ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 512.542

# О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА ИЗ НЕКОТОРОГО ЕЕ ДОБАВЛЕНИЯ

**В. С. Монахов, Е. В. Зубей**

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Добавлением к подгруппе $A$ в группе $G$ называется подгруппа $B$ такая, что $G = AB$. Конечные группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта, исследовались в работах Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика (Сиб. мат. журнал. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753), В. Н. Княгиной и В. С. Монахова (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3, С. 130–139). В этой ситуации группа может быть неразрешимой. Например, в группах $Sz(8)$, $PSU(5,4)$, $PSU(4,2)$, $PSp(4,4)$ вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка. В данной работе устанавливается $r$-разрешимость конечной группы $G$ при условии, что нечетное $r$ не является числом Ферма и силовская $r$-подгруппа $R$ перестановочна с 2-нильпотентными (или 2-замкнутыми) подгруппами Шмидта четного порядка из некоторого добавления к $R$ в $G$. Приведены примеры, показывающие, что ограничения на $r$ не являются лишними.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, $r$-разрешимая группа, силовская $r$-подгруппа.

**V. S. Monakhov, E. V. Zubei. On the permutability of a Sylow subgroup with Schmidt subgroups from a supplement.**

A Schmidt group is a finite nonnilpotent group each of whose proper subgroups is nilpotent. A supplement of a subgroup $A$ in a group $G$ is a subgroup $B$ of $G$ such that $G = AB$. Finite groups in which a Sylow subgroup is permutable with some Schmidt subgroups were studied by Ya. G. Berkovich and E. M. Pal'chik (Sib. Mat. Zh. **8** (4), 741–753 (1967)) and by V. N. Knyagina and V. S. Monakhov (Proc. Steklov Inst. Math. **272** (Suppl. 1), S55–S64 (2011)). In this situation, the group may be nonsolvable. For example, in the group PSL(2,7) a Sylow 2-subgroup is permutable with all Shmidt subgroups of odd order. In the group SL(2,8) a Sylow 3-subgroup is permutable with all 2-closed Shmidt subgroups of even order. In the group SL(2,4) a Sylow 5-subgroup is permutable with every 2-closed Shmidt subgroup of even order. Since the groups $\mathrm{Sz}(2^{2k+1})$ for $k \geq 1$, PSU(5,4), PSU(4,2), and $\mathrm{PSp}(4,2^n)$ do not contain Shmidt subgroups of odd order, in these groups any Sylow subgroup is permutable with any Shmidt subgroup of odd order. We establish the $r$-solvability a finite group $G$ such that $r$ is odd and is not a Fermat prime and a Sylow $r$-subgroup $R$ is permutable with 2-nilpotent (or 2-closed) Schmidt subgroups of even order from some supplement of $R$ in $G$. We give examples showing that the constraints on $r$ are not superfluous.

Keywords: finite group, Schmidt group, $r$-solvable group, Sylow $r$-subgroup.

**MSC:** MSC20D10, MSC20D20, MSC20D25, MSC20D40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2018-24-3-145-154

## Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится точно на два различных простых числа), одна из силовских подгрупп нормальна, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в [2].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является статья Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [3]. В ней устанавливались признаки разрешимости группы, в которой некоторые подгруппы Шмидта четного порядка перестановочны с отдельными силовскими подгруппами.

В общем случае существуют простые группы, в которых для некоторого простого $r$ силовская $r$-подгруппа перестановочна с $r'$-подгруппами Шмидта. Например, в группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. В группе $SL(2,4)$ силовская 5-подгруппа перестановочна с каждой 2-замкнутой подгруппой Шмидта четного порядка. В следующих группах вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка: $PSL(2,p)$, где $p$ — простое число Ферма, $PSL(2,9)$, $Sz(8)$, $PSU(5,4)$, $PSU(4,2)$, $PSp(4,4)$. Поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка.

Тем не менее при некотором выборе подгрупп Шмидта для нечетного простого $r$ можно получать $r$-разрешимость группы $G$. В случае подгрупп Шмидта четного порядка в [4] получены следующие признаки $r$-разрешимости группы:

— если силовская $r$-подгруппа группы $G$ перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа $G$ $r$-разрешима [4, теорема 1 (1)];

— если силовская $r$-подгруппа группы $G$ перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и $r \notin \{3,5\}$, то группа $G$ $r$-разрешима [4, теорема 1 (2)].

Ограничение $r \notin \{3,5\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2,8)$ и $SL(2,4)$.

В настоящей работе получены новые признаки $r$-разрешимости группы $G$, а именно, доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, где $r > 2$ и $r$ не является простым числом Ферма. Если существует в группе $G$ подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

**Теорема 2.** *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, где $r > 5$. Если существует подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

**Следствие.** *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, где $r > 5$. Если существует подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

## 1. Используемые обозначения и результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [5; 6].

Пусть $r$ — простое число. Группа с нормальной силовской $r$-подгруппой называется *$r$-замкнутой.* Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс который совпадает с порядком силовской $r$-подгруппы, называется *$r$-нильпотентной.* Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы $G$ соответственно, а $H^G$ — наименьшая нормальная в $G$ подгруппа, содержащая подгруппу $H$. Симметрическая и знакопеременная группы степени $n$ обозначаются через $S_n$ и $A_n$; циклическая и элементарная абелева группы порядков $m$ и $p^t$ обозначаются через $Z_m$ и $E_{p^t}$ соответственно, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы $G$. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа $G$ называется *примарной*, при $|\pi(G)| = 2$ — *бипримарной.* Если $\pi \subseteq \pi(G)$, то $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$. Запись $N \lhd G$ ($N \cdot\!\lhd G$) означает, что $N$ — нормальная (минимальная нормальная) в $G$ подгруппа. Полупрямое произведение нормальной в $G$ подгруппы $A$ и подгруппы $B$ записывается так: $G = [A]B$.

*Нормальным рядом группы* $G$ называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа $G_i$ нормальна в группе $G$ для всех $i = 0, 1, \ldots, m$. Фактор-группы $G_{i+1}/G_i$ называются *факторами* этого ряда. Группа называется *$r$-разрешимой*, если существует ряд (1) такой, что порядки факторов этого ряда либо являются степенями $r$, либо не делятся на $r$. Ряд (1) называется *главным*, если $G_{i+1}/G_i$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/G_i$ для каждого $i$, а числа $|G_{i+1}/G_i|$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, — индексами главного ряда.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

**Лемма 1** [1]. *Пусть $S$ — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $S = [P]Q$, *где $P$ — нормальная силовская $p$-подгруппа, $Q$ — ненормальная силовская $q$-подгруппа, $p$ и $q$ — различные простые числа*;

(2) $Q = \langle y \rangle$ *— циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/P'| = p^m$, *где $m$ — показатель числа $p$ по модулю $q$*;

(4) *главный ряд группы $S$ имеет систему индексов*:

$$p, p, \dots, p, p^m, q, \dots, q,$$

*число индексов, равных $p$, совпадает с $n$, где $p^n = |P'|$; число индексов, равных $q$, совпадает с $b$, где $q^b = |Q|$.*

Условимся $S_{\langle p,q \rangle}$*-группой* называть группу Шмидта с нормальной силовской $p$-подгруппой и ненормальной циклической силовской $q$-подгруппой.

**Лемма 2** [7, лемма 1]. *Если $K$ и $D$ — подгруппы группы $G$, подгруппа $D$ нормальна в $K$ и $K/D$ — $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление $L$ к подгруппе $D$ в $K$ обладает следующими свойствами*:

(1) $L$ *— $p$-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа*;

(2) *все собственные нормальные подгруппы в $L$ нильпотентны*;

(3) $L$ *содержит $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что $Q$ не содержится в $D$ и*

$$L = ([P]Q)^L = Q^L.$$

О п р е д е л е н и е. Подгруппа $A$ группы $G$ называется $OS_{\langle p,q \rangle}$*-полунормальной в* $G$, если существует подгруппа $B$ такая, что $G = AB$ и $A$ перестановочна со всеми $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппами из $B$. В этой ситуации подгруппу $B$ будем называть $OS_{\langle p,q \rangle}$*-добавлением* к подгруппе $A$ в группе $G$. Если подгруппа $A$ перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из $B$, то будем называть подгруппу $A$ $OS$-полунормальной в $G$. (Обозначение $OS$ связано с Отто Юльевичем Шмидтом.)

Понятие $OS$-полунормальной подгруппы является обобщением понятия полунормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа $A$ называется *полунормальной* в группе $G$, если существует подгруппа $B$ такая, что $G = AB$ и $AB_1$ — собственная в $G$ подгруппа для каждой собственной подгруппы $B_1$ из $B$. Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены в [8–11]. В работе [7] изучены группы с полунормальными подгруппами Шмидта.

П р и м е р 1. Если $A$ — подгруппа группы $G$ и существует нильпотентная подгруппа $B$ такая, что $G = AB$, то $A$ будет $OS$-полунормальной подгруппой группы $G$. В частности, любая подгруппа примарного индекса является $OS$-полунормальной подгруппой.

П р и м е р 2. В группе $PSL(2, 7)$ силовская 2-подгруппа $Q$ будет $OS_{\langle 7,3 \rangle}$-полунормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа $B$ порядка 21 и $G = QB$. Подгруппа $B$ является группой Шмидта.

П р и м е р 3. В группе $SL(2, 8)$ силовская 3-подгруппа $R$ будет $OS_{\langle 2,7 \rangle}$-полунормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта $B = [E_{2^3}]Z_7$ такая, что $G = RB$.

П р и м е р 4. В группе $PSL(2, 5)$ силовская 5-подгруппа $P$ будет $OS_{\langle 2,3 \rangle}$-полунормальной, поскольку существует подгруппа $B \cong A_4$ такая, что $PSL(2, 5) = PB$. Здесь $A_4$ — знакопеременная группа, она является группой Шмидта.

Отметим, что в примерах 2–4 силовская $r$-подгруппа, $r \in \{2, 3, 5\}$, $OS$-полунормальна, но не полунормальна.

**Лемма 3.** *Пусть $A$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы $G$ и $B$ — ее некоторое $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.*

(1) *Для любого элемента $g\in G$ подгруппа $B^g$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к подгруппе $A$ в группе $G$.*

(2) *Для любого элемента $g\in G$ подгруппа $A^g$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной в группе $G$, а подгруппы $B$ и $B^g$ — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлениями.*

(3) *Если $X$ — непустое множество элементов из группы $G$, то подгруппа $A^X=\langle A^x \mid x\in X\rangle$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной в группе $G$, а подгруппы $B$ и $B^g$, $g\in G$, будут $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлениями к $A^X$ в $G$.*

Доказательство. 1. Пусть $g=ba$ — произвольный элемент из группы $G$, где $b\in B, a\in A$. Ввиду изоморфизма $B\cong B^g$ можно считать, что $S^g=S^{ba}$ — произвольная $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из $B^g$, где $S$ — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа в $B$. Поскольку $S^b\le B$, то

$$AS^b=S^bA,\quad AS^g=AS^{ba}=(AS^b)^a=(S^bA)^a=S^{ba}A=S^gA.$$

Это означает, что $B^g$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление к $A$ в группе $G$.

2. Если $T$ — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа в $B^g$, то $T=S^g$ для некоторой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы $S$ из $B$. По условию $AS=SA$, поэтому

$$A^gT=A^gS^g=(AS)^g=(SA)^g=S^gA^g=TA^g.$$

Так как $A^gB^g=(AB)^g=G$, то $A^g$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа в $G$ и $B^g$ — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление. Из утверждения (1) следует, что $(B^g)^{g^{-1}}=B$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к $A^g$ в группе $G$.

3. Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Пусть $S$ — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из $B$. Подгруппа $S$ перестановочна с $A$ согласно определению $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной подгруппы и $S$ перестановочна с $A^x$ по утверждению (2) для любого $x\in X$. Поэтому $S$ перестановочна с $A^X$. Следовательно, $A^X$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы $G$ и $B$ — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление. По утверждению (2) подгруппа $B^g$, $g\in G$, будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к $A^X$. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $A$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы $G$ и $B$ — ее некоторое $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.*

(1) *Если $A\le U\le G$, то $A$ $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в $U$ и $U\cap B$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление к $A$ в группе $U$.*

(2) *Если $N\lhd G$, то $AN$ $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в $G$ и $B$ является $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к $AN$ в $G$.*

(3) *Если $N\lhd G$, $N\le B$, то $AN/N$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в $G/N$ и $B/N$ является $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к $AN/N$ в $G/N$.*

(4) *Если $N\lhd G$, $(|N|,|B|)=1$, то $A/N$ $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в $G/N$ и $BN/N$ является $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к $A/N$ в $G/N$.*

Доказательство. (1) Поскольку $A$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы $G$ и $B$ — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление, то $G=AB$ и $A$ перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из $B$. По тождеству Дедекинда $U=A(B\cap U)$. Поскольку $A$ перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из $B\cap U\le B$, то $A$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа в $U$ и $B\cap U$ — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.

(2) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G=(AN)B$ и $AN$ перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из $B$, то $AN$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы $G$ и $B$ ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.

(3) Ясно, что $G/N=(AN/N)(B/N)$. Пусть $D/N$ — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из $B/N$ и $L$ — минимальное добавление к $N$ в $D$. По лемме 2 подгруппа $L$ содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $S$ такую,

что $S^L = L$. Так как $S \leq L \leq D \leq B$, то $A$ перестановочна с $S$. Из леммы 3 (1) следует, что $A$ перестановочна с $S^x$ для любого $x \in G$. Поэтому $A$ перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, $AN/N$ перестановочна с $D/N$, т. е. $AN/N$ $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в $G/N$ и $B/N$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к $AN/N$ в $G/N$.

(4) Так как $G = AB$ и $(|N|, |B|) = 1$, то $N \leq A$ и $G/N = (A/N)(BN/N)$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть $D/N$ — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из $BN/N$. Тогда $D = (B \cap D)[N]$. По лемме 2 существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа $S$ в $B \cap D$ такая, что $S^{B\cap D} = B \cap D$. Так как $S \cong SN/N \leq D/N$, то $S = B \cap D$. Теперь $A$ перестановочна с $B \cap D$ по условию, поэтому $A/N$ перестановочна с $(B \cap D)N/N$, т. е. $A/N$ $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в $G/N$ и $BN/N$ ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление. Лемма доказана.

**Лемма 5.** (1) *Каждая не $p$-нильпотентная группа $G$ содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$,* [5, IV.5.4].

(2) *Каждая не 2-замкнутая группа $G$ содержит $S_{\langle q,2\rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$,* [12, с. 34; 13, следствие 3.1.1].

Пример 5. Аналог утверждения 2 леммы 5 при замене числа 2 на нечетное простое $p$ неверен. Для $p = 3$ контрпримером служит простая группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n > 2$, а для $p \geq 5$ — группа $PSL(2, p)$.

**Лемма 6** [5, VI.4.10]. *Пусть $A$ и $B$ — подгруппы группы $G$ такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

## 2. Группы с разрешимой $r'$-холловой подгруппой

Факторизации групп $PSL(2, q)$ получены в [14], они выписаны также в [15, теорема 0.8]. Приведем формулировку этого результата. Будут использоваться следующие обозначения: $Z_m$, $E_m$ и $D_m$ — циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка $m$.

**Лемма 7.** *Простая группа $PSL(2, p^n)$ обладает только следующими нетривиальными факторизациями.*

(1) $PSL(2, 2^n) = AB$, $A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, $B \cong D_{2(2^n+1)}$ *или* $B \cong Z_{2^n+1}$.

(2) *Если $p > 2$ и $(p^n - 1)/2$ — нечетное число, то* $PSL(2, p^n) = AB$, $A \cong [E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$, $B \cong D_{p^n+1}$.

(3) $PSL(2, 7) = AB$, *либо* $A \cong [Z_7]Z_3$, $B \cong D_8$ *или* $B \cong S_4$, *либо* $A \cong Z_7$, $B \cong S_4$.

(4) $PSL(2, 9) = AB$, *либо* $A \cong [E_9]Z_4$, $B \cong A_5$, *либо* $A \cong A_4$, $B \cong A_5$, *либо* $A \cong S_4$, $B \cong A_5$, *либо* $A \cong B \cong A_5$.

(5) $PSL(2, 11) = AB$, *либо* $A \cong [Z_{11}]Z_5$, $B \cong D_{12}, A_4, A_5$, *либо* $A \cong Z_{11}$, $B \cong A_5$.

(6) $PSL(2, 19) = AB$, $A \cong [Z_{19}]Z_9$, $B \cong D_{20}$ *или* $B \cong A_5$.

(7) $PSL(2, 29) = AB$, *либо* $A \cong [Z_{29}]Z_{14}$, $B \cong A_5$, *либо* $A \cong [Z_{29}]Z_7$, $B \cong A_5$.

(8) $PSL(2, 59) = AB$, $A \cong [Z_{59}]Z_{29}$, $B \cong D_{60}$ *или* $B \cong A_5$.

**Лемма 8** [16, Theorem 1.1]. *Пусть $A$ и $B$ — разрешимые подгруппы группы $G$ и пусть $(|A|, |B|) = 1$. Если $G = AB$, то композиционные факторы группы $G$ являются группами одного из следующих видов*:

(1) *группа простого порядка*;

(2) $PSL(2, 2^n)$, *где* $n \geq 2$;

(3) $PSL(2, q)$, *где* $q \equiv -1 \pmod 4$;

(4) $PSL(3, 3)$;

(5) $M_{11}$.

Отметим, что без требования $(|A|, |B|) = 1$ композиционные факторы группы $G = AB$ с разрешимыми подгруппами $A$ и $B$ перечислил Л. С. Казарин [17].

Из леммы 8 с помощью леммы 7 и списка максимальных подгрупп в $PSL(3,3)$ и $M_{11}$ [18] получается следующий результат.

**Лемма 9.** *Пусть в простой группе $G$ существует разрешимая $p'$-холлова подгруппа, $p \in \pi(G)$.*

(1) *Если $p = 2$, то $G \cong PSL(2,r) = AB$, $A \cong [Z_r]Z_{(r-1)/2}$, $B \cong D_{2^n}$, где $r = 2^n - 1 \geq 7$.*

(2) *Если $p = 3$, то $G \cong PSL(2,2^3) = AB$, $A \cong [E_8]Z_7$, $B \cong Z_9$.*

(3) *Если $p = 5$, то $G \cong A_5 = AB$, $A \cong A_4$, $B \cong Z_5$.*

(4) *Если $p = 7$, то $G \cong PSL(2,7) = AB$, $A \cong S_4$, $B \cong Z_7$.*

(5) *Если $p = 17$, то $G \cong PSL(2,2^4) = AB$, $A \cong [E_{2^4}]Z_{15}$, $B \cong Z_{17}$ или $G \cong PSL(3,3) = AB$, $A \cong [E_9]GL(2,3)$, $B \cong Z_{17}$ (имеется два класса сопряженных подгрупп, изоморфных $[E_9]GL(2,3)$).*

(6) *Если $p > 7$, $p \neq 17$, то $p = 2^n + 1$ — простое число Ферма и $G \cong PSL(2,2^n) = AB$, $A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, $B \cong Z_p$.*

**Лемма 10.** *Пусть $p$ — нечетное простое число и $p$ не является числом Ферма. Если в группе $G$ существует 2-замкнутая $p'$-холлова подгруппа, то $G$ разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа, $H$ — $p'$-холлова подгруппа группы $G$. Тогда $G = PH$ и по условию $H = [Q]K$ — 2-замкнута, где $Q$ — силовская 2-подгруппа, $K$ — $\{2,p\}'$-холлова подгруппа группы $G$. Пусть $N$ — минимальная нормальная в $G$ подгруппа. Так как $(|P|, |H|) = 1$, по [19, лемма 5] $N = (N \cap P)(N \cap H)$, подгруппа $N$ удовлетворяет условиям доказываемой леммы. Если $N < G$, то по индукции $N$ разрешима. Так как фактор-группа $G/N$ тоже удовлетворяет условиям доказываемой леммы, то $G/N$ разрешима по индукции. Значит, $G$ разрешима. Теперь считаем, что $G = N$ — простая группа. Поскольку $p'$-холлова подгруппа $H$ разрешима, то применима лемма 9, по которой $p$ — простое число Ферма. Противоречие. Лемма доказана.

## 3. Достаточные условия $r$-разрешимости группы

**Теорема 1.** *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, где $r > 2$ и $r$ не является простым числом Ферма. Если существует в группе $G$ подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

Доказательство. Пусть в группе $G$ существует подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из $B$. Подгруппа $R$ становится $OS_{\langle p,2\rangle}$-полунормальной для каждого нечетного $p \in \pi(B)$, и она обладает свойствами, перечисленными в лемме 4.

Воспользуемся индукцией по $|G| + |B|$. Проверим, что

(1) $B$ — собственная подгруппа группы $G$.

По условию $R$ перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из $B$. Если $B = G$, то $G$ $r$-разрешима по [4, теорема 1(1)]. Поэтому считаем, что $B < G$.

(2) Порядок $B$ не делится на $r$.

Рассмотрим силовскую $r$-подгруппу $B_r$ из $B$. По лемме 3 (2) можно считать, что $B_r \leq R$. Пусть $S$ — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $B$. По условию $RS = SR$. По тождеству Дедекинда

$$B \cap RS = (B \cap R)S = B_rS = S(B \cap R) = SB_r.$$

По [4, теорема 1(1)] $B$ $r$-разрешима. Теперь $G = RB_{r'}$ и $B$ — $r'$-холлова подгруппа группы $G$.

(3) Подгруппа $B$ не 2-замкнута по лемме 10.

(4) Группа $G$ непростая.

Предположим, что $G$ — простая группа. Так как $B$ — не 2-замкнутая группа, то по лемме 5 (2) в ней существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного порядка $S = [Q]T$, $T$ — силовская 2-подгруппа в $S$. Если $S = B$, то $T = G_2$ — циклическая и $G$ разрешима. Значит, $S < B$. Рассмотрим произвольный элемент $g = ba$ из $G$, где $b \in B$, $a \in R$. Ввиду изоморфизма $B^g \cong B$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $B^g$. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$RS^b = S^bR, \quad RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого $g \in G$. Так как $G$ — простая группа, то $R^G = S^G = G$ и $B = S$ по лемме 6. Противоречие.

(5) Если $N \cdot\!\lhd G$, то либо $N \leq R$, либо $N \leq B$.

Согласно (2) и [19, лемма 5] $N = (N \cap R)(N \cap B)$. Пусть $S$ — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $N \cap B$. Тогда $S \leq B$ и $RS = SR$ по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как $N \cap R$ — силовская $r$-подгруппа в $N$ и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции $N$ $r$-разрешима. Теперь $N$ — либо $r$-подгруппа, либо $r'$-подгруппа. Если $N$ — $r$-подгруппа, то $N \leq R$. Если $N$ — $r'$-подгруппа, то $N \leq B$.

(6) Окончание доказательства.

Если $N \leq R$, то

$$G/N = R/N(BN/N), \quad (|N|, |B|) = 1.$$

Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть $S/N$ — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $BN/N$. Тогда $S = (B \cap S)[N]$, т. е. $B \cap S$ будет минимальным дополнением к $N$ в $S$. По лемме 2 существует подгруппа Шмидта $L$ в $B \cap S$ такая, что $L^{B \cap S} = B \cap S$. Так как $LN/N \leq S/N$, то $L = B \cap S$. Теперь $R$ перестановочна с $B \cap S$ по условию, следовательно, $R/N$ перестановочна с $(B \cap S)N/N = S/N$ и по индукции $G/N$ $r$-разрешима.

Если $N \leq B$, то $G/N = (RN/N)B/N$. Пусть $S/N$ — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $B/N$ и $L$ — минимальное добавление к $N$ в $S$. По лемме 2 подгруппа $L$ содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта четного порядка $D$ такую, что $D^L = L$. Так как $D \leq L \leq S \leq B$, то $R$ перестановочна с $D$. Из леммы 3 (2) следует, что $R$ перестановочна с $D^x$ для любого $x \in G$. Поэтому $R$ перестановочна с $D^L = L$ и с $LN = S$. Следовательно, $RN/N$ перестановочна с $S/N$. По индукции $G/N$ $r$-разрешима.

Получаем, что в любом случае $G/N$ $r$-разрешима. Из (5) следует, что $G$ $r$-разрешима. Теорема доказана.

Заметим, что в формулировке теоремы 1 требования “$r > 2$ и $r$ не является простым числом Ферма” убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа $PSL(2,7)$, для $r = 3$ — группа $SL(2,8)$, для $r = 2^n + 1 > 3$ — группа $SL(2,2^n)$.

**Теорема 2.** *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, где $r > 5$. Если существует подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

Доказательство. Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$. Предположим, что существует подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и подгруппа $R$ перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта из $B$. Подгруппа $R$ становится $OS_{\langle 2,p \rangle}$-полунормальной для каждого нечетного $p \in \pi(B)$, и она обладает свойствами, перечисленными в лемме 4.

Если $B = G$, то $G$ $r$-разрешима [4, теорема 1(2)]. Поэтому считаем, что $B < G$, и используем индукцию по $|G|+|B|$. Используя [4, теорема 1(2)] и повторяя доказательство утверждаения (2) теоремы 1, получаем, что

(1) $B$ — $r'$-подгруппа;

(2) $B$ не 2-нильпотентна по [9, теорема A];

(3) группа $G$ непростая.

Предположим, что $G$ — простая группа. Так как $B$ не 2-нильпотентная группа, то по лемме 5 (1) в ней существует 2-замкнутая $2d$-подгруппа Шмидта $S$ четного порядка. Рассмотрим произвольный элемент $g = ba$ из $G$, где $b \in B$, $a \in R$. Ввиду изоморфизма $B^g \cong B$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из $B^g$. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$RS^b = S^bR, \quad RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого $g \in G$. Так как $G$ — простая группа, то $R^G = S^G = G$ и $B = S$ по лемме 6. По [4, лемма 11] $G \cong PSL(2,5)$ или $SL(2,8)$, где $3 \leq r \leq 5$, противоречие. Следовательно, $G$ — непростая группа.

(4) Если $N \cdot\!\lhd G$, то либо $N \leq R$, либо $N \leq B$.

Согласно [19, лемма 5] $N = (N \cap R)(N \cap B)$. Пусть $S$ — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из $N \cap B$. Тогда $S \leq B$ и $RS = SR$ по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как $N \cap R$ — силовская $r$-подгруппа в $N$ и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции $N$ $r$-разрешима. Теперь $N$ — либо $r$-подгруппа, либо $r'$-подгруппа. Если $N$ — $r$-подгруппа, то $N \leq R$. Если $N$ — $r'$-подгруппа, то $N \leq B$.

(5) Окончание доказательства.

Если $N \leq R$, то $G/N = R/N(BN/N)$ и $(|N|, |B|) = 1$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть $S/N$ — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из $BN/N$. Тогда $S = (B \cap S)[N]$, т. е. $B \cap S$ будет минимальным дополнением к $N$ в $S$. По лемме 2 существует подгруппа Шмидта $L$ в $B \cap S$ такая, что $L^{B \cap S} = B \cap S$. Так как $LN/N \leq S/N$, то $L = B \cap S$. Теперь $R$ перестановочна с $B \cap S$ по условию, следовательно, $R/N$ перестановочна с $(B \cap S)N/N = S/N$ и по индукции $G/N$ $r$-разрешима.

Если $N \leq B$, то $G/N = (RN/N)B/N$. Пусть $S/N$ — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из $B/N$ и $L$ — минимальное добавление к $N$ в $S$. По лемме 2 подгруппа $L$ содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта $D$ такую, что $D^L = L$. Так как $D \leq L \leq S \leq B$, то $R$ перестановочна с $D$. Из леммы 3 (1) следует, что $R$ перестановочна с $D^x$ для любого $x \in G$. Поэтому $R$ перестановочна с $D^L = L$ и с $LN = S$. Следовательно, $RN/N$ перестановочна с $S/N$. По индукции $G/N$ $r$-разрешима.

Получаем, что в любом случае $G/N$ $r$-разрешима. Из (4) следует, что $G$ $r$-разрешима. Теорема доказана.

**Следствие.** *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, где $r > 5$. Если существует подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то группа $G$ $r$ разрешима.*

Заметим, что в формулировке теоремы 2 требования “$r > 5$” убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа $PSL(2,7)$, для $r = 3$ — группа $SL(2,8)$, для $r = 5$ — группа $SL(2,4)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. **Монахов В. С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса (2001) / Ин-т математики НАНУ. Киев, 2002. Сек. 1. С. 81–90.

3. **Беркович Я. Г., Пальчик Э. М.** О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753.
4. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3, С. 130–139.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
6. **Монахов В. С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
7. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
8. **Su X.** On seminormal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. Vol. 8, no. 1. P. 7–9.
9. **Carocca A., Matos H.** Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. Vol. 26, no. 1. P. 157–161. doi: 10.14492/hokmj/1351257811 .
10. **Подгорная В. В.** Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.–матэм. навук. 2000. № 4. С. 22–25.
11. **Монахов В. С.** Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Мат. зам. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.
12. **Беркович Я. Г.** Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 24–39. ISBN: 978-5-458-54866-3 .
13. **Монахов В. С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
14. **Ito N.** On the faktorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. 1953. No. 15. P. 79–84.
15. **Монахов В. С.** Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
16. **Fisman E.** On the product of two finite solvable groups // J. Algebra. 1983. Vol. 80. P. 517–536.
17. **Казарин Л. С.** О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп // Commun. Algebra. 1986. Т. 14, no. 6. С. 1001–1066.
18. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN-10: 0198531990 .
19. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** О $\pi'$-свойствах конечной группы, обладающей $\pi$-холловой подгруппой // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 297–309.

Поступила 27.04.2018

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры алгебры и геометрии
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Минск
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Зубей Екатерина Владимировна
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Минск
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

## REFERENCES

1. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special *Mat. Sb.*, 1924, vol. 31, no. 3-4, pp. 366–372 (in Russian).
2. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups, their existence and some applications. *Proc. Ukr. Math. Congr., 2001*, Kiev, 2002, sec. 1, pp. 81–90 (in Russian).
3. Berkovich Ya.G., Pal'chik, E.M. On the commutability of subgroups of a finite group. *Sib. Math. J.*, 1967, vol. 8, no. 4, pp. 560–568. doi: 10.1007/BF02196475 .
4. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 55–64. doi: 10.1134/S0081543811020052 .

5. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
6. Monakhov V.S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vysheishaya Shkola, 2006, 207 p. (in Russian). ISBN: 985-06-1114-6 .
7. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 4, pp. 244–249. doi: 10.1007/s10469-007-0023-1 .
8. Su X. On seminormal subgroups of finite group. *J. Math. (Wuhan)*, 1988, vol. 8, no. 1, pp. 7–9.
9. Carocca A., Matos H. Some solvability criteria for finite groups. *Hokkaido Math. J.*, 1997, vol. 26, no. 1, pp. 157–161. doi: 10.14492/hokmj/1351257811 .
10. Podgornaya V.V. Seminormal subgroups and supersolvability of finite groups. *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 2000, no. 4, pp. 22–25.
11. Monakhov V.S. Finite groups with a seminormal Hall subgroup. *Math. Notes.*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 542–549. doi: 10.4213/mzm2850 .
12. Berkovich Ya.G. A theorem on non-nilpotent solvable subgroups of a finite group. In: *Konechnye gruppy*, Berkovich Ya.G. (ed.), Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1966, 195 p., ISBN: 978-5-458-54866-3 , pp. 24–39 (in Russian).
13. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Voprosy Algebry*, 1998, no. 13, pp. 153–171 (in Russian).
14. Ito N. On the faktorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. *Acta Sci. Math.*, 1953, no. 15, pp. 79–84.
15. Monakhov V.S. The product of finite groups close to nilpotent. In: *Finite Groups*, Shemetkov L.A. (ed.). Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1975, pp. 70–100 (in Russian).
16. Fisman E. On the product of two finite solvable groups. *J. Algebra*, 1983, vol. 80, pp. 517–536.
17. Kazarin L.S. On groups which are the product of two solvable subgroups. *Commun. Algebra*, 1986, vol. 14, no. 6, pp. 1001–1066. doi: 10.1080/00927878608823352 .
18. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.. *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN-10: 0198531990 .
19. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the $\pi'$-properties of a finite group possessing a hall $\pi$-subgroup. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 234–243. doi: 10.1134/S0037446611020066 .


The paper was received by the Editorial Office on April 27, 2018.

*Viktor Stepanovich Monakhov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com .

*Ekaterina Vladimirovna Zubei*, doctoral student, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru .