ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 517.5

КОВЫПУКЛАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ ПО ТРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Для дискретных функций $f(x)$, определенных на произвольных сетках узлов $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, исследованы вопросы сохранения выпуклости (вверх или вниз) и ковыпуклости с переменой направления выпуклости рациональными сплайн–функциями $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t)) = (R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x))/(x_i - x_{i-1})$, где $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, $R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i/(x - g_i(t))$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ и $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$; положение полюса $g_i(t)$ относительно узлов x_{i-1} и x_i определяется параметром t; считаем $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$. Для таких сплайнов получены условия сохранения ковыпуклости $1/2 < |q_i| < 2$ относительно отношений $q_i = f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)/f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, $i = 2, 3, \dots, N-1$.

Ключевые слова: интерполяционный сплайн, рациональный сплайн, ковыпуклая интерполяция, формосохраняющая интерполяция.

A.-R. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Coconvex interpolation by splines with three-point rational interpolants.

For discrete functions $f(x)$ defined on arbitrary grid nodes $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, we study the issues of preserving the (upward or downward) convexity and coconvexity with a change of convexity direction by rational spline-functions $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t)) = (R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x))/(x_i - x_{i-1})$, where $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, $R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i/(x - g_i(t))$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$, and $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$. The location of the pole $g_i(t)$ with respect to the nodes x_{i-1} and x_i is defined by the parameter t. We assume that $R_0(x) \equiv R_1(x)$ and $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$. For these spines we derive the conditions $1/2 < |q_i| < 2$ of convexity preservation, where $q_i = f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)/f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ for $i = 2, 3, \dots, N-1$.

Keywords: interpolation spline, rational spline, coconvex interpolation, shape-preserving interpolation.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-164-175

Введение

Вопросы формосохраняющей интерполяции сплайн-функциями являются предметом исследования многих работ. В достаточно полной форме эти вопросы изучены для различных видов полиномиальных сплайнов. Д. Швайкерт [1] для выпуклой интерполяции кубическими сплайнами в их конструкцию ввел гиперболические функции. В.Г. Мирошниченко [2; 3] получил достаточные условия монотонной и выпуклой интерполяции кубическими сплайнами. Дальнейшие результаты и сведения об исследовании вопросов формосохранения при интерполяции полиномиальными сплайнами можно найти в работах [4; 5].

Вопросы монотонной и выпуклой интерполяции рациональными сплайнами специального вида рассматривали Р. Шабак [6] и другие авторы (см., напр., [7–9]).

В данной работе для исследования вопросов сохранения выпуклости (вверх или вниз) и ковыпуклости с произвольной переменой направления выпуклости данных применяем интерполяционные сплайн-функции $R_{N,1}(x)$, построенные по дискретным данным с использованием трехточечных рациональных интерполянтов.

Некоторые аппроксимативные свойства сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ (в частности, безусловная сходимость для функций и производных, скорость сходимости, отсутствие или наличие явления Гиббса) рассмотрены в [10–12].

Ниже получены достаточные условия ковыпуклой интерполяции с возможной переменой направления выпуклости рациональными сплайн-функциями $R_{N,1}(x)$ по произвольным сеткам узлов.

1. Обозначения и основные результаты

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, в которых определена дискретная функция $f(x)$. При $i = 1,2,\ldots,N-1$ коэффициенты рациональной функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i} \tag{1.1}$$

с произвольным полюсом $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определим из интерполяционных условий $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$.

Тогда, используя разделенные разности $f(x_{j-1}, x_j)$ и $f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})$, получим

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),\\
&\beta_i = f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i),\\
&\gamma_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Будем считать также $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и на отрезке $[a,b]$ определим [10] непрерывно дифференцируемую рациональную сплайн-функцию $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, полагая

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \tag{1.3}$$

при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,N)$.

Ясно, что при необходимости крайние интерполянты $R_0(x)$ и $R_N(x)$ можно определить иначе, например, вводя “фиктивные” узлы $x_{-1} < x_0$, $x_{N+1} > x_N$ и дополнительные значения $f(x_{-1})$, $f(x_{N+1})$ (ниже указывается случай возможного применения таких краевых условий).

Используя равенства (1.1)–(1.3) и общеизвестные свойства разделенных разностей при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ получим равенство

$$\begin{aligned}
R''_{N,1}(x) &= \frac{2}{x_i - x_{i-1}}\Big[\beta_i - \beta_{i-1} - \gamma_i\frac{x_{i-1} - g_i}{(x - g_i)^3} + \gamma_{i-1}\frac{x_i - g_{i-1}}{(x - g_{i-1})^3}\Big]\\
&= \frac{2}{x_i - x_{i-1}}\Big\{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - g_i)\Big[1 - \frac{(x_i - g_i)(x_{i-1} - g_i)^2}{(x - g_i)^3}\Big]\\
&\quad - f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)(x_{i-2} - g_{i-1})\Big[1 - \frac{(x_{i-1} - g_{i-1})(x_i - g_{i-1})^2}{(x - g_{i-1})^3}\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

При исследовании поведения сплайн-функции $R_{N,1}(x)$ на всем отрезке $[a,b]$ возникает необходимость рассмотрения для интерполянтов $R_i(x)$ полюсов двух видов, а именно полюсы g_{i-1} и g_i соответственно интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ в одном случае должны удовлетворять неравенству $g_{i-1} < g_i$, а в другом случае — неравенству $g_{i-1} > g_i$.

Определим полюсы интерполянтов через параметр t и расстояния между соответствующими узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,N)$, полагая при $i = 2,3,\ldots,N-1$ в первом случае

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} - th_{i-1}, \quad g_i(t) = x_i + th_{i+1}, \tag{1.5}$$

а во втором случае

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} + th_i, \quad g_i(t) = x_i - th_i. \tag{1.6}$$

Для всего отрезка $[a,b]$ получим систему полюсов $g(t) = \{g_1(t), g_2(t), \ldots, g_{N-1}(t)\}$, в которой могут встречаться, вообще говоря, полюсы обоих видов.

Ниже будем полагать, что рассматриваемая система полюсов $g(t)$ является согласованной в том смысле, что в каждой паре соседних полюсов системы оба полюса получаются по формулам (1.5) или оба они получаются по формулам (1.6).

Будем придерживаться также следующей терминологии. *Тройку данных* $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ будем называть *строго выпуклой вниз* (*вверх*), если соответствующая разделенная разность $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ больше (меньше) нуля.

Систему всех данных $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)$ будем называть *строго выпуклой вниз* (*вверх*), если каждая тройка соседних данных в ней строго выпукла вниз (вверх).

Всюду ниже для отношений разделенных разностей и расстояний между узлами будем использовать следующие обозначения:

$$q_i = \frac{f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)}{f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})}, \quad Q_i = \max\left\{\frac{2}{2q_i - 1}, \frac{2q_i}{2 - q_i}\right\},$$

$$H_i = \max\left\{\frac{h_k}{h_j}\,\Big|\, |k-j| = 1; k, j \in \{i-1, i, i+1\}\right\} \quad (i = 2, 3, \ldots, N-1);$$

$$T_0 = \max_{2 \leqslant i \leqslant N-1} \{17 H_i Q_i | q_i > 0, 3H_i | q_i < 0\}.$$

Теорема 1. *Если на отрезке* $[a, b]$ *задана произвольная сетка узлов*

$$\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \ (N \geqslant 3),$$

система данных $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)$ *строго выпукла вниз* (*вверх*) *и выполняются неравенства* $1/2 < q_i < 2$ $(i = 2, 3, \ldots, N-1)$, *то при любом значении* $t \geqslant T_0$ *рациональная сплайн-функция* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, \Delta, f, g(t))$ *выпукла вниз* (*вверх*) *на отрезке* $[a, b]$.

З а м е ч а н и е 1. Если речь идет о классе всех выпуклых вниз (или выпуклых вверх) системах данных, то условие на отношение q_i соседних разделенных разностей вида

$$1/2 < q_i < 2$$

нельзя ослабить.

Действительно, возьмем сетку узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, в которую входят узлы $x_{i-2} = -h$, $x_{i-1} = 0$, $x_i = h$, $x_{i+1} = 2h$ при некотором $h > 0$, и пусть

$$f(x_{i-2}) = H > 0, \quad f(x_{i-1}) = f(x_i) = 0, \quad f(x_{i+1}) = 1.$$

В качестве полюсов интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ возьмем соответственно

$$g_{i-1}(t) = x_{i-1} + ht, \quad g_i(t) = x_i - ht \ (t > 2).$$

Тогда $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = 1/(2h^2) > 0$, $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) = H/(2h^2) > 0$, $q_i = H$.

При этом для любого $0 < H \leqslant 1/2$ найдется окрестность $(x_{i-1}, x_{i-1} + \delta)$, а для любого $H \geqslant 2$ найдется соответственно окрестность $(x_i - \delta, x_i)$ $(\delta > 0)$, в которой $R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ не будет выпуклой вниз ни при каком $t > 2$.

Однако (ср., например, [4, гл. 5, § 5.2]) если данные $\{f(x_j) | j = 0, 1, \ldots, N\}$ являются значениями некоторой функции $f \in C^2_{[a,b]}$, у которой $f''(x)$ отлична от нуля на отрезке $[a, b]$, то существует число $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что для любой сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ с $\|\Delta\| < \delta$ выполняется условие $1/2 < q_i < 2$ $(i = 2, 3, \ldots, N-1)$.

Отметим еще одно простое свойство сплайн-функций $R_{N,1}(x)$, которое позволяет исключить из рассмотрения среди данных в каждой четверке $\{f(x_j) | i-2 \leqslant j \leqslant i+1\}$, принадлежащей графику некоторой линейной функции $\ell(x)$, пару внутренних значений $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$. Дело в том, что в этом случае $R_{N,1}(x) \equiv \ell(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 2. *Пусть на сетке узлов*

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \ (N \geqslant 3)$$

система данных $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$ *содержит перемены направления выпуклости и при каждом* $i = 2, 3, \dots, N-1$ *выполняется двойное неравенство* $1/2 < |q_i| < 2$.

Тогда для любого значения $t \geqslant T_0$ *рациональная сплайн-функция*

$$R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$$

сохраняет форму выпуклости в следующем смысле:

1) *если при данном* $i = 2, 3, \dots, N-1$ *отношение* $q_i > 0$, *то* $R_{N,1}(x)$ *выпукла вниз* (*вверх*) *на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$ *в соответствии с положительной* (*отрицательной*) $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$;

2) *если при данном* $i = 2, 3, \dots, N-1$ *отношение* $q_i < 0$, *то* $R_{N,1}(x)$ *имеет точку перегиба* z_i *на интервале* $(x_{i-1} + 1/3h_i, x_i - 1/3h_i)$, *выпукла вверх* (*вниз*) *на отрезке* $[x_{i-1}, z_i]$ *и выпукла вниз* (*вверх*) *на отрезке* $[z_i, x_i]$ *при положительной* (*отрицательной*) $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$.

З а м е ч а н и е 2. На крайних промежутках $[x_0, x_1]$ или $[x_{N-1}, x_N]$ $R_{N,1}(x)$ является выпуклой вниз (вверх), если соответственно $f(x_0, x_1, x_2)$ или $f(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N)$ положительна (отрицательна).

При необходимости на них также можно получить точки перегиба. Для этого достаточно ввести дополнительные узлы $x_{-1} < x_0$ и $x_{N+1} > x_N$ с соответствующим выбором данных $f(x_{-1})$ и $f(x_{N+1})$.

С учетом непрерывной дифференцируемости сплайн-функции $R_{N,1}(x)$ при $x \in [a, b]$ [13] доказательство теоремы 1 непосредственно вытекает из приводимых ниже лемм 1 и 3, а доказательство теоремы 2 — из лемм 1–4.

2. Случай интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ с полюсами $g_{i-1} < g_i$

В этом разделе считаем, что для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ полюсами интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ при данном $i = 2, 3, \dots, N-1$ служат соответственно числа $g_{i-1}(t) = x_{i-1} - th_{i-1}$ и $g_i(t) = x_i + th_{i+1}$ $(t > 1)$, точки $x \in [x_{i-1}, x_i]$ представляем в виде $x = x_{i-1} + \alpha h_i$ с $\alpha \in [0, 1]$ и для краткости обозначаем $p = h_i/h_{i+1}$, $q = h_i/h_{i-1}$.

С учетом этого для данных $\{f(x_j) | i-2 \leqslant j \leqslant i+1\}$ из (1.4) при $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i) = 2f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(t-1)\frac{1}{p}P_1(t, \alpha, p) + 2f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)(t-1)\frac{1}{q}Q_1(t, \alpha, q), \quad (2.1)$$

где

$$P_1(t, \alpha, p) = \frac{t(t+p)^2}{(t + (1-\alpha)p)^3} - 1, \quad Q_1(t, \alpha, q) = \frac{t(t+q)^2}{(t + \alpha q)^3} - 1. \quad (2.2)$$

Ясно, что при каждом фиксированном $t > 0$ функция $P_1(t, \alpha, p)$ строго возрастает и функция $Q_1(t, \alpha, q)$ строго убывает по $\alpha \in [0, 1]$. Точки $\alpha_1(t) = \alpha_1(t, p) = 1 + t/p - (1/p)\sqrt[3]{t(t+p)^2}$ и $\alpha_2(t) = \alpha_2(t, q) = (1/q)\sqrt[3]{t(t+q)^2} - t/q$ при каждом $t \geqslant p$ и каждом $t \geqslant q$ соответственно служат нулями $P_1(t, \alpha, p)$ и $Q_1(t, \alpha, q)$. При этом функция $\alpha_1(t)$ убывает на промежутке $[p, +\infty)$, функция $\alpha_2(t)$ возрастает на $[q, +\infty)$; кроме того, легко проверить, что $\alpha_1(p) = 1 - \gamma$, $\alpha_2(q) = \gamma$,

$$\alpha_1(t) \in \left(\frac{1}{3}, 1 - \gamma\right] \ (t \geqslant p), \quad \alpha_2(t) \in \left[\gamma, \frac{2}{3}\right) \ (t \geqslant q); \quad (2.3)$$

здесь и всюду в работе $\gamma = \sqrt[3]{4} - 1$.

Ниже будут использоваться также представления функций $P_1(t,\alpha,p)$ и $Q_1(t,\alpha,q)$ из (2.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_1(t,\alpha,p) &= \frac{p(3\alpha-1)t^2+p^2(1-3(1-\alpha)^2)t-p^3(1-\alpha)^3}{(t+(1-\alpha)p)^3}, \\ Q_1(t,\alpha,q) &= \frac{q(2-3\alpha)t^2+q^2(1-3\alpha^2)t-q^3\alpha^3}{(t+\alpha q)^3}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Если при заданном $i=2,3,\dots,N-1$ для данных $\{f(x_j)|i-2\leqslant j\leqslant i+1\}$ выполняется условие $1/2<q_i<2$, то при любом $t\geqslant T_1$, где $T_1=16\max\{1,p,q\}\,Q_i$, сплайн-функция $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f,\Delta,g(t))$ выпукла вниз (вверх) на (x_{i-1},x_i) при положительной (отрицательной) $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})>0$. Тогда и $f(x_{i-2},x_{i-1},x_i)>0$.

При $\alpha\in[1-\gamma,\gamma]$ и $t>t_0=\max\{1,p,q\}$ обе функции $P_1(t,\alpha,p)$ и $Q_1(t,\alpha,q)$ строго положительны, а значит, как следует из (2.1), $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i)>0$.

Пусть теперь $\alpha\in(0,1-\gamma]$ и $t>t_0$. Запишем равенство (2.1) в виде

$$R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i)=2f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})(t-1)\frac{1}{q}Q_1(t,\alpha,q)(F(t,\alpha,p,q)+q_i), \tag{2.5}$$

где $F(t,\alpha,p,q)=(q/p)P_1(t,\alpha,p)/Q_1(t,\alpha,q)$.

Для $\alpha\in(0,1-\gamma]$ оценим разность

$$\begin{aligned} F(t,\alpha,p,q)-\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha} &= F(t,\alpha,p,q)-\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\Big(\frac{t+\alpha q}{t+(1-\alpha)p}\Big)^3+\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\Big[\Big(\frac{t+\alpha q}{t+(1-\alpha)p}\Big)^3-1\Big] \\ &= \frac{1}{t}\Big(\frac{t+\alpha q}{t+(1-\alpha)p}\Big)^3\frac{M(t,\alpha)}{(2-3\alpha)\big[2-3\alpha+(1-3\alpha^2)(q/t)-\alpha^3(q/t)^2\big]} \\ &\quad+\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\,\frac{\alpha q-(1-\alpha)p}{t+(1-\alpha)p}\Big[\Big(\frac{t+\alpha q}{t+(1-\alpha)p}\Big)^2+\frac{t+\alpha q}{t+(1-\alpha)p}+1\Big], \end{aligned}$$

где

$$M(t,\alpha)=(2-3\alpha)p(1-3(1-\alpha)^2)+(1-3\alpha)q(1-3\alpha^2)+\frac{1}{t}[(3\alpha-2)p^2(1-\alpha)^3+(3\alpha-1)q^2\alpha^3].$$

Здесь учтем, что из условий $t\geqslant T_1$ и $1/2<q_i<2$ имеем $t\geqslant 5t_0$. Тогда при $\alpha\in(0,1-\gamma]$ получим

$$0<\frac{t+\alpha q}{t+(1-\alpha)p}<1+(1-\gamma)\frac{q}{t}\leqslant 1+\frac{1}{5}(1-\gamma)<1.1,$$

$$\Big|\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\Big|\leqslant\max\Big\{\frac{1}{2},\frac{2-3\gamma}{3\gamma-1}\Big\}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\Big|\frac{\alpha q-(1-\alpha)p}{t+(1-\alpha)p}\Big|<\frac{1}{t}\max\{p,q\}\leqslant\frac{1}{t}t_0,$$

$$(2-3\alpha)\Big[2-3\alpha+(1-3\alpha^2)\frac{q}{t}-\alpha^3\Big(\frac{q}{t}\Big)^2\Big]>(2-3\alpha)\Big[2-3\alpha+(1-4\alpha^2)\frac{q}{t}\Big]>(3\gamma-1)^2>0.58,$$

$$\begin{aligned} |M(t,\alpha)| &\leqslant (2-3\alpha)p\,\big|1-3(1-\alpha)^2\big|+|3\alpha-1|\,q(1-3\alpha^2)+\frac{1}{t}[(2-3\alpha)p^2(1-\alpha)^3+|1-3\alpha|\,q^2\alpha^3] \\ &\leqslant 4p+q+\frac{1}{t_0}(2p^2+\frac{1}{3}q^2)<6\max\{p,q\}\leqslant 6t_0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\alpha\in(0,1-\gamma]$ и $t\geqslant 5t_0$ имеем

$$\Big|F(t,\alpha,p,q)-\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\Big|<16t_0\frac{1}{t}. \tag{2.6}$$

Отсюда и из условия $1/2 < q_i < 2$ получим

$$F(t,\alpha,p,q)+q_i=\Big(F(t,\alpha,p,q)-\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\Big)+\Big(q_i-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}+\frac{3\alpha-1}{2-3\alpha}\Big)>-16t_0\frac{1}{t}+q_i-\frac{1}{2}\geqslant 0$$

при $t \geqslant 34t_0/(2q_i-1)$.

Поэтому при $\alpha \in (0, 1-\gamma]$ и $t \geqslant T_1$ из (2.5) вытекает неравенство $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i) > 0$.

Наконец, если $\alpha \in [\gamma, 1)$ и $t > t_0$, то равенство (2.1) можно представить в виде

$$R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i)=2f(x_{i-2},x_{i-1},x_i)(t-1)\frac{1}{p}P_1(t,\alpha,p)\Big(\frac{1}{q_i}+\frac{p}{q}\frac{Q_1(t,\alpha,q)}{P_1(t,\alpha,p)}\Big),$$

причем условие $1/2 < q_i < 2$ равносильно $1/2 < 1/q_i < 2$. Поэтому вполне аналогично неравенству (2.6) из предыдущего случая $\alpha \in (0, 1-\gamma]$ в случае $\alpha \in [\gamma, 1)$ для $t \geqslant T_1$ получим неравенство

$$\Big|\frac{p}{q}\frac{Q_1(t,\alpha,q)}{P_1(t,\alpha,p)}-\frac{2-3\alpha}{3\alpha-1}\Big|<16t_0\frac{1}{t}.$$

Тогда при выполнении условия $1/2 < q_i < 2$ для $t \geqslant T_1$ имеем

$$\frac{1}{q_i}+\frac{p}{q}\frac{Q_1(t,\alpha,q)}{P_1(t,\alpha,p)}>-16t_0\frac{1}{t}+\frac{1}{q_i}-\frac{1}{2}\geqslant 0.$$

Значит, в случае $\alpha \in [\gamma, 1)$ и $t \geqslant T_1$ также выполняется неравенство $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i) > 0$.

Следовательно, для любого $t \geqslant T_1$ сплайн-функция $R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ выпукла вниз на интервале (x_{i-1}, x_i).

Пусть теперь $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) < 0$. Тогда из условия $1/2 < q_i < 2$ получим, что также $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) < 0$. Поэтому в таком случае для сетки узлов Δ и данных

$$\{-f(x_j)\,|\,i-2\leqslant j\leqslant i+1\}$$

получим $-f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) > 0$ и $-f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) > 0$; кроме того, выполняется также условие

$$\frac{1}{2}<\frac{-f(x_{i-2},x_{i-1},x_i)}{-f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})}<2.$$

По доказанной части получим, что для любого $t \geqslant T_1$ сплайн-функция $R_{N,1}(x, -f, \Delta, g(t))$ выпукла вниз, а $R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ выпукла вверх на интервале (x_{i-1}, x_i).

Лемма доказана.

В следующей лемме, как и выше, $\gamma = \sqrt[3]{4}-1$, поэтому

$$\frac{3\gamma-1}{2-3\gamma}=3.2052\ldots,\qquad \frac{2-3\gamma}{3\gamma-1}=0.3119\ldots$$

Лемма 2. *Если при заданном* $i = 2, 3, \ldots, N-1$ *для данных* $\{f(x_j)\,|\,i-2 \leqslant j \leqslant i+1\}$ *выполняется неравенство*

$$-2<q_i<-\frac{1}{2}, \tag{2.7}$$

то при любом $t \geqslant 3\max\{1, p, q\}$ *сплайн-функция* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ *имеет точку перегиба*

$$z_i\in\big(x_{i-1}+(1-\gamma)h_i,\ x_i-(1-\gamma)h_i\big)\subset\Big(x_{i-1}+\frac{1}{3}h_i,x_i-\frac{1}{3}h_i\Big),$$

выпукла вверх (вниз) на интервале (x_{i-1}, z_i) *и вниз (вверх) на интервале* (z_i, x_i) *при положительной (отрицательной)* $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (2.7) и $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) > 0$. Тогда $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) < 0$.

Заметим, что при $t > t_0 = \max\{1, p, q\}$ и $\alpha \in [1-\gamma, \gamma]$ функции $P_1(t, \alpha, p)$ и $Q_1(t, \alpha, q)$ положительны, а функция $F(t, \alpha, p, q) = (q/p)P_1(t, \alpha, p)/Q_1(t, \alpha, q)$ при каждом $t > t_0$ непрерывна и возрастает относительно $\alpha \in [1-\gamma, \gamma]$.

Покажем, что при каждом $t \geqslant 3t_0$ имеет место включение

$$\Big[\frac{1}{2}, 2\Big] \subset \Big[F(t, 1-\gamma, p, q), F(t, \gamma, p, q)\Big]. \tag{2.8}$$

Для этого, используя (2.4), приведем функцию $F(t, \alpha, p, q)$ к виду

$$F(t, \alpha, p, q) = \Big(\frac{t + \alpha q}{t + (1-\alpha)p}\Big)^3 \frac{u(t, \alpha, p)}{v(t, \alpha, q)},$$

где

$$u(t, \alpha, p) = (3\alpha - 1)t^2 + p(1 - 3(1-\alpha)^2)t - p^2(1-\alpha)^3,$$
$$v(t, \alpha, q) = (2 - 3\alpha)t^2 + q(1 - 3\alpha^2)t - q^2\alpha^3.$$

При $\alpha = 1 - \gamma$ получим равенство

$$F(t, 1-\gamma, p, q) = \Big(\frac{t + (1-\gamma)q}{t + \gamma p}\Big)^3 \frac{u(t, 1-\gamma, p)}{v(t, 1-\gamma, q)}, \tag{2.9}$$

в котором $u(p, 1-\gamma, p) = 0$, $u(t, 1-\gamma, p) > 0$ при $t > p$ и $v(t, 1-\gamma, q) > 0$ при $t \geqslant p$.

Тогда при $t \geqslant p$ получим

$$\frac{u(t, 1-\gamma, p)}{v(t, 1-\gamma, q)} - \frac{2 - 3\gamma}{3\gamma - 1} = \frac{w(t)}{(3\gamma - 1)v(t, 1-\gamma, q)},$$

где обозначено

$$w(t) = (3\gamma - 1)u(t, 1-\gamma, p) - (2 - 3\gamma)v(t, 1-\gamma, q)$$
$$= -\big[(3\gamma - 1)p(3\gamma^2 - 1) + (2 - 3\gamma)q(1 - 3(1-\gamma)^2)\big]t + (2 - 3\gamma)q^2(1-\gamma)^3 - (3\gamma - 1)p^2\gamma^3.$$

Функция $w(t)$ является убывающей (линейной с отрицательным старшим коэффициентом). Действительно, $\gamma \in (1/3, 2/3)$, поэтому $3\gamma - 1 > 0$ и $2 - 3\gamma > 0$; $3\gamma^2 - 1 > 0$, так как $\gamma > 1/\sqrt{3}$; $1 - 3(1-\gamma)^2 > 0$, так как $1 - \gamma < 1/\sqrt{3}$.

При этом

$$w(p) = (3\gamma - 1)u(p, 1-\gamma, p) - (2 - 3\gamma)v(p, 1-\gamma, q) = -(2 - 3\gamma)v(p, 1-\gamma, q) < 0.$$

Поэтому $w(t) < 0$ при всех $t \geqslant p$, а значит, имеем $\dfrac{u(t, 1-\gamma, p)}{v(t, 1-\gamma, q)} < \dfrac{2 - 3\gamma}{3\gamma - 1}$.

Далее, при $t \geqslant 3t_0$ получим

$$\Big(\frac{t + (1-\gamma)q}{t + \gamma p}\Big)^3 \leqslant \Big(1 + (1-\gamma)\frac{q}{3t_0}\Big)^3 \leqslant \Big(1 + \frac{1}{3}(1-\gamma)\Big)^3.$$

Отсюда и из (2.9) имеем $F(t, 1-\gamma, p, q) < \Big(1 + \dfrac{1}{3}(1-\gamma)\Big)^3 \dfrac{2 - 3\gamma}{3\gamma - 1} < \dfrac{1}{2}$.

Тогда при $t \geqslant 3t_0$ получим

$$F(t, \gamma, p, q) = \Big(\frac{t + \gamma q}{t + (1-\gamma)p}\Big)^3 \frac{u(t, \gamma, p)}{v(t, \gamma, q)}$$

$$= \Big(\frac{t + \gamma q}{t + (1-\gamma)p}\Big)^3 \frac{v(t, 1-\gamma, p}{u(t, 1-\gamma, q)} = \frac{1}{F(t, 1-\gamma, q, p)} > 2.$$

Следовательно, при $t \geqslant 3t_0$ включение (2.8) доказано.

Далее, из условия (2.7) и включения (2.8) при каждом $t \geqslant 3t_0$ в силу непрерывности и возрастания $F(t,\alpha,p,q)$ относительно $\alpha \in [1-\gamma,\gamma]$ вытекает, что найдется значение $\alpha_0(t) \in (1-\gamma,\gamma)$ такое, что $F(t,\alpha_0(t),p,q) = -q_i$.

Фиксируя значение $t \geqslant 3t_0$, для точек $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ из (2.3), получим, что $P_1(t,\alpha,p) > 0$, $Q_1(t,\alpha,q) > 0$, а функция $F(t,\alpha,p,q)$ возрастает относительно α на интервале $(\alpha_1(t),\alpha_2(t))$. Поэтому сумма $F(t,\alpha,p,q) + q_i$ меньше нуля при $\alpha \in (\alpha_1(t),\alpha_0(t))$ и больше нуля при $\alpha \in (\alpha_0(t),\alpha_2(t))$.

Тогда из представления $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i) = R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i, f, \Delta, g(t))$ в виде (2.5) вытекает, что $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i) < 0$ при $\alpha \in (\alpha_1(t),\alpha_0(t))$, $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i) > 0$ при $\alpha \in (\alpha_0(t),\alpha_2(t))$ и $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha_0(t)h_i) = 0$.

Заметим также, что $P_1(t,\alpha,p) \leqslant 0$ при $\alpha \in (0,\alpha_1(t)]$, $P_1(t,\alpha,p) > 0$ при $\alpha \in (\alpha_1(t),1)$, $Q_1(t,\alpha,q) > 0$ при $\alpha \in (0,\alpha_2(t))$ и $Q_1(t,\alpha,q) \leqslant 0$ при $\alpha \in [\alpha_2(t),1)$. Отсюда с использованием представления $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i)$ в виде (2.1) получим знаки значений $R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i)$ на оставшихся промежутках: отрицательный — на промежутке $\alpha \in (0,\alpha_1(t)]$ и положительный — на промежутке $[\alpha_2(t),1)$.

Следовательно, $z_i = x_{i-1} + \alpha_0(t)h_i$ является точкой перегиба сплайн-функции $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x,f,\Delta,g(t))$, $z_i \in (x_{i-1}+(1-\gamma)h_i, x_i-(1-\gamma)h_i)$ с $\gamma = \sqrt[3]{4}-1$, при этом $R_{N,1}(x)$ выпукла вверх на интервале (x_{i-1},z_i) и выпукла вниз на интервале (z_i,x_i).

Второй возможный случай, когда выполнено условие (2.7) и $f(x_{i-1},x_i,x_{i+1}) < 0$, $f(x_{i-2},x_{i-1},x_i) > 0$, сводится к уже рассмотренному по аналогии с доказательством леммы 1.

Лемма доказана.

3. Случай интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ с полюсами $g_{i-1} > g_i$

В этом разделе полагаем, что для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$ полюсами интерполянтов $R_{i-1}(x)$ и $R_i(x)$ для данного $i = 2,3,\ldots,N-1$ служат соответственно числа $g_{i-1}(t) = x_{i-1} + th_i$ и $g_i(t) = x_i - th_i$ $(t \geqslant 2)$. Точки $x \in [x_{i-1},x_i]$ представляем в виде $x = x_{i-1} + \alpha h_i$ с $\alpha \in [0,1]$ и, как и выше, для краткости обозначаем $p = h_i/h_{i+1}$, $q = h_i/h_{i-1}$.

Тогда для данных $\{f(x_j) | i-2 \leqslant j \leqslant i+1\}$ из равенства (1.4) при $\alpha \in (0,1)$ получим

$$R''_{N,1}(x_{i-1}+\alpha h_i) = 2f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})\Big(t+\frac{1}{p}\Big)P_2(t,\alpha) + 2f(x_{i-2},x_{i-1},x_i)\Big(t+\frac{1}{q}\Big)Q_2(t,\alpha), \quad (3.1)$$

где обозначены

$$P_2(t,\alpha) = 1 - \frac{t(t-1)^2}{(t-1+\alpha)^3}, \quad Q_2(t,\alpha) = 1 - \frac{t(t-1)^2}{(t-\alpha)^3}. \quad (3.2)$$

При каждом фиксированном $t \geqslant 2$ функция $P_2(t,\alpha)$ строго возрастает и функция $Q_2(t,\alpha)$ строго убывает относительно α на отрезке $[0,1]$.

Очевидно, $P_2(t,1-\alpha) = Q_2(t,\alpha)$ при всех $\alpha \in [0,1]$. При каждом $t \geqslant 2$ точки $\alpha_1(t) = \sqrt[3]{t(t-1)^2} - t + 1$ и $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$ служат нулями соответственно $P_2(t,\alpha)$ и $Q_2(t,\alpha)$, причем $\alpha_1(2) = \sqrt[3]{2}-1$, $\alpha_2(2) = 2-\sqrt[3]{2}$ и в силу монотонности при каждом $t \geqslant 2$ имеем

$$\alpha_1(t) \in \Big[\alpha_1(2), \frac{1}{3}\Big), \quad \alpha_2(t) \in \Big(\frac{2}{3}, \alpha_2(2)\Big]. \quad (3.3)$$

При $\alpha \in [0,1]$ выполняются равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(t+\frac{1}{p}\Big)P_2(t,\alpha) = 3\alpha - 1, \quad \lim_{t\to+\infty}\Big(t+\frac{1}{q}\Big)Q_2(t,\alpha) = 2 - 3\alpha,$$

которые непосредственно следуют из равенств

$$P_2(t,\alpha) = \frac{(3\alpha-1)(t-1)^2 + 3\alpha^2(t-1) + \alpha^3}{(t-1+\alpha)^3}, \quad Q_2(t,\alpha) = P_2(t,1-\alpha). \quad (3.4)$$

Лемма 3. *Если при заданном* $i = 2, 3, \ldots, N-1$ *для данных* $\{f(x_j) | i-2 \leqslant j \leqslant i+1\}$ *выполняется условие* $1/2 < q_i < 2$, *то при любом* $t \geqslant T_2$, *где* $T_2 = 17 \max\{1, 1/p, 1/q\}\, Q_i$, *сплайн-функция* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ *выпукла вниз (вверх) на* (x_{i-1}, x_i) *при положительной (отрицательной)* $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$.

Доказательство леммы 3 по идее похоже на доказательство леммы 1. Поэтому приведем его в сокращенной форме с указанием соответствующих этому случаю результатов на каждом этапе.

Пусть сначала $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) > 0$. При $\alpha \in [1/3, 2/3]$ имеем $P_2(t, \alpha) > 0$ и $Q_2(t, \alpha) > 0$, поэтому из (3.1) при любом $t > 2$ вытекает неравенство $R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h) > 0$.

В случае $\alpha \in (0, 1/3]$ и $t > 2$ равенство (3.1) представим в виде

$$R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i) = 2f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})\Big(t + \frac{1}{q}\Big) Q_2(t, \alpha)\Big(\frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G(t, \alpha) + q_i\Big), \tag{3.5}$$

где $G(t, \alpha) = P_2(t, \alpha)/Q_2(t, \alpha)$.

При этом из $1/2 < q_i < 2$ и $t \geqslant T_2$ имеем $t > 5$, отсюда при $t \geqslant t_1 = \max\{1, 1/p, 1/q\}$ для любого $\alpha \in (0, 1/3]$ получим

$$\begin{aligned}\Big|\frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G(t, \alpha) - \frac{3\alpha - 1}{2 - 3\alpha}\Big| &\leqslant \frac{t + 1/p}{t + 1/q}\Big|G(t, \alpha) - \frac{3\alpha - 1}{2 - 3\alpha}\Big| + \Big|\frac{3\alpha - 1}{2 - 3\alpha}\Big|\Big|\frac{t + 1/p}{t + 1/q} - 1\Big| \\ &\leqslant \frac{16}{t - 1} + \frac{1}{2} t_1 \frac{1}{t - 1} \leqslant \Big(16 + \frac{1}{2} t_1\Big)\frac{1}{t - 1}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Поэтому из условий $1/2 < q_i < 2$ и $t \geqslant T_2$ имеем

$$t \geqslant 1 + \frac{2}{2q_i - 1}\Big(16 + \frac{1}{2} t_1\Big),$$

что дает

$$\frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G(t, \alpha) + q_i > -\Big(16 + \frac{1}{2} t_1\Big)\frac{1}{t - 1} + q_i - \frac{1}{2} \geqslant 0,$$

а значит, для значений $t \geqslant T_2$ при $\alpha \in (0, 1/3]$ из (3.5) вытекает неравенство

$$R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i) > 0.$$

Если $\alpha \in [2/3, 1)$ и $t > 2$, то равенство (3.1) представим в виде

$$R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i) = 2f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)\Big(t + \frac{1}{p}\Big) P_2(t, \alpha)\Big(\frac{1}{q_i} + \frac{t + 1/q}{t + 1/p}\frac{Q_2(t, \alpha)}{P_2(t, \alpha)}\Big). \tag{3.7}$$

При этом $1 - \alpha \in \big(0, 1/3\big]$, следовательно, из (3.6) при $t \geqslant T_2$ получим

$$\Big|\frac{t + 1/q}{t + 1/p}\frac{Q_2(t, \alpha)}{P_2(t, \alpha)} - \frac{2 - 3\alpha}{3\alpha - 1}\Big| = \Big|\frac{t + 1/q}{t + 1/p} G(t, 1 - \alpha) - \frac{3(1 - \alpha) - 1}{2 - 3(1 - \alpha)}\Big| \leqslant \Big(16 + \frac{1}{2} t_1\Big)\frac{1}{t - 1}.$$

Из неравенств $1/2 < q_i < 2$ и $t \geqslant T_2$ имеем

$$t \geqslant 1 + \frac{2q_i}{2 - q_i}\Big(16 + \frac{1}{2} t_1\Big),$$

$$\frac{1}{q_i} + \frac{t + 1/q}{t + 1/p}\frac{Q_2(t, \alpha)}{P_2(t, \alpha)} > -\Big(16 + \frac{1}{2} t_1\Big)\frac{1}{t - 1} + \frac{1}{q_i} - \frac{1}{2} \geqslant 0.$$

Значит, для значений $t \geqslant T_2$ при $\alpha \in [2/3, 1)$ получим $R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i) > 0$.

Следовательно, для любого $t \geqslant T_2$ сплайн-функция $R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ выпукла вниз на интервале (x_{i-1}, x_i).

Случай, когда $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) < 0$, рассматривается в полной аналогии с подобным случаем из доказательства леммы 1.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если при заданном* $i = 2, 3, \ldots, N-1$ *для данных* $\{f(x_j) | i-2 \leqslant j \leqslant i+1\}$ *выполняется неравенство*

$$-2 < q_i < -\frac{1}{2}, \tag{3.8}$$

то при любом $t \geqslant 2\max\{1, 1/p, 1/q\}$ *сплайн-функция* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ *имеет точку перегиба*

$$z_i \in (x_{i-1} + 1/3h_i, x_i - 1/3h_i)\,,$$

выпукла вверх (вниз) на интервале (x_{i-1}, z_i) *и вниз (вверх) на интервале* (z_i, x_i) *при положительной (отрицательной)* $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$.

Доказательство. Пусть сначала $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) < 0$ и $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) > 0$.

Ясно, что функция $G(t, \alpha) = P_2(t, \alpha)/Q_2(t, \alpha)$ непрерывна при $t \geqslant 2$ и $\alpha \in [1/3, 2/3]$, причем $P_2(t, \alpha)$ и $Q_2(t, \alpha)$ положительны, производная по α от $P_2(t, \alpha)$ положительна, а от $Q_2(t, \alpha)$ отрицательна. Поэтому $G'_\alpha(t, \alpha) > 0$, а значит, при фиксированном $t \geqslant 2$ функция $G(t, \alpha)$ строго возрастает относительно $\alpha \in [1/3, 2/3]$.

При этом с помощью производной легко проверить, что на промежутке $[2, +\infty)$ функция

$$G\Big(t, \frac{2}{3}\Big) = \Big(\frac{t - 2/3}{t - 1/3}\Big)^3 \Big(3t + \frac{2}{3} + \frac{13}{27t - 24}\Big)$$

является возрастающей, а функция $G(t, 1/3) = 1/G(t, 2/3)$ — убывающей, а значит, при любом $t \geqslant 2$ выполняются неравенства

$$G\Big(t, \frac{1}{3}\Big) \leqslant G\Big(2, \frac{1}{3}\Big) < G\Big(2, \frac{2}{3}\Big) \leqslant G\Big(t, \frac{2}{3}\Big);$$

здесь $G(2, 2/3) = 3.6352$, $G(2, 1/3) = 1/G(2, 2/3)$.

Рассмотрим теперь значения $t \geqslant t_2 = 2\max\{1, 1/p, 1/q\}$. Тогда

$$\frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G\Big(t, \frac{1}{3}\Big) \leqslant \Big(1 + \frac{1}{pt}\Big) G\Big(t, \frac{1}{3}\Big) \leqslant \Big(1 + \frac{1}{pt_2}\Big) G\Big(2, \frac{1}{3}\Big) \leqslant \frac{3}{2} G\Big(2, \frac{1}{3}\Big) < \frac{1}{2},$$

а также

$$\frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G\Big(t, \frac{2}{3}\Big) = \frac{1}{\dfrac{t + 1/q}{t + 1/p}\, G\Big(t, \dfrac{1}{3}\Big)} > 2.$$

Поэтому из условия (3.8) при всех $t \geqslant t_2$ вытекают неравенства

$$\frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G\Big(t, \frac{1}{3}\Big) < \frac{1}{2} < -q_i < 2 < \frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G\Big(t, \frac{2}{3}\Big).$$

Значит, для любого $t \geqslant t_2$ в силу непрерывности и строгой монотонности фукции

$$G_1(t, \alpha) = \frac{t + 1/p}{t + 1/q}\, G(t, \alpha)$$

относительно α найдется значение $\alpha_0(t) \in (1/3, 2/3)$ такое, что

$$G_1(t, \alpha_0(t)) = -q_i, \quad G_1(t, \alpha) + q_i < 0 \ \text{ при } \ \alpha \in (\alpha_1(t), \alpha_0(t))$$

и $G_1(t, \alpha) + q_i > 0$ при $\alpha \in (\alpha_0(t), \alpha_2(t))$.

Напомним, что для любого $t \geqslant 2$ имеем $P_2(t, \alpha_1(t)) = 0$, $P_2(t, \alpha) < 0$ при $\alpha \in [0, \alpha_1(t))$ и $P_2(t, \alpha) > 0$ при $\alpha \in (\alpha_1(t), 1]$; $Q_2(t, \alpha_2(t)) = 0$, $Q_2(t, \alpha) > 0$ при $\alpha \in [0, \alpha_2(t))$ и $Q_2(t, \alpha) < 0$ при $\alpha \in (\alpha_2(t), 1]$.

Значит, для $t \geqslant t_2$ равенство (3.5) справедливо также при $\alpha \in (0, \alpha_2(t))$, откуда следует, что

$$R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i) = R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i, f, \Delta, g(t))$$

равна нулю в точке $\alpha_0(t) \in (1/3, 2/3)$, меньше нуля при $\alpha \in (\alpha_1(t), \alpha_0(t))$ и больше нуля при $\alpha \in (\alpha_0(t), \alpha_2(t))$ (для любого $t \geqslant t_2$).

Из равенства (3.1) очевидно вытекает, что $R''_{N,1}(x_{i-1} + \alpha h_i, f, \Delta, g(t))$ меньше нуля при $\alpha \in (0, \alpha_1(t))$ и больше нуля при $\alpha \in (\alpha_2(t), 1)$ (при любом $t \geqslant t_2$).

Следовательно, при любом $t \geqslant t_2$ сплайн-функция $R_{N,1}(x, f, \Delta, g(t))$ имеет точку перегиба

$$z_i = x_{i-1} + \alpha_0(t) h_i \in (x_{i-1} + 1/3 h_i, x_i - 1/3 h_i)$$

и является выпуклой вверх на интервале (x_{i-1}, z_i) и выпуклой вниз на интервале (z_i, x_i).

Случай, когда $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) > 0$ и $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) < 0$, рассматривается вполне аналогично предыдущему случаю. Надо учесть лишь, что в данном случае вместо (3.5) используется равенство (3.7).

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Теоремы 1 и 2 получены для сплайн-функций $R_{N,1}(x)$ класса $C^1_{[a,b]}$.

Можно доказать, что существуют сплайн-функции класса $C^2_{[a,b]}$ вида

$$R_{N,2}(x) = R_i(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2} + R_{i-1}(x) \frac{(x - x_i)^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2}$$

при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, для которых справедлив аналог теоремы 1 при условии $c < q_i < 1/c$ для $c = (2\sqrt{2} + 1)/(2\sqrt{2} + 5)$ вместо условия $1/2 < q_i < 2$.

Однако остается открытым вопрос о справедливости аналога теоремы 2 для сплайн-функций $R_{N,2}(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schweikert D.G.** An interpolation curve using a spline in tension // J. Math. Phys. 1966. Vol. 45, iss. 1–4. P. 312–317. doi: 10.1002/sapm1966451312 .
2. **Miroshnichenko V.L.** Convex and monotone spline interpolation // Constuctive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984. P. 610–620.
3. **Мирошниченко В.Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 // Вычислительные системы: сб. ст. / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1990. Вып. 137: Приближение сплайнами. С. 31–57.
4. **Квасов Б.И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.
5. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами / Ю.С. Волков, В.В. Богданов, В.Л. Мирошниченко, В.Т. Шевалдин // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 836–844. doi: 10.1134/S0001434610110209 .
6. **Schaback R.** Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx.Theory. 1973. Vol. 7, no. 2. pp. 281–292. doi: 10.1016/0021-9045(73)90072-5 .
7. **Spath H.** Spline algorithms for curves and surfaces. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ. Inc., 1974. 198 p.
8. **Hussain M. Z., Sarfraz M., Shaikh T. S.** Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data // Egyptian Informatics J. 2011. Vol. 12. pp. 231–236. doi: 10.1016/ j.eij.2011.10.002 .
9. **Edeo A., Gofeb G., Tefera T.** Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Sci. Research J. Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12, no. 1. pp. 110–122.
10. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестан. электрон. мат. изв. 2015. Вып. 4. С. 22–31.
11. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2017. Т. 54. С. 304–306.
12. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестан. электрон. мат. изв. 2017. Вып. 7. С. 16–28.

13. **Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г.** Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 588–599. doi: 10.4213/mzm11201 .

Поступила 06.02.2018

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала;
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН,
г. Махачкала;
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. Schweikert D.G. An interpolation curve using a spline in tension. *J. Math. Phys.*, 1966, vol. 45, iss. 1–4, pp. 312–317. doi: 10.1002/sapm1966451312 .
2. Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation. *Constuctive Theory of Function: Proc. Int. Conf.*, (Varna, 1984), Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984, pp. 610–620.
3. Miroschnichenko V.L. Sufficient conditions for monotonicity and convexity of cubic splines of class C^2. *Sib. Adv. Math.*, 1992, vol. 2, no. 4, pp. 147–163.
4. Kvasov B.I. *Metody izogeometricheskoi approksimatsii splainami* [Methods of Shape-Preserving Spline Approximaton]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 360 p. ISBN: 5-9221-0733-X .
5. Volkov Yu.S., Bogdanov V.V., Miroschnichenko V.L., Shevaldin V.T. Shape-preserving interpolation by cubic splines. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 6, pp. 798–805. doi: 10.1134/S0001434610110209 .
6. Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen. *J. Approx.Theory*, 1973, vol. 7, no. 2. pp. 281–292. doi: 10.1016/0021-9045(73)90072-5 .
7. Spath H. *Spline algorithms for curves and surfaces.* Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ. Inc., 1974, 198 p. ISBN: 0919628990 .
8. Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S. Shape preserving rational cubic spline for positive and convex data. *Egyptian Informatics J.*, 2011, vol. 12, pp. 231–236. doi: 10.1016/j.eij.2011.10.002 .
9. Edeo A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation. *American Sci. Research J. Engineering, Technology and Sciences*, 2015, vol. 12, no. 1. pp. 110–122.
10. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines for rational interpolants. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, no. 4, pp. 21–30 (in Russian).
11. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines for three-point rational interpolants. *Tr. Matem. centra im. N.I. Lobachevskogo.* Kazan, 2017, vol. 54, pp. 304–306 (in Russian).
12. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines for three-point rational interpolants with autonomous poles. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, no. 7, pp. 16–28 (in Russian).
13. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Unconditionally convergent interpolational rational splines. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 4, pp. 588–599 (in Russian). doi: 10.4213/mzm11201 .

The paper was received by the Editorial Office on February 6, 2018.

Abdul-Rashid Kehrimanovich Ramazanov, Dr. Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru .

Vazipat Gusenovna Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru .