR Publ., 1937, 203 p.
13. Bayramov E.B. On Chebyshev polynomials on a square of the complex plane. In: Makhnev A.A. (ed.): *Abstr. 49th Int. Youth School-conf. "Sovremennye problemy matematiki i ee prilozheniya" [Modern Problems in Mathematics and its Applications], Ekaterinburg, Russia, February 4–10, 2018.* Ekaterinburg, 2018, p. 72 (in Russian).
14. Goluzin G.M. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 26. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1969, 676 p. ISBN: 978-0-8218-1576-2 . Original Russian text published in Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo: uchebnoe posobie.* Moscow; Leningrad: Nauka GITTL Publ., 1952, 628 p.
15. Fekete M. Über die Verteilung der Wuzzeln bei gewissen algebraiscnen Gleichugen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math. Z.*, 1923, vol. 17, no. 1, pp. 228–249. doi: 10.1007/BF01504345 .
16. Tobin A.D., Lloyd N.T. *Schwarz-Christoffel mapping: textbook.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002, 132 p. ISBN: 9780511029110 .
17. Ivanov V.I., Popov V.Yu. *Konformnye otobrazheniya i ikh prilozheniya* [Conformal mappings and their applications]. Moscow: Editorial URSS Publ., 2002, 324 p. ISBN: 5-354-00178-1 .
18. Volkovyskii L.I., Lunts G.L., Aramanovich I.G. *A Collection of problems on complex analysis.* N Y: Dover Publ., 1991, 426 p. ISBN: 978-0486669137 . Original Russian text published in Volkovyskii L.I., Lunts G.L., Aramanovich I.G. *Sbornik zadach po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow, Nauka Publ., 1975, 320 p.
19. Fichtenholz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A Course in Differential and Integral Calculus] Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. Vol. 2. 864 p. (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on July 1, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Emir Batyrovich Bayramov, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: mrequ@yandex.ru .