ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.518.832

О РАВНОСИЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{T}),\ 1<p<\infty$

Н. А. Ильясов

В статье предлагается метод, который позволяет, в частности, установить равносильность известных оценок М. Ф. Тимана для L_p-модулей гладкости r-го порядка $\omega_r(f;\pi/n)_p$ и оценок О. В. Бесова для L_p-норм производных r-го порядка $\|f^{(r)}\|_p$ посредством элементов последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ наилучших приближений 2π-периодической функции $f\in L_p(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1,\ n\in\mathbb{N}$, где $r\in\mathbb{N},\ 1<p<\infty,\ \mathbb{T}=(-\pi,\pi]$.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty,\ \theta=\min\{2,p\},\ r\in\mathbb{N},\ f\in L_p(\mathbb{T})$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}E_{n-1}^{\theta}(f)_p<\infty$. *Тогда выполнение неравенства* $\omega_r(f;\pi/n)_p\le C_1(r,p)n^{-r}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}$, $n\in\mathbb{N}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и имело место неравенство* $\|f^{(r)}\|_p\le C_2(r,p)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}E_{n-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}$, *где* $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *— класс функций* $f\in L_p(\mathbb{T})$, *имеющих абсолютно непрерывную производную* $(r-1)$*-го порядка и* $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{T})$.

Теорема 2. *Пусть* $1<p<\infty,\ \beta=\max\{2,p\},\ r\in\mathbb{N}$ *и* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$. *Тогда выполнение неравенства* $n^{-r}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\Big)^{1/\beta}\le C_3(r,p)\omega_r(f;\pi/n)_p$, $n\in\mathbb{N}$, *необходимо и достаточно для справедливости неравенства* $\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta r-1}E_{n-1}^{\beta}(f)_p\Big)^{1/\beta}\le C_4(r,p)\|f^{(r)}\|_p$.

В силу справедливости порядкового равенства $\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha r-1}E_{\nu-1}^{\alpha}(f)_p\asymp\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha r-1}\omega_l^{\alpha}(f;\pi/\nu)_p,\ n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, где $1\le\alpha<\infty,\ l\in\mathbb{N},\ l>r$, утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе, если вместо последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривать последовательность $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ (теоремы 3 и 4). Метод, используемый при доказательстве теорем 1 и 2, применяется к получению равносильных оценок сверху и равносильных оценок снизу для величин $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ и $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p,\ n\in\mathbb{N}$, посредством элементов последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$, где $k,r\in\mathbb{N},\ 1<p<\infty$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль гладкости, неравенства теории приближений, равносильные неравенства, неравенства М. Ф. Тимана, неравенства О. В. Бесова.

N. A. Il'yasov. On the equivalence of some inequalities in the theory of approximation of periodic functions in the spaces $L_p(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$.

We propose a method for proving, in particular, the equivalence of M. F. Timan's known estimates for the rth-order L_p-moduli of smoothness $\omega_r(f;\pi/n)_p$ and O. V. Besov's estimates for the L_p-norms $\|f^{(r)}\|_p$ of rth-order derivatives by using elements of the sequence $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ of the best approximations of a 2π-periodic function $f\in L_p(\mathbb{T})$ by trigonometric polynomials of order at most $n-1$, $n\in\mathbb{N}$, where $r\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, and $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$.

Theorem 1. *Let* $1<p<\infty$, $\theta=\min\{2,p\}$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, *and* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}E_{n-1}^{\theta}(f)_p<\infty$. *Then the inequality* $\omega_r(f;\pi/n)_p\le C_1(r,p)n^{-r}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}$, $n\in\mathbb{N}$, *is satisfied if and only if* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *and* $\|f^{(r)}\|_p\le C_2(r,p)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}E_{n-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}$, *where* $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *is the class of functions* $f\in L_p(\mathbb{T})$ *with absolutely continuous derivative of the* $(r-1)$*th order and* $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{T})$.

Theorem 2. *Suppose that* $1<p<\infty$, $\beta=\max\{2,p\}$, $r\in\mathbb{N}$, *and* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$. *Then the inequality* $n^{-r}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\Big)^{1/\beta}\le C_3(r,p)\omega_r(f;\pi/n)_p$ *is satisfied for* $n\in\mathbb{N}$ *if and only if the inequality* $\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta r-1}E_{n-1}^{\beta}(f)_p\Big)^{1/\beta}\le C_4(r,p)\|f^{(r)}\|_p$ *is satisfied.*

In view of the order identity $\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha r-1}E_{\nu-1}^{\alpha}(f)_p\asymp\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha r-1}\omega_l^{\alpha}(f;\pi/\nu)_p$, $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, where $1\le\alpha<\infty$, $l\in\mathbb{N}$, and $l>r$, the assertions of Theorems 1 and 2 remain valid if we replace the sequence $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ by the sequence $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ (Theorems 3 and 4). The method used in the proof of Theorems 1 and 2 can be applied to derive equivalent upper estimates and equivalent lower estimates for the values $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ and $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$, $n\in\mathbb{N}$, by means of elements of the sequence $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$, where $k,r\in\mathbb{N}$ and $1<p<\infty$.

Keywords: best approximation, modulus of smoothness, inequalities of approximation theory, equivalent inequalities, Timan's inequalities, Besov's inequalities.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25, 41A27
DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-93-106

Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p = \Big(\pi^{-1}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$, $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$; $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — класс функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$; $E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in \mathbb{Z}_+$; $S_n(f;x)$ — частная сумма порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$; $T_{n,p}(f;x)$ — полином наилучшего приближения (в метрике $L_p(\mathbb{T})$) функции f порядка $n \in \mathbb{Z}_+$; $\omega_l(f;\delta)_p$ — модуль гладкости l-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $l \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, +\infty)$: $\omega_l(f;\delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p \colon h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^l f(x) = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{l-\nu} \binom{l}{\nu} f(x + \nu h)$, $\binom{l}{\nu} = l!/(\nu!(l-\nu)!)$, $\nu = \overline{0, l}$.

Ниже и всюду в дальнейшем $\theta(p)$, $1 \le p \le \infty$, и $\beta(p)$, $1 < p < \infty$, обозначают функции, определяемые следующим образом: $\theta = \theta(p) = \min\{2, p\}$ для значений $1 \le p < \infty$ и $\theta(\infty) = 1$, $\beta = \beta(p) = \max\{2, p\}$.

М. Ф. Тиманом [1, теорема 1, неравенства (7); 2, неравенство (2)] установлены соответственно следующие неравенства: *пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L_p(\mathbb{T})$, *тогда*

$$\omega_r\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_1(r,p) n^{-r} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta r - 1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{0.1}$$

$$n^{-r} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r - 1} E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\Big)^{1/\beta} \le C_2(r,p) \omega_r\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big)_p, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$

О. В. Бесовым [3, неравенства (4) и (6), неравенства (5) и (7)] доказаны (в эквивалентной формулировке) следующие утверждения:

(*a*) *пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta r - 1} E_{n-1}^{\theta}(f)_p < \infty; \tag{0.3}$$

тогда $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и имеет место неравенство*

$$\|f^{(r)}\|_p \le C_3(r,p) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta r - 1} E_{n-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}; \tag{0.4}$$

(*b*) *пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$; *тогда справедливо неравенство*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta r - 1} E_{n-1}^{\beta}(f)_p\Big)^{1/\beta} \le C_4(r,p) \|f^{(r)}\|_p. \tag{0.5}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $C_j(r, p, \ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные величины, зависящие только от указанных в скобках параметров.

З а м е ч а н и е 1. Оценке (0.1) предшествовал следующий результат: если $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ и $E_{n-1}(f)_p = O(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, то $\omega_1(f;\pi/n)_p = O(n^{-1}(\ln(en))^{1/\theta})$, $n \in \mathbb{N}$. Последнее утверждение является следствием импликации $\omega_2(f;\delta)_p = O(\delta)$, $\delta \in (0, \pi] \Rightarrow \omega_1(f;\delta)_p =$

$O(\delta(\ln(\pi e/\delta))^{1/\theta})$, $\delta \in (0,\pi]$, которая установлена А. Ф. Тиманом и М. Ф. Тиманом [4, теорема 6] при $p=2$ и А. Зигмундом [5] при $1<p<\infty$, поскольку (см. [6, теоремы 8 и 8′]) $\omega_2(f;\delta)_p = O(\delta)$, $\delta \in (0,\pi] \Leftrightarrow E_{n-1}(f)_p = O(n^{-1})$, $n\in\mathbb{N}$. Неравенство (0.1) в случае $r=1$ и $p=2$ доказано С. Б. Стечкиным [7, § 1, лемма 1].

В силу $L_p(\mathbb{T})$ — аналога неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [8, § 2, теорема 1, неравенство (2.5); 9, гл. V, п. 5.11, неравенство (1)])

$$E_{n-1}(f)_p \le C_5(l)\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{0.6}$$

и справедливости порядкового равенства ($1\le p\le\infty$, $1\le\alpha<\infty$, $l\in\mathbb{N}$, $l>r$; см. разд. 1, замечание 8)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha r-1}E_{\nu-1}^{\alpha}(f)_p \asymp \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha r-1}\omega_l^{\alpha}\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p, \qquad n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}, \tag{0.7}$$

оценки (0.1), (0.2) и утверждения $(a),(b)$ остаются в силе, если вместо последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривать последовательность $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ (см. разд. 1, замечание 9).

Напомним, что порядковое равенство $\varphi_n \asymp \psi_n$ означает существование таких постоянных величин $0<C_6\le C_7$, зависящих лишь от заданных параметров (в данном случае l, r, α), что $C_6\psi_n \le \varphi_n \le C_7\psi_n$.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in L_p(\mathbb{T})$ *и выполняется условие* (0.3). *Тогда выполнение неравенства* (0.1) *необходимо и достаточно, чтобы* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и имело место неравенство* (0.4).

З а м е ч а н и е 2. В случае $r=1$ на возможность получения неравенства (0.4) (при выполнении условия (0.3)) из неравенства (0.1) с помощью одной теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда [10, п. 6.4, теорема 24, (i)] было указано О. В. Бесовым [3, абзац после формулировки теоремы 2].

Теорема 2. *Пусть* $1<p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$ *и* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$. *Тогда выполнение неравенства* (0.2) *необходимо и достаточно для справедливости неравенства* (0.5).

Порядковое равенство (0.7) позволяет вывести в качестве следствий из теоремы 1 и теоремы 2 соответственно следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $l,r\in\mathbb{N}$, $l>r$, $f\in L_p(\mathbb{T})$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta r-1}\omega_l^{\theta}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p < \infty. \tag{0.8}$$

Тогда выполнение неравенства

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_8(l,r,p)n^{-r}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}\omega_l^{\theta}\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\theta}, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{0.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и имело место неравенство*

$$\|f^{(r)}\|_p \le C_9(l,r,p)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}\omega_l^{\theta}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/\theta}. \tag{0.10}$$

З а м е ч а н и е 3. Условие $l > r$ необходимо для сходимости ряда (0.8) для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_l(f;\delta)_p \not\equiv 0$, поскольку в противном случае в силу известного свойства $\omega_l(f;\delta)_p \geq (2\pi)^{-l}\omega_l(f;\pi)_p\delta^l$, $\delta \in (0,\pi]$, указанный ряд заведомо расходится. В случае $l = r$ принадлежность функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ классу $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ обеспечивает условие $\sup\{\delta^{-r}\omega_r(f;\delta)_p\colon \delta \in (0,+\infty)\} \leq K$, где K — некоторая положительная постоянная величина (см. разд. 1, замечание 6, п. 1)).

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $l, r \in \mathbb{N}$, $l > r$ *и* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$. *Тогда выполнение неравенства*

$$n^{-r}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}\omega_l^{\beta}\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\right)^{1/\beta} \leq C_{10}(l,r,p)\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{0.11}$$

необходимо и достаточно для справедливости неравенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta r-1}\omega_l^{\beta}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\right)^{1/\beta} \leq C_{11}(l,r,p)\|f^{(r)}\|_p\,. \tag{0.12}$$

З а м е ч а н и е 4. В случае $r = 1$, $l = 2$ неравенство (0.10) (в интегральной форме записи) для значений $1 < p \leq 2$ ($\Rightarrow \theta = \min\{2,p\} = p$) следует из одного результата И. Марцинкевича [11, теорема 3, неравенство (1.4), с. 43]. Наличие в неравенстве (0.12) (случай $r = 1$, $l = 2$) показателя $\beta = \max\{2,p\} = p$ для значений $2 \leq p < \infty$ подтверждается оценкой (1.3), полученной в [11, теорема 2, с. 42] (см. также [12, § 2, п. 1]).

Следующий результат в известной степени дополняет утверждение теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$, $G_n(f;x) = S_n(f;x)$ *при* $1 < p < \infty$ *и* $G_n(f;x) = T_{n,p}(f;x)$ *при* $p = 1$, $p = \infty$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \leq C_{12}(r,p)n^{-r}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\right)^{1/\theta}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{0.13}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\|G_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p \leq C_{13}(r,p)\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\right)^{1/\theta}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{0.14}$$

З а м е ч а н и е 5. Неравенство (0.14) в случае $p = \infty$ доказано С. Б. Стечкиным [8, § 5, лемма 10, неравенство (5.10)] (в случае $p = 1$ доказательство сохраняется). В этой же работе впервые реализована идея привлечения (0.14) к доказательству неравенства (0.13) (см. [8, § 5, теорема 8, неравенство (5.14)]).

Доказательства теорем 1, 2 и 5 приведены в разд. 1. В разд. 2 метод, используемый при доказательстве теорем 1 и 2, применяется к получению равносильных оценок сверху (лемма 2 и замечание 11) и равносильных оценок снизу (лемма 3 и замечание 12) для величин $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ и $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$, $n \in \mathbb{N}$, посредством элементов последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$, где $k, r \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$.

1. Доказательства теоремы 1, теоремы 2 и теоремы 5

В следующей основной лемме собраны необходимые оценки, используемые при доказательстве приведенных ниже утверждений ($S_n(f) = S_n(f;\cdot)$).

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и* $r \in \mathbb{N}$; *тогда*

1) $\|S_n(f)\|_p \le C_{14}(p)\|f\|_p$, $E_n(f)_p \le \|f - S_n(f)\|_p \le (1 + C_{14}(p))E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

2) $E_{\nu-1}(S_n(f))_p \le C_{14}(p)(1 + C_{14}(p))E_{\nu-1}(f)_p$, $1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $E_{\nu-1}(S_n(f))_p = 0$, $\nu \ge n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

3) $E_n(f)_p \le E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p \le (1 + C_{14}(p))E_n(f)_p$, $1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p = E_{\nu-1}(f)_p$, $\nu \ge n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

4) $E_{\nu-1}(f)_p \le (1+C_{14}(p))E_n(f)_p + E_{\nu-1}(S_n(f))_p \le (1+C_{14}(p))^2 E_{\nu-1}(f)_p$, $1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $\max\left\{((1 + C_{14}(p))C_5(r))^{-1}\|f - S_n(f)\|_p,\ 2^r(C_{14}(p))^{-1}n^{-r}\|S_n^{(r)}(f)\|_p\right\} \le \omega_r(f;\pi/n)_p \le 2^r\|f - S_n(f)\|_p + \pi^r n^{-r}\|S_n^{(r)}(f)\|_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1) Левая оценка представляет собой известное неравенство М. Рисса [13, п. 13, теорема V, неравенство (30) на с. 230] (см. также [14, т. 1, гл. 7, теорема 6.4]). Оценка слева в правой части очевидна, а оценка справа установлена в [15, п. *i*) леммы *C* на с. 539].

2) В силу оценок из п. 1) получаем ($1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$)

$$E_{\nu-1}(S_n(f))_p \le \|S_n(f) - S_{\nu-1}(S_n(f))\|_p = \|S_n(f) - S_n(S_{\nu-1}(f))\|_p = \|S_n(f - S_{\nu-1}(f))\|_p$$

$$\le C_{14}(p)\|f - S_{\nu-1}(f)\|_p \le C_{14}(p)(1 + C_{14}(p))E_{\nu-1}(f)_p.$$

3) В силу известных свойств последовательности $E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем ($1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$)

$$E_n(f)_p \le E_n(f - S_n(f))_p + E_n(S_n(f))_p = E_n(f - S_n(f))_p$$

$$\le E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p \le \|f - S_n(f)\|_p \le (1 + C_{14}(p))E_n(f)_p.$$

Далее, учитывая равенство в п. 2), получаем ($\nu \ge n+1$, $n \in \mathbb{Z}_+$)

$$E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p \le E_{\nu-1}(f)_p + E_{\nu-1}(S_n(f))_p$$

$$= E_{\nu-1}(f)_p \le E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p + E_{\nu-1}(S_n(f))_p = E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p.$$

4) Учитывая оценки в п. 3) и п. 2), получаем ($1 \le \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}$)

$$E_{\nu-1}(f)_p \le E_{\nu-1}(f - S_n(f))_p + E_{\nu-1}(S_n(f))_p \le (1 + C_{14}(p))E_n(f)_p + E_{\nu-1}(S_n(f))_p$$

$$\le (1 + C_{14}(p))E_{\nu-1}(f)_p + C_{14}(p)(1 + C_{14}(p))E_{\nu-1}(f)_p = (1 + C_{14}(p))^2 E_{\nu-1}(f)_p.$$

5) В силу известных свойств модулей гладкости $\omega_r(f;\delta)_p$ имеем

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le \omega_r\Big(f - S_n(f);\frac{\pi}{n}\Big)_p + \omega_r\Big(S_n(f);\frac{\pi}{n}\Big)_p \le 2^r\|f - S_n(f)\|_p + \pi^r n^{-r}\|S_n^{(r)}(f)\|_p,$$

откуда следует правая оценка. Докажем левую оценку. В силу правой оценки в п. 1) и неравенства (0.6) получаем $\|f - S_n(f)\|_p \le (1 + C_{14}(p))E_n(f)_p \le (1 + C_{14}(p))C_5(r)\omega_r(f;\pi/(n+1))_p$. Далее, в силу неравенства Ф. Рисса — С. Б. Стечкина — С. М. Никольского (см., например, [9, гл. 4, п. 4.8.6] и левой оценки в п. 1) имеем

$$\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p \le 2^{-r}n^r\|\Delta^r_{\pi/n}S_n(f;\cdot)\|_p = 2^{-r}n^r\|S_n(\Delta^r_{\pi/n}f;\cdot)\|_p$$

$$\le 2^{-r}n^r C_{14}(p)\|\Delta^r_{\pi/n}f(\cdot)\|_p \le 2^{-r}C_{14}(p)n^r\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p.$$

Лемма 1 доказана. □

Для краткости изложения введем обозначение: $\mathrm{E}(f;p;r;\alpha) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-1}E^{\alpha}_{n-1}(f)_p\Big)^{1/\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость*: если имеет место неравенство (0.1), то

$$n^r\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_1(r,p)\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta} \le C_1(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta)<\infty,$$

откуда $\delta^{-r}\omega_r(f;\delta)_p < 2^r\pi^{-r}C_1(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$, $\delta\in(0,\pi]$. Применяя теорему 2 [16], получаем, что $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и

$$\|f^{(r)}\|_p = \varliminf_{\delta\to+0}\|\delta^{-r}\Delta^r_\delta f(\cdot)\|_p \le \varliminf_{\delta\to+0}\delta^{-r}\omega_r(f;\delta)_p \le 2^r\pi^{-r}C_1(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta).$$

Достаточность: если $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и имеет место неравенство (0.4), то в силу п. 2) леммы 1 имеем

$$\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p \le C_3(r,p)\bigg(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(S_n(f))_p\bigg)^{1/\theta} = C_3(r,p)\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(S_n(f))_p\bigg)^{1/\theta}$$

$$\le C_3(r,p)C_{14}(p)(1+C_{14}(p))\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta},$$

откуда, учитывая оценки в п. 5) и п. 1) леммы 1, получаем

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le 2^r\|f-S_n(f)\|_p + \pi^r n^{-r}\|S_n^{(r)}(f)\|_p$$

$$\le 2^r(1+C_{14}(p))E_n(f)_p + \pi^r C_3(r,p)C_{14}(p)(1+C_{14}(p))n^{-r}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta}$$

$$\le \big\{2^r(1+C_{14}(p))(\theta r)^{1/\theta} + \pi^r C_3(r,p)C_{14}(p)(1+C_{14}(p))\big\}n^{-r}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta}.$$

Теорема 1 доказана. □

З а м е ч а н и е 6. 1) При доказательстве необходимости в утверждении теоремы 1 можно также использовать следующий известный результат (см., например, [17, гл. II, § 10, теорема 1 и теорема 3]): *пусть* $1<p<\infty$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, $r\in\mathbb{N}$*; тогда соотношения* $\varliminf_{\delta\to+0}\delta^{-r}\omega_r(f;\delta)_p \le K$, $\sup\{\delta^{-r}\omega_r(f;\delta)_p\colon \delta\in(0,+\infty)\}\le K$ *и* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, $\|f^{(r)}\|_p\le K$ *эквивалентны, где* K *— некоторая положительная постоянная величина.*

2) Неравенство (0.4) (при условии (0.3) $\Leftrightarrow \mathrm{E}(f;p;r;\theta)<\infty \Rightarrow f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$) непосредственно следует из неравенства (0.14) для случая $1<p<\infty$:

(*i*) $\|f^{(r)}\|_p \le \sup\{\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\colon n\in\mathbb{N}\} \le C_{13}(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$, поскольку

$$\|f^{(r)}\|_p \le \|f^{(r)}-S_n^{(r)}(f)\|_p + \|S_n^{(r)}(f)\|_p \le (1+C_{14}(p))E_n(f^{(r)})_p + \sup\{\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\colon n\in\mathbb{N}\},$$

и, значит,

$$\|f^{(r)}\|_p \le \sup\{\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\colon n\in\mathbb{N}\},$$

где

$$\sup\{\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\colon n\in\mathbb{N}\} \le C_{14}(p)\|f^{(r)}\|_p<\infty;$$

(*ii*) $\|f^{(r)}\|_p = \lim_{n\to\infty}\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p \le C_{13}(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$, поскольку

$$\Big|\|f^{(r)}\|_p - \|S_n^{(r)}(f)\|_p\Big| \le \|f^{(r)}-S_n^{(r)}(f)\|_p \le (1+C_{14}(p))E_n(f^{(r)})_p \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

и, следовательно,
$$\|f^{(r)}\|_p = \lim_{n\to\infty} \|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость*: если $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и имеет место неравенство (0.2), то
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r-1} E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta} \le C_2(r,p) n^r \omega_r\left(f;\frac{\pi}{n}\right)_p \le C_2(r,p)\pi^r \|f^{(r)}\|_p,$$

откуда сразу следуют сходимость ряда $\mathrm{E}(f;p;r;\beta)$ и справедливость неравенства $\mathrm{E}(f;p;r;\beta) \le C_2(r,p)\pi^r\|f^{(r)}\|_p$.

Достаточность: если имеет место неравенство (0.5), то, принимая во внимание оценку $\|S_n^{(r)}(f)\|_p \le C_{14}(p)\|f^{(r)}\|_p,\ n \in \mathbb{N}$, в силу п. 2) леммы 1 имеем
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r-1} E_{\nu-1}^{\beta}(S_n(f))_p\right)^{1/\beta} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\beta r-1} E_{\nu-1}^{\beta}(S_n(f))_p\right)^{1/\beta} \le C_4(r,p)\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p,$$

откуда, учитывая левую оценку в п. 4) леммы 1, неравенство (0.6) и левую оценку в п. 5) леммы 1, получаем
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r-1} E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta} \le 2^{1-1/\beta}\Bigg\{(1+C_{14}(p))E_n(f)_p\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}\right)^{1/\beta}$$
$$+\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r-1} E_{\nu-1}^{\beta}(S_n(f))_p\right)^{1/\beta}\Bigg\} \le 2^{1-1/\beta}\big\{(1+C_{14}(p))n^r E_{n-1}(f)_p + C_4(r,p)\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\big\}$$
$$\le 2^{1-1/\beta}\Big\{(1+C_{14}(p))C_5(r)n^r\omega_r\left(f;\frac{\pi}{n}\right)_p + C_4(r,p)2^{-r}C_{14}(p)n^r\omega_r\left(f;\frac{\pi}{n}\right)_p\Big\}$$
$$\le 2^{1-1/\beta}\big\{(1+C_{14}(p))C_5(r) + 2^{-r}C_4(r,p)C_{14}(p)\big\}n^r\omega_r\left(f;\frac{\pi}{n}\right)_p,$$

что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана. □

Ниже приводятся замечания относительно доказательств теоремы 3 и теоремы 4.

Положим $\Omega_l(f;p;r;\alpha) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha r-1}\omega_l^{\alpha}(f;\pi/n)_p\right)^{1/\alpha}$, где $l,r \in \mathbb{N},\ l > r,\ 1 \le \alpha < \infty$.

З а м е ч а н и е 7. Как было отмечено во введении, в силу неравенства (0.6) и порядкового равенства (0.7), оценки (0.1), (0.2) и утверждения (a), (b) остаются в силе, если вместо последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривать последовательность $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$.

Действительно, применяя (0.6) в правой части (0.1) и учитывая (0.7) (при $\alpha = \beta$) в левой части (0.2), получим соответственно неравенства (0.9) и (0.11). Далее, в силу неравенства (0.6) сходимость ряда $\Omega_l(f;p;r;\theta)$ гарантирует сходимость ряда $\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$, откуда согласно утверждению (a) следует, что $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и в силу неравенства (0.4) имеем $\|f^{(r)}\|_p \le C_3(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta) \le C_3(r,p)C_5(l)\Omega_l(f;p;r;\theta)$. И, наконец, если $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, то в силу (0.7) (при $\alpha = \beta$) и неравенства (0.5) получаем $\Omega_l(f;p;r;\beta) \le C_{15}(l,r,\beta)\mathrm{E}(f;p;r;\beta) \le C_{15}(l,r,\beta)C_4(r,p)\|f^{(r)}\|_p$.

З а м е ч а н и е 8. Порядковое равенство (0.7) позволяет утверждать, что *выполнение неравенств* (0.1) и (0.2) *равносильно выполнению соответственно неравенств* (0.9) *и* (0.11), *сходимость ряда* (0.3) *эквивалентна сходимости ряда* (0.8), *а выполнение неравенств* (0.4) (*при условии* (0.3)) *и* (0.5) (*при условии* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$) *равносильно выполнению соответственно неравенств* (0.10) (*при условии* (0.8)) *и* (0.12) (*при условии* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$).

Для полноты изложения приведем доказательство (0.7). Левая часть (0.7) оценивается через правую часть с помощью неравенства (0.6). С другой стороны, в силу неравенства (1) [9, гл. 6, п. 6.1.1] правая часть (0.7) не превышает $C_{16}^{\alpha}(l)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-\alpha(l-r)-1}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{l-1}E_{\mu-1}(f)_p\Big)^{\alpha}$, откуда, меняя порядок суммирования при $\alpha=1$ и применяя неравенство Харди [18, теорема 346] при $\alpha>1$, получаем оценку правой части (0.7) через левую часть.

Доказательство теоремы 5. Вначале рассмотрим случай $1<p<\infty$. Если имеет место неравенство (0.14), то (см. доказательство теоремы 1 в части "достаточность")

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\le 2^r\|f-S_n(f)\|_p+\pi^r n^{-r}\|S_n^{(r)}(f)\|_p\le 2^r(1+C_{14}(p))E_n(f)_p$$

$$+\pi^r C_{13}(r,p)n^{-r}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\bigg)^{1/\theta}\le C_{12}(r,p)n^{-r}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\bigg)^{1/\theta},$$

где $C_{12}(r,p)=2^r(1+C_{14}(p))(\theta r)^{1/\theta}+\pi^r C_{13}(r,p)$.

С другой стороны, если имеет место неравенство (0.13), то в силу левой оценки в п. 5) леммы 1 имеем

$$\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\le 2^{-r}C_{14}(p)n^r\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\le C_{13}(r,p)\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\bigg)^{1/\theta},\qquad n\in\mathbb{N},$$

где $C_{13}(r,p)=2^{-r}C_{14}(p)C_{12}(r,p)$.

Рассмотрим теперь случай $p=1,\ p=\infty$. Если имеет место неравенство (0.14), то (см. доказательство правой оценки в п. 5) леммы 1)

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\le 2^r\|f-T_{n,p}(f)\|_p+\pi^r n^{-r}\|T_{n,p}^{(r)}(f)\|_p=2^rE_n(f)_p+\pi^r n^{-r}\|T_{n,p}^{(r)}(f)\|_p$$

$$\le 2^rE_{n-1}(f)_p+\pi^r C_{13}(r,p)n^{-r}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_p\le C_{12}(r,p)n^{-r}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_p,$$

где $C_{12}(r,p)=r2^r+\pi^r C_{13}(r,p)$.

С другой стороны, если имеет место неравенство (0.13), то (см. доказательство левой оценки в п. 5) леммы 1) получаем

$$\|T_{n,p}^{(r)}(f;\cdot)\|_p\le 2^{-r}n^r\|\Delta_{\pi/n}^rT_{n,p}(f;\cdot)\|_p\le 2^{-r}n^r\{\|\Delta_{\pi/n}^r[T_{n,p}(f;\cdot)-f(\cdot)]\|_p+\|\Delta_{\pi/n}^rf(\cdot)\|_p\}$$

$$\le 2^{-r}n^r\Big\{2^r\|T_{n,p}(f)-f\|_p+\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\}=n^rE_n(f)_p+2^{-r}n^r\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\le(2^{-r}+C_5(r))n^r\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\le C_{13}(r,p)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_p,$$

где $C_{13}(r,p)=(2^{-r}+C_5(r))C_{12}(r,p)$. Теорема 5 доказана. □

2. Неравенства для наилучших приближений и модулей гладкости производной функции $f\in L_p(\mathbb{T}),\ 1<p<\infty$

В разд. 1 было установлено, что неравенства (0.14) (в случае $1<p<\infty$), (0.1) и (0.4) (при условии (0.3)) равносильны, т. е. выполнение одного из них влечет выполнение двух других. В этом разделе, используя лишь неравенства (0.1), (0.4) и лемму 1, мы приводим доказательства равносильных оценок сверху $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ и $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$, $n\in\mathbb{N}$, посредством элементов последовательности $\{E_{\nu-1}(f)_p\}_{\nu=1}^{\infty}$ (лемма 2). Кроме того, используя неравенство (0.5), равносильное неравенству (0.2) (при условии $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$), лемму 1 и неравенство (0.6), получаем соответствующие равносильные оценки снизу $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ и $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$, $n\in\mathbb{N}$ (лемма 3).

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k, r \in \mathbb{N}$ *и* $\mathrm{E}(f;p;r;\theta) < \infty$; *тогда* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и справедливы неравенства*:
1) $\|f^{(r)}\|_p \le C_3(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$;
2) $E_{n-1}(f^{(r)})_p \le \|f^{(r)}(\cdot) - S_{n-1}^{(r)}(f;\cdot)\|_p \le C_{17}(r,p)\Big\{n^r E_{n-1}(f)_p + \Big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}\Big\}$, $n \in \mathbb{N}$;
3) $\omega_k\Big(f^{(r)};\dfrac{\pi}{n}\Big)_p \le C_{18}(k,r,p)\Big\{\Big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta} + n^{-k}\Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta(k+r)-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}\Big\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Утверждение $\mathrm{E}(f;p;r;\theta) < \infty \Rightarrow f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и неравенство 1) сформулированы во введении (см. там утверждение (a) и неравенство (0.4); другое доказательство приведено также в разд. 1, доказательство теоремы 1). Применяя неравенство 1) к функции $g_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$, $n \in \mathbb{N}$, и учитывая оценки в п. 3) леммы 1, получаем

$$E_n(f^{(r)})_p \le \|f^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p = \|g_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p \le C_3(r,p)\mathrm{E}(g_n;p;r;\theta)$$
$$\le C_3(r,p)\Big\{\Big(\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(g_n)_p\Big)^{1/\theta} + \Big(\sum_{\nu=n+2}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(g_n)_p\Big)^{1/\theta}\Big\}$$
$$\le C_3(r,p)\Big\{(1 + C_{14}(p))(n+1)^r E_n(f)_p + \Big(\sum_{\nu=n+2}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}\Big\}.$$

Оценка $E_0(f^{(r)})_p$ непосредственно следует из неравенства 1) $\Big(\|f^{(r)}(\cdot) - S_0^{(r)}(f;\cdot)\|_p = \|f^{(r)}\|_p\Big)$:

$$E_0(f^{(r)})_p \le \|f^{(r)}\|_p \le C_3(r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta) \le C_3(r,p)\Big\{E_0(f)_p + \Big(\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}\Big\}.$$

Из последних двух оценок следует неравенство 2) с $C_{17}(r,p) = C_3(r,p)(1 + C_{14}(p))$.

Аналогично доказательству правой оценки в п. 5) леммы 1 имеем

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p \le 2^k \|f^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p + \pi^k n^{-k} \|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_p,$$

откуда, привлекая установленную выше оценку $\|f^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p$ и неравенство (0.14), получаем

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p \le 2^k C_3(r,p)\Big\{(1 + C_{14}(p))(n+1)^r E_n(f)_p + \Big(\sum_{\nu=n+2}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}\Big\}$$
$$+ \pi^k C_{13}(k+r,p) n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta(k+r)-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta} \le C_{18}(k,r,p)\Big\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\theta r-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}$$
$$+ n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta(k+r)-1} E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\Big)^{1/\theta}\Big\},$$

где $C_{18}(k,r,p) = 2^{k+r}(\theta(k+r))^{1/\theta} C_3(r,p)(1 + C_{14}(p)) + \pi^k C_{13}(k+r,p)$.

Лемма 2 доказана. $\square$

Замечание 9. Отметим, что выполнение неравенства (0.14) в случае $1 < p < \infty$ для значения $k + r$ вместо значения r не только достаточно, но и необходимо для справедливости неравенства в п. 3) леммы 2. Действительно, в силу оценок п. 2) леммы 1 имеем

$$\omega_k\Big(S_n^{(r)}(f);\frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_{18}(k,r,p) n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta(k+r)-1} E_{\nu-1}^{\theta}(S_n(f))_p\Big)^{1/\theta}$$

$$\le C_{18}(k,r,p)C_{14}(p)(1+C_{14}(p))n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta(k+r)-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\biggr)^{1/\theta},$$

откуда, учитывая оценку (см. доказательство п. 5) леммы 1)

$$\|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_p=\|S_n^{(k)}(f^{(r)};\cdot)\|_p\le 2^{-k}n^k\|\Delta_{\pi/n}^{k}S_n(f^{(r)};\cdot)\|_p$$

$$=2^{-k}n^k\|\Delta_{\pi/n}^{k}S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\le 2^{-k}n^k\omega_k\Bigl(S_n^{(r)}(f);\frac{\pi}{n}\Bigr)_p,$$

получаем

$$\|S_n^{(k+r)}(f;\cdot)\|_p\le 2^{-k}C_{18}(k,r,p)C_{14}(p)(1+C_{14}(p))\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta(k+r)-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\biggr)^{1/\theta}.$$

З а м е ч а н и е 10. Неравенство 3) в утверждении леммы 2 в несколько иной формулировке фактически установлено О. В. Бесовым [3, теорема 2] (см. также [19, теорема 3, неравенства (4)]).

З а м е ч а н и е 11. Неравенства 1)–3) в утверждении леммы 2 являются равносильными. При доказательстве указанных неравенств было установлено, что 2) выводится из 1), а 3) получается привлечением 2). С другой стороны, выполнение неравенства 3) обеспечивает справедливость неравенства 1). Действительно, поскольку правая часть неравенства 3) не превышает $2C_{18}(k,r,p)\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$, то, учитывая оценки в пп. 1) и 5) леммы 1, а также привлекая неравенства (0.6) и (0.1), получаем

$$\|f^{(r)}\|_p\le\|f^{(r)}(\cdot)-S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p+\|S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\le(1+C_{14}(p))E_n(f^{(r)})_p+2^{-r}C_{14}(p)n^r\omega_r\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p$$

$$\le(1+C_{14}(p))C_5(k)\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p+2^{-r}C_{14}(p)C_1(r,p)\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(f)_p\biggr)^{1/\theta}$$

$$\le 2(1+C_{14}(p))C_5(k)C_{18}(k,r,p)E(f;p;r;\theta)+2^{-r}C_{14}(p)C_1(r,p)E(f;p;r;\theta)$$

$$=\{2(1+C_{14}(p))C_5(k)C_{18}(k,r,p)+2^{-r}C_{14}(p)C_1(r,p)\}E(f;p;r;\theta).$$

Аналогичным образом доказывается, что выполнение неравенства 2) также обеспечивает справедливость неравенства 1): поскольку правая часть неравенства 2) не превышает $(1+(\theta r)^{1/\theta})C_{17}(r,p)E(f;p;r;\theta)$, то

$$\|f^{(r)}\|_p\le(1+C_{14}(p))E_n(f^{(r)})_p+2^{-r}C_{14}(p)n^r\omega_r\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p$$

$$\le(1+C_{14}(p))(1+(\theta r)^{1/\theta})C_{17}(r,p)E(f;p;r;\theta)+2^{-r}C_{14}(p)C_1(r,p)E(f;p;r;\theta)$$

$$=\bigl\{(1+C_{14}(p))(1+(\theta r)^{1/\theta})C_{17}(r,p)+2^{-r}C_{14}(p)C_1(r,p)\bigr\}E(f;p;r;\theta).$$

Следует отметить, что в приведенных выше оценках $\|f^{(r)}\|_p$ посредством $\mathrm{E}(f;p;r;\theta)$ достаточно было бы ограничиться рассмотрением случая $n=1$, поскольку параметр $n\in\mathbb{N}$ отсутствует в неравенстве 1) (см. по этому поводу замечание 12).

И наконец, покажем, что выполнение неравенства 3) влечет выполнение неравенства 2). Применяя неравенство 3) к функции $g_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)$, $n\in\mathbb{N}$, и, учитывая оценки в п. 3) леммы 1, имеем

$$\omega_k\Bigl(g_n^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\le C_{18}(k,r,p)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E_{\nu-1}^{\theta}(g_n)_p\biggr)^{1/\theta}+n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta(k+r)-1}E_{\nu-1}^{\theta}(g_n)_p\biggr)^{1/\theta}\biggr\}$$

$$\leq C_{18}(k,r,p)\bigg\{\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta}+(1+C_{14}(p))n^rE_n(f)_p\bigg\}.$$

Далее, применяя неравенство (0.6) и учитывая оценку (см. доказательство первой оценки в п. 2) леммы 1)

$$E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_p\leq\|S_n^{(r)}(f)-S_{n-1}(S_n^{(r)}(f))\|_p=\|S_n^{(r)}(f)-S_n^{(r)}(S_{n-1}(f))\|_p=\|S_n^{(r)}(f-S_{n-1}(f))\|_p$$

$$\leq n^r\|S_n(f-S_{n-1}(f))\|_p\leq C_{14}(p)n^r\|f-S_{n-1}(f)\|_p\leq C_{14}(p)(1+C_{14}(p))n^rE_{n-1}(f)_p,$$

получаем

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p\leq E_{n-1}(f^{(r)}-S_n^{(r)}(f))_p+E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_p=E_{n-1}(g_n^{(r)})_p+E_{n-1}(S_n^{(r)}(f))_p$$

$$\leq C_5(k)\omega_k\Big(g_n^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p+C_{14}(p)(1+C_{14}(p))n^rE_{n-1}(f)_p$$

$$\leq C_5(k)C_{18}(k,r,p)\bigg\{\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta}+(1+C_{14}(p))n^rE_n(f)_p\bigg\}+C_{14}(p)(1+C_{14}(p))$$

$$\times n^rE_{n-1}(f)_p\leq(C_5(k)C_{18}(k,r,p)+C_{14}(p))(1+C_{14}(p))\bigg\{n^rE_{n-1}(f)_p+\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\theta}\bigg\}.$$

Лемма 3. *Пусть* $1<p<\infty,\ k,r\in\mathbb{N}$ *и* $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$*; тогда* $\mathrm{E}(f;p;r;\beta)<\infty$ *и справедливы неравенства:*

1) $\mathrm{E}(f;p;r;\beta)\leq C_4(r,p)\|f^{(r)}\|_p$;

2) $n^rE_{n-1}(f)_p+\bigg(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\beta}\leq C_{19}(r,p)E_{n-1}(f^{(r)})_p,\ n\in\mathbb{N}$;

3) $\bigg(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\beta}+n^{-k}\bigg(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(k+r)-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\beta}\leq C_{20}(k,r,p)\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p$, $n\in\mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})\Rightarrow\mathrm{E}(f;p;r;\beta)<\infty$ и неравенство 1) сформулированы во введении (см. там утверждение (b) и неравенство (0.5); другое доказательство приведено также в разделе 1, доказательство теоремы 2).

Применяя неравенство 1) к функции $g_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x),\ n\in\mathbb{N}$, и учитывая оценки в п. 3) леммы 1, имеем

$$C_4(r,p)\|g_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p\geq\mathrm{E}(g_n;p;r;\beta)\geq\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1}(g_n)_p\bigg)^{1/\beta}=\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\beta},$$

откуда в силу второй оценки в п. 1) леммы 1 получаем

$$\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\beta}\leq C_4(r,p)\|g_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p=C_4(r,p)\|f^{(r)}(\cdot)-S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p$$

$$=C_4(r,p)\|f^{(r)}(\cdot)-S_n(f^{(r)};\cdot)\|_p\leq C_4(r,p)(1+C_{14}(p))E_{n-1}(f^{(r)})_p.$$

Оценка первого слагаемого в 2) следует из известного неравенства (см., например, [9, гл. V, п. 5.11.4]: $E_{n-1}(f)_p\leq C_{21}(r)n^{-r}E_{n-1}(f^{(r)})_p,\ n\in\mathbb{N}$.

Объединяя полученные оценки, окончательно имеем

$$n^rE_{n-1}(f)_p+\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_p\bigg)^{1/\beta}\leq\big\{C_{21}(r)+C_4(r,p)(1+C_{14}(p))\big\}E_{n-1}(f^{(r)})_p,\ n\in\mathbb{N}.$$

В силу оценки второго слагаемого в п. 2), неравенства (0.2) и неравенства (0.6) получаем

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}+n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(k+r)-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}\le C_4(r,p)(1+C_{14}(p))E_{n-1}(f^{(r)})_p$$

$$+C_2(k+r,p)n^r\omega_{k+r}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\le\Big\{C_4(r,p)(1+C_{14}(p))C_5(k)+\pi^rC_2(k+r,p)\Big\}\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p.$$

Лемма 3 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 12. Неравенства, приведенные в пп. 1)–3) леммы 3, являются равносильными. При доказательстве указанных неравенств было установлено, что 2) выводится из 1), а для получения 3) привлекается 2). Ниже показано, что выполнение неравенства 2) либо неравенства 3) гарантирует справедливость неравенства 1).

Если имеет место неравенство 2), то, привлекая также неравенство (0.2), получаем

$$\mathrm{E}(f;p;r;\beta)=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}\le\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}+\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_2(r,p)n^r\omega_r(f;\pi/n)_p+C_{19}(r,p)E_{n-1}(f^{(r)})_p\le C_2(r,p)\pi^r\|f^{(r)}\|_p+C_{19}(r,p)\|f^{(r)}\|_p$$

$$=\{\pi^rC_2(r,p)+C_{19}(r,p)\}\|f^{(r)}\|_p.$$

Оценка сверху $\mathrm{E}(f;p;r;\beta)$ посредством величины $\|f^{(r)}\|_p$ может быть также получена без привлечения неравенства (0.2), а именно: в силу неравенства 2) для случая $n=1$ имеем

$$\mathrm{E}(f;p;r;\beta)\le E_0(f)_p+\left(\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}\le C_{19}(r,p)E_0(f^{(r)})_p\le C_{19}(r,p)\|f^{(r)}\|_p.$$

Если имеет место неравенство 3), то, полагая в этом неравенстве $n=1$, получаем

$$2^kC_{20}(k,r,p)\|f^{(r)}\|_p\ge C_{20}(k,r,p)\omega_k(f^{(r)};\pi)_p\ge\left(\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}+E_0(f)_p$$

$$\ge\left(E_0^{\beta}(f)_p+\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}=\mathrm{E}(f;p;r;\beta).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1\le p\le\infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46(88), № 1. С. 125–132.
2. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах L_p // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18, № 1. С. 134–137. doi: 10.1007/BF02537726 .
3. **Бесов О.В.** О некоторых условиях принадлежности к L_p производных периодических функций // Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки. 1959. № 1. С. 13–17.
4. **Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.** Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. LXXI, № 1. С. 17–20.
5. **Zygmund A.** A remark on the integral modulus of continuity // Univ. Nac. Tucuman Revista. 1950. Ser. A. Vol. 7. P. 259–269.
6. **Zygmund A.** Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 47–76. doi: 10.1215/S0012-7094-45-01206-3 .
7. **Стечкин С.Б.** О теореме Колмогорова — Селиверстова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. Т. 17, № 6. С. 499–512.
8. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.

9. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
10. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** Some properties of fractional integrals. I. // Math. Zeit. 1928. Bd. 27, no. 4. S. 565–606. doi: 10.1007/BF01171116 .
11. **Marcinkiewicz J.** Sur quelques integrals du type de Dini // Ann. Soc. Polon. Math. 1938. Vol. 17. P. 42–50.
12. **Zygmund A.** On certain integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 55, no. 2. P. 170–204.
13. **Riesz M.** Sur les fonctions conjuguees // Math. Zeit. 1927. Bd. 27, no. 2. S. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
14. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2-х т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
15. **Quade E.S.** Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. 1937. Vol. 3, no. 3. P. 529–543. doi: 10.1215/S0012-7094-37-00342-9 .
16. **Брудный Ю.А.** Критерии существования производных в L_p // Мат. сб. 1967. Т. 73 (115), № 1. С. 42–64.
17. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 368 с.
18. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
19. **Тиман М.Ф.** Наилучшее приближение и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси // Изв. вузов. Математика. 1961. № 6 (25). С. 108–120.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры математического анализа
Бакинский государственный университет,
г. Баку
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 13.03.2018

REFERENCES

1. Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in L_p spaces ($1 \le p \le \infty$). *Mat. Sb.* (*N.S.*), 1958, vol. 46 (88), no. 1, pp. 125–132 (in Russian).
2. Timan M.F. On the Jackson theorem in L_p spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 1966, vol. 18, no. 1, pp. 134–137 (in Russian). doi: 10.1007/BF02537726 .
3. Besov O.V. On some conditions for derivatives of periodic functions to belong to L_p. *Nauch. Dokl. Vyssh. Shkoly. Fiz.-Mat.Nauki*, 1959, no. 1, pp. 13–17 (in Russian).
4. Timan A.F., Timan M.F. Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950, vol. 71, no. 1, pp. 17–20 (in Russian).
5. Zygmund A. A remark on the integral modulus of continuity. *Univ. Nac. Tucuman Revista*, 1950, ser. A, vol. 7, pp. 259–269.
6. Zygmund A. Smooth functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, no. 1, pp. 47–76. doi: 10.1215/S0012-7094-45-01206-3 .
7. Stechkin S.B. On the Kolmogorov — Seliverstov theorem. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1953, vol. 17, no. 6, pp. 499–512 (in Russian).
8. Stechkin S.B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1951, vol. 15, no. 3, pp. 219–242 (in Russian).
9. Timan A.F. Theory of approximation of functions of a real variable. Oxford; London; N Y: Pergamon Press, 1963, 655 p. ISBN: 048667830X . Original Russian text published in Timan A.F. *Teoriya priblizheniya funktsii deystvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
10. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals. I. *Math. Zeit.*, 1928, vol. 27, no. 4, pp. 565–606. doi: 10.1007/BF01171116 .
11. Marcinkiewicz J. Sur quelques integrals du type de Dini. *Ann. Soc. Polon. Math.*, 1938, vol. 17, pp. 42–50.
12. Zygmund A. On certain integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 55, no. 2, pp. 170–204.
13. Riesz M. Sur les fonctions conjuguees. *Math. Zeit.*, 1927, vol. 27, no. 2, pp. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
14. Zygmund A. Trigonometric series, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. I. 383 p.; vol. II. 354 p. ISBN(3rd ed.): 0-521-89053-5 . Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p; vol. II. 538 p.

15. Quade E.S. Trigonometric approximation in the mean. *Duke Math. J.*, 1937, vol. 3, no. 3, pp. 529–543. doi: 10.1215/S0012-7094-37-00342-9 .
16. Brudnyi Yu.A. Criteria for the existence of derivatives in L_p. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 2, no. 1, pp. 35–55. doi: 10.1070/SM1967v002n01ABEH002323 .
17. Zhuk V.V. *Approksimatsiya periodicheskikh funktsii* [Approximation of periodic functions]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1982, 368 p. (in Russian).
18. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press, 1934, 314 p. ISBN(2nd ed.): 978-0-521-35880-4 .
19. Timan M.F. Best approximation and modulus of smoothness of functions defined on the entire real axis. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 1961, no. 6 (25), pp. 108–120 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on March 13, 2018.

N. A. Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan,
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .