ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.958

О ЛАКУНАХ В СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА В ПОЛОСЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ[1]

Д. И. Борисов

В работе рассматривается оператор Лапласа в плоской бесконечной полосе с периодическим дельта-взаимодействием. Ширина полосы фиксирована и для простоты выбрана равной π. Дельта взаимодействие вводится на периодической системе кривых. Каждая кривая состоит из конечного числа кусков гладкости C^1 каждый. Кривые предполагаются строго внутренними и с границами полосы не пересекаются. Период расположения кривых равен $2\varepsilon\pi$, где ε — некоторое достаточно малое число. Функция, описывающая дельта-взаимодействие, также задается периодической на описанной системе кривых и предполагается ограниченной и измеримой. Основной результат состоит в следующем. Показано, что если $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторое явно вычисленное число, а норма функции, описывающее дельта-взаимодействие, меньше некоторой явной константы, то в нижней части спектра рассматриваемого оператора отсутствуют внутренние лакуны. Под нижней частью понимается зона спектра до некоторой точки, которая явно вычислена в терминах параметра ε в виде весьма простой функции. Данный результат можно рассматривать как первый шаг к доказательству усиленной гипотезы Бете — Зоммерфельда о полном отсутствии лакун в спектре описанного оператора при достаточно малом периоде расположения дельта-взаимодействий.

Ключевые слова: периодический оператор, Лапласиан, дельта-взаимодействие, зонный спектр, отсутствие лакун.

D. I. Borisov. Gaps in the spectrum of the Laplacian in a band with periodic delta interaction.

We consider the Laplace operator in an infinite planar strip with a periodic delta interaction. The width of the strip is fixed and for simplicity is chosen equal to π. The delta interaction is introduced on a periodic system of curves. Each curve consists of a finite number of segments, each having smoothness C^1. The curves are supposed to be strictly internal and do not intersect the boundaries of the strip. The period of their location is $2\varepsilon\pi$, where ε is a sufficiently small number. The function describing the delta interaction is also periodic on the system of curves and is assumed to be bounded and measurable. The main result is the following fact. If $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, where ε_0 is a certain explicitly calculated number and the norm of the function describing the delta interaction is smaller than some explicit constant, then a lower part of the spectrum of the operator has no internal gaps. The lower part is understood as the band of the spectrum until some point, which is explicitly calculated in terms of the parameter ε as a rather simple function. This result can be considered as a first step to the proof of the strengthened Bethe–Sommerfeld conjecture on the complete absence of gaps in the spectrum of the operator for a sufficiently small period of location of delta interactions.

Keywords: periodic operator, Laplacian, delta interaction, band spectrum, absence of gaps.

MSC: 35P05, 47A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-46-53

Введение

Гипотеза Бете — Зоммерфельда звучит следующим образом: спектр (многих) многомерных периодических операторов содержит конечное число внутренних лакун. Эта гипотеза была установлена для оператора Шрёдингера в разных размерностях при различных условиях на потенциалы (см., например, работы [2; 7; 10]). Магнитный оператор Шредингера был успешно исследован в работах [8; 9]. Данная гипотеза также была перенесена на полигармонические операторы с различными возмущениями, включая возмущения псевдодифференциальными операторами меньшего порядка (см. [11]). Дальнейшие работы по этой тематике можно найти в списках литературы цитированных статей.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00046.

Конечность числа лакун в спектре означает, что выше некоторой отсечки спектр представляет собой полуось и лакун не содержит. Независимый интерес представляют задачи об отсутствии лакун ниже некоторой отсечки, т. е. в нижней части спектра заданного периодического оператора. Подобного сорта результаты приводятся, например, в [2] (см. теоремы 15.2 и 16.2), а также в статье [7]. Суть результата такова: при достаточно малой норме возмущения многомерного оператора Лапласа в его спектре вовсе нет внутренних лакун. И так как здесь рассматривались операторы во всем пространстве, то с учетом простого растяжения переменных малые возмущения оказываются эквивалентны конечным возмущениям, но с малым периодом — в последнем случае также отсутствуют внутренние лакуны.

Гипотезу Бете — Зоммерфельда можно сформулировать и для периодических операторов в цилиндрических областях. Интерес к такой гипотезе, причем для случая малого периода, мотивирован недавними исследованиями с точки зрения спектральной теории задач о граничном усреднении; здесь мы в первую очередь упомянем задачи для оператора Лапласа в полосе с частой сменой краевых условий, которые были исследованы для усредненного краевого условия Дирихле [4], усредненного условия Неймана [5] и усредненного третьего краевого условия [6]. В этих работах было высказано предположение о полном отсутствии лакун в случаях, когда период расположения возмущений достаточно мал. Однако согласно наилучшему результату, полученному для задач с частой сменой краевых условий, нижняя часть спектра длиной $O(\varepsilon^{-2})$ не содержит внутренних лакун, где ε — период. Отметим еще диссертацию [3], где была доказана классическая гипотеза Бете — Зоммерфельда о конечном числе лакун для оператора Шредингера в полосе в случае, когда период потенциала достаточно мал.

В настоящей работе мы рассматриваем оператор Лапласа в бесконечной полосе с периодическим дельта-взаимодействием. На границе полосы ставится краевое условие Дирихле. Мы доказываем, что для достаточно малого периода в нижней части спектра отсутствуют внутренние лакуны. При этом явно, в терминах конкретных чисел и весьма простых функций, получены две величины: верхняя оценка на период, гарантирующая описанный результат, и длина нижней части спектра, в которой отсутствуют лакуны. В частности показано, что длина нижней части спектра без лакун есть по меньшей мере $O(\varepsilon^{-6})$, где ε — период. Схожий результат был получен в работе [1] для магнитного Лапласиана в полосе с периодическим магнитным потенциалом. В этой работе также было показано, что в случае достаточно малого периода длина нижней части спектра без лакун имеет длину не меньше $O(\varepsilon^{-6})$.

Подход, который мы используем, отличается от методик цитированных выше работ по классической гипотезе Бете — Зоммерфельда и следует идеям работы [1]. Отдельно еще подчеркнем, что методы работы [3] не позволяют доказать классическую гипотезу Бете — Зоммерфельда для нашего оператора. Мы вместе с тем предполагаем, что данная гипотеза верна для нашей модели, но для ее доказательства придется привлекать качественно новые идеи и подходы.

1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, $\Pi := \{x\colon 0 < x_2 < \pi\}$ — бесконечная прямая полоса ширины π, ε — положительное число. В полосе Π определим ячейку периодичности: $\square_\varepsilon := \{x\colon |x_1| < \varepsilon\pi,\ 0 < x_2 < \pi\}$. В данной ячейке выберем кривую γ, составленную из конечного числа кусков гладкости C^1. Кривую γ сдвинем $2\varepsilon\pi$-периодически вдоль полосы Π и образовавшуюся периодическую систему кривых обозначим через Γ:

$$\Gamma := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x\colon (x_1 - 2\varepsilon\pi k, x_2) \in \gamma\}.$$

Пусть s — натуральный параметр на γ. Через $\beta = \beta(s)$ обозначим произвольную измеримую функцию, заданную на γ и являющуюся элементом пространства $L_\infty(\gamma)$. Функцию β периодически продолжим на Γ; полученную функцию вновь обозначим через β.

В настоящей работе мы рассматриваем Лапласиан с дельта-взаимодействием на Γ

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\Delta + \beta\delta_\Gamma \quad \text{в} \quad \Pi,$$

и с краевым условием Дирихле на $\partial\Pi$. Строго данный оператор определяем как самосопряженный полуограниченный снизу оператор в $L_2(\Pi)$, соответствующий квадратичной форме $\mathfrak{h}_\varepsilon[u] := \|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi)} + (\beta u, u)_{L_2(\Gamma)}$ в $L_2(\Pi)$ на области определения $\mathring{W}^1_2(\Pi)$, где $\mathring{W}^1_2(\Pi)$ — подпространство пространства Соболева $W^1_2(\Pi)$, состоящее из функций с нулевым следом на $\partial\Pi$.

Эквивалентно оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ можно определить как оператор $-\Delta$ на области определения, состоящей из функций пространства $\mathring{W}^1_2(\Pi) \cap W^2_2(\Pi \setminus \Gamma)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Pi, \quad [u]_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_\Gamma + \beta u\big|_\Gamma = 0,$$

где $[u]_\Gamma$ — скачок функции на Γ, ν — единичная нормаль к Γ.

Для кривой γ определим число q как максимум из q_1 и q_2, где q_1 — максимальное число пересечений вертикальных прямых $x_1 = a$, $a \in (-\varepsilon\pi, \varepsilon\pi)$ с прямой γ в тех точках, где касательный вектор не параллелен оси Ox_2, а q_2 — максимальное число пересечений горизонтальных прямых $x_2 = a$, $b \in (0, \pi)$ с прямой γ в тех точках, где касательный вектор не параллелен оси Ox_1.

Через $\lfloor\cdot\rfloor$ обозначим целую часть числа, через $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора, и

$$A := \frac{\sqrt{5}/\sqrt{2}}{q}\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}.$$

Так как оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ периодичен, он имеет зонный спектр, который определяется как объединение образов зонных функций. В соответсвии с нашим основным результатом утверждается отсутствие внутренних лакун в нижней части зонного спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ при достаточно малых ε.

Теорема. Пусть

$$A < 1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 := \frac{539772289\sqrt{509}}{63625 \cdot 10^7\sqrt{\pi + 1}}. \tag{1.1}$$

Обозначим

$$K_\varepsilon := \left\lfloor \frac{\mu^2(\varepsilon)\eta^2}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1, \quad \mu(\varepsilon) := \varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2}, \quad \eta := \frac{2\sqrt{1018}}{25\sqrt{\pi+1}}.$$

Тогда часть спектра $\big[\,0\,,\,(K_\varepsilon - \varepsilon A)^2\varepsilon^{-2}\,\big] \cap \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)$ *оператора* $\mathcal{H}_\varepsilon$ *не содержит внутренних лакун.*

Обсудим основной результат. Суть его заключается в отсутствии лакун в нижней части спектра при достаточно малом периоде. В качестве нижней части спектра выступает зона спектра до отсечки $(K_\varepsilon - \varepsilon a)^2\varepsilon^{-2}$. Как следует из формулы для K_ε, данная часть спектра имеет длину $O(\varepsilon^{-6})$, что существенно лучше аналогичного результата в работах [4–6] для задач с частой сменой краевых условий, так как в настоящей работе мы используем принципиально иной подход. Наш результат согласуется с результатом статьи [1]. Это позволяет утверждать, что с точки зрения отсутствия лакун в нижней части спектра Лапласиан с дельта-взаимодействием устроен примерно также как и магнитный Лапласиан. В заключение еще отметим, что условие на A в (1.1) существенно, и при его нарушении наш подход перестает быть применимым.

2. Доказательство теоремы

Вначале введем зонные функции оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ — упорядоченные по возрастанию с учетом кратностей собственные значения $E_k^\varepsilon(\tau,\beta)$, $k\geqslant 1$, оператора

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\tau,\beta):=\Big(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)^2-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\beta\delta_\gamma$$

в $\square_\varepsilon$ с краевым условием Дирихле на $\partial\square_\varepsilon\cap\partial\Pi$ и периодическими краевыми условиями на боковых сторонах $\square_\varepsilon$. Строго оператор $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau)$ вводим как самосопряженный оператор в $L_2(\square_\varepsilon)$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,\beta)[u]:=\Big\|\Big(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)u\Big\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}+\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}+(\beta u,u)_{L_2(\gamma)},\quad \tau\in\Big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big]$$

в $L_2(\square)$ на области определения $\mathring{W}^1_{2,per}(\square)$. Здесь последнее пространство вводится как подпространство в $W_2^1(\square_\varepsilon)\cap W_2^2(\square_\varepsilon\setminus\gamma)$, состоящее из функций, удовлетворяющих периодическому краевому условию на боковых сторонах $\square_\varepsilon$ и имеющих нулевой след на $\partial\Pi\cap\partial\square_\varepsilon$.

Символом $N_\varepsilon(L,\tau,\beta)$ обозначим считающую функцию оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau,\beta)$, а именно, число собственных значений $E_k^\varepsilon(\tau,\beta)$, не превосходящих $\dfrac{L}{\varepsilon^2}$: $N_\varepsilon(L,\tau,\beta):=\max\big\{k\colon E_k^\varepsilon(\tau,\beta)\leqslant L/\varepsilon^2\big\}$. Отметим, что при $\beta=0$ считающая функция $N_\varepsilon(L,\tau,0)$ соответствует оператору Лапласа.

Введенная считающая функция является удобным инструментом для проверки отсутствия лакун. А именно, величина $\sup_\tau N_\varepsilon(L,\tau,\beta)$ есть число зонных функций $E_k^\varepsilon(\tau,\beta)$, чьи минимумы не превосходят L/ε^2. А число $\inf_\tau N_\varepsilon(L,\tau,\beta)$ дает число зонных функций, чьи максимумы не превосходят L/ε^2. Следовательно, две соседние зоны спектра $\big[\min_\tau E_k^\varepsilon(\tau,\beta),\max_\tau E_k^\varepsilon(\tau,\beta)\big]$ и $\big[\min_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau,\beta),\max_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau,\beta)\big]$ перекрываются тогда и только тогда, когда

$$\sup_\tau N_\varepsilon(L,\tau,\beta)-\inf_\tau N_\varepsilon(L,\tau,\beta)\geqslant 1\quad\text{при}\quad \min_\tau E_k^\varepsilon(\tau,\beta)\leqslant\frac{L}{\varepsilon^2}\leqslant\max_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau,\beta).\tag{2.2}$$

Поэтому часть спектра $[\lambda_-,\lambda_+]$ оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не имеет внутренних лакун, тогда и только тогда когда неравенство (2.3) выполнено для $L\in[\varepsilon^2\lambda_-,\varepsilon^2,\lambda_+]$. При этом с учетом целочисленности функции N_ε вместо (2.2) достаточно проверять строгую оценку

$$\sup_\tau N_\varepsilon(L,\tau,\beta)-\inf_\tau N_\varepsilon(L,\tau,\beta)>0.\tag{2.3}$$

Далее нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Для любого $u\in\mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon)$ верна оценка*

$$\big|(\beta u,u)_{L_2(\gamma)}\big|\leqslant\sqrt{10}q\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\|\nabla u\|_{W_2^1(\square_\varepsilon)},$$

где константа q определена в разд. 1.

Доказательство. Начнем с очевидного равенства

$$|u(x)|^2=\int\limits_0^{x_2}\frac{\partial|u|^2}{\partial x_2}(x_1,t)\,dt=2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{x_2}\overline{u(x_1,t)}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,t)\,dt,\quad x\in\square_\varepsilon,\tag{2.4}$$

откуда немедленно следует оценка

$$|u(x)|^2\leqslant 2\Big(\int\limits_0^\pi|u(x_1,t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^\pi\Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,t)\Big|^2dt\Big)^{1/2},\quad x\in\square_\varepsilon.\tag{2.5}$$

Проинтегрируем равенство (2.4) вдоль диагонали ячейки $\square_\varepsilon$ и воспользуемся затем неравенством Коши — Буняковского:

$$\int\limits_{-\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi} \left|u\Big(x_1, \frac{x_1+\varepsilon\pi}{2\varepsilon}\Big)\right|^2 dx_1 = 2\int\limits_{-\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi} dx_1 \,\mathrm{Re} \int\limits_0^{\frac{x_1+\varepsilon\pi}{2\varepsilon}} \overline{u(x_1,t)}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,t)\,dt$$

$$\leqslant 2\int\limits_{-\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi} dx_1 \int\limits_0^{\pi} |u(x_1,t)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,t)\right| dt \leqslant 2\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L_2(\square_\varepsilon)}. \tag{2.6}$$

Отметим еще одно очевидное равенство

$$|u(x)|^2 = |u(2\varepsilon x_2 - \varepsilon\pi, x_2)|^2 + \int\limits_{2\varepsilon\, x_2-\varepsilon\pi}^{x_1} \frac{\partial |u|^2}{\partial x_1}(t,x_2)\,dt. \tag{2.7}$$

Заметим, что здесь аргумент первого слагаемого в правой части меняется по упомянутой выше диагонали ячейки $\square_\varepsilon$.

Пусть $x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big)$ — уравнение кривой γ в натуральной параметризации. Разделим кривую γ на две части следующим образом: $\gamma_1 = \{x(s)\colon |x_1'(s)| \geqslant 1/\sqrt{2}\}$, $\gamma_2 = \{x(s)\colon |x_2'(s)| > 1/\sqrt{2}\}$. С учетом натуральной параметризации верно $|x_1'(s)|^2 + |x_2'(s)|^2 = 1$, и потому $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$, $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$.

Оценку (2.5) проинтегрируем по γ_1:

$$\left|\int\limits_{\gamma_1} \beta(s)|u(x(s))|^2\,ds\right| \leqslant \int\limits_{\gamma_1} \sqrt{2}|\beta(s)||u(x(s))|^2|x_1'(s)|\,ds \leqslant \sqrt{2}q\|\beta\|_{L_\infty(\gamma_1)}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L_2(\square_\varepsilon)}. \tag{2.8}$$

Аналогично, используя (2.6), (2.7), получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma_1} \beta(s)|u(x(s))|^2\,ds\right| \leqslant \int\limits_{\gamma_2} \sqrt{2}|\beta(s)||u(x(s))|^2|x_2'(s)|\,ds$$

$$\leqslant \sqrt{2}q\|\beta\|_{L_\infty(\gamma_2)}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\bigg(\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\square_\varepsilon)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\bigg).$$

Отсюда и из (2.8) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для всех $L > 0$, ε, τ справедливо двойное неравенство*

$$N_\varepsilon\Big(\big(\sqrt{L} - \varepsilon A\big)^2, \tau, 0\Big) \leqslant N_\varepsilon(L - \varepsilon^2 A^2, \tau, \beta) \leqslant N_\varepsilon\Big(\big(\sqrt{L} + \varepsilon A\big)^2, \tau, 0\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 вытекают оценки для квадратичных форм

$$\mathfrak{h}(\tau,\beta)[u] \leqslant \mathfrak{h}(\tau,0)[u] + \left|\big(\beta e^{\frac{\mathrm{i}\tau x_1}{\varepsilon}}u, e^{\frac{\mathrm{i}\tau x_1}{\varepsilon}}u\big)_{L_2(\gamma)}\right|$$

$$\leqslant \mathfrak{h}(\tau,0)[u] + \sqrt{10}M\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}\|e^{\frac{\mathrm{i}\tau x_1}{\varepsilon}}u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\|\nabla e^{\frac{\mathrm{i}\tau x_1}{\varepsilon}}u\|_{W_2^1(\square_\varepsilon)}$$

$$= \Big(\sqrt{\mathfrak{h}(\tau,0)[u]} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}M\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\Big)^2 - \frac{5}{2}M^2\|\beta\|^2_{L_\infty(\gamma)}\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)},$$

и аналогично получаем

$$\mathfrak{h}(\tau,\beta)[u] \geqslant \mathfrak{h}(\tau,0)[u] - \left|\big(\beta e^{\frac{\mathrm{i}\tau x_1}{\varepsilon}}u, e^{\frac{\mathrm{i}\tau x_1}{\varepsilon}}u\big)_{L_2(\gamma)}\right|$$

$$\geqslant \left(\sqrt{\mathfrak{h}(\tau,0)[u]} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} M\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\right)^2 - \frac{5}{2}\|\beta\|^2_{L_\infty(\gamma)}\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}. \tag{2.9}$$

Отсюда в силу принципа минимакса, очевидной оценки $\mathfrak{h}(\tau,0)[u] \geqslant \|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}$ и условия (1.1) приходим к следующим оценкам для собственных значений:

$$\left(\sqrt{E_k^\varepsilon(\tau,0)} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} M\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}\right)^2 \leqslant E_k^\varepsilon(\tau,\beta) + \frac{5}{2} M^2\|\beta\|^2_{L_\infty(\gamma)}\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}$$

$$\leqslant \left(\sqrt{E_k^\varepsilon(\tau,0)} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} M\|\beta\|_{L_\infty(\gamma)}\right)^2.$$

Отсюда уже вытекает требуемая оценка для считающих функций. Лемма доказана.

Отметим еще, что из оценки (2.9) в приведенном выше доказательстве и принципа минимакса следует, что $\inf\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon(\tau,\beta)) \geqslant -A^2$. Поэтому далее считающую функцию $N_\varepsilon(L,\tau,\beta)$ достаточно рассматривать для значений $L \geqslant -\varepsilon^2 A^2$. С учетом вида оценки в утверждении леммы 2 нам удобно будет работать с функцией $N_\varepsilon(L-\varepsilon^2A^2,\tau,\beta)$, предполагая, что $L \geqslant 0$.

Из леммы 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} &\sup_\tau N_\varepsilon(L-\varepsilon^2A^2,\tau,\beta) \geqslant \sup_\tau N_\varepsilon\Big(\big(\sqrt{L}-\varepsilon A\big)^2,\tau,0\Big), \\ &\inf_\tau N_\varepsilon(L-\varepsilon^2A^2,\tau,\beta) \leqslant \inf_\tau N_\varepsilon\Big(\big(\sqrt{L}+\varepsilon A\big)^2,\tau,0\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Следовательно, достаточным условием выполнения неравенства (2.3) является оценка

$$\sup_\tau \Big(\big(\sqrt{L}-\varepsilon A\big)^2,\tau,0\Big) - \inf_\tau \Big(\big(\sqrt{L}+\varepsilon A\big)^2,\tau,0\Big) > 0.$$

Данная оценка будет гарантированно выполнена, если удастся подобрать точки $\tau_{\min}$, $\tau_{\max} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ такие, что

$$N_\varepsilon\Big(\big(\sqrt{L}-\varepsilon A\big)^2,\tau_{\max},0\Big) - N_\varepsilon\Big(\big(\sqrt{L}+\varepsilon A\big)^2,\tau_{\min},0\Big) > 0. \tag{2.11}$$

Для упрощения обозначений положим $M_\varepsilon(L,\tau) := N_\varepsilon(L^2,\tau,0)$, $L=\ell^2$, и перепишем неравенство (2.11) в виде

$$M_\varepsilon(\ell-\varepsilon A,\tau_{\max}) - M_\varepsilon(\ell+\varepsilon A,\tau_{\min}) > 0. \tag{2.12}$$

Далее мы будем проверять именно это неравенство.

Отметим еще, что если для некоторого ℓ и некоторого $\tau_{\min} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ выполнено

$$M_\varepsilon(\ell+\varepsilon A,\tau_{\min}) = 0, \tag{2.13}$$

то в силу (2.10) имеем $\inf_\tau N_\varepsilon(\ell^2-\varepsilon^2A^2,\tau,\beta)=0$, что означает отсутствие максимумов зонных функций $E_k^\varepsilon(\tau,\beta)$ ниже (левее) точки $\ell^2/\varepsilon^2 - A^2$ и как следствие отсутствие внутренних лакун в спектре оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ ниже этой же точки.

В случае отсутствия дельта-взаимодействия, т. е. при $\beta=0$, собственные значения и собственные функции оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau,0)$ находятся разделением переменных

$$E_k^\varepsilon(\tau,0) = \frac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2, \quad \Psi_k^\varepsilon(x) = e^{\frac{inx_1}{\varepsilon}}\sin mx_2, \quad n\in\mathbb{Z}, \quad m\in\mathbb{N},$$

где индекс k выбирается согласно упорядочиванию собственных значений $\dfrac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2}+m^2$. Поэтому $M_\varepsilon(\ell,\tau)$ определяется формулой

$$M_\varepsilon(\ell,\tau) = \#\big\{(n,m)\colon (n+\tau)^2+\varepsilon^2m^2 \leqslant \ell^2,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\big\}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}:\,|n+\tau|\leqslant \ell^2} \Big\lfloor \frac{\sqrt{\ell-(n+\tau)^2}}{\varepsilon} \Big\rfloor = \sum_{n=-[\ell+\tau]}^{[\ell-\tau]} \Big\lfloor \frac{\sqrt{\ell-(n+\tau)^2}}{\varepsilon} \Big\rfloor. \tag{2.14}$$

Центральным моментом оставшейся части доказательства является проверка условия (2.12) с априорно выбранными $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$.

Вначале рассмотрим значения ℓ из интервала $\big[0, \frac{1}{2} - \varepsilon A\big)$. Для таких ℓ положим $\tau_{\min} := \frac{1}{2}$. Тогда из формулы (2.14) сразу вытекает соотношение (2.13), что означает отсутствие внутренних лакун ниже (левее) точки $\frac{1}{\varepsilon^2}\big(\frac{1}{2} - \varepsilon A\big)^2$. Далее считаем, что $\ell \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon A$.

Введем обозначения: $K := \lfloor \ell + \varepsilon A\rfloor$, $\alpha := \ell + \varepsilon A - K$ — дробная часть числа $\ell + \varepsilon A$, так что

$$\ell + \varepsilon A = K + \alpha.$$

Величины $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ определим следующим образом:

$$\tau_{\min} := \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ 1-\alpha & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant \alpha, \end{cases} \qquad \tau_{\max} := \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad \alpha \leqslant \dfrac{13}{100} \quad \text{или} \quad \dfrac{39267}{62500} \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{13}{100} < \alpha < \dfrac{39267}{62500}. \end{cases}$$

Далее воспользуемся результатами разд. 4 работы [1]. А именно, из вычислений этого раздела следует, что при указанном выборе чисел $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$ для

$$\ell < \Big\lfloor \frac{\mu^2(\varepsilon)\eta^2}{\varepsilon^2} \Big\rfloor + 1 - \varepsilon A \tag{2.15}$$

и $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнено неравенство (2.12). И так как спектр — замкнутое множество, то неравенство в (2.15) можно заменить на нестрогое, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борисов Д.И.** О лакунах в нижней части спектра периодического магнитного оператора в полосе // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, no. 3. С. 373–391. doi: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-373-391 .
2. **Скриганов М.М.** Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3–122.
3. **Beeken C.B.E.** Periodic Schrödinger operators in dimension two: constant magnetic fields and boundary value problems. PhD thesis / University of Sussex. Brighton, 2002. 118 p.
4. **Borisov D., Cardone G.** Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions // J. Phys. A. Math. Gen. 2009. Vol. 42, no. 36. id 365205. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/365205 .
5. **Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.** On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition // Ann. H. Poincaré. 2010. Vol. 11, no. 8. P. 1591–1627. doi: 10.1007/s00023-010-0065-0 .
6. **Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.** Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics // Zeit. Angew. Math. Phys. 2013. Vol. 64, no. 3. P. 439–472. doi: 10.1007/s00033-012-0264-2 .
7. **Dahlberg B.E.J., Trubowitz E.** A remark on two dimensional periodic potentials // Comment. Math. Helvetici. 1982. Vol. 57, no. 1. P. 130–134. doi: 10.1007/BF02565850 .
8. **Karpeshina Y.** Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case // Comm. Math. Phys. 2004. Vol. 251, no. 3. P. 473–514. doi: 10.1007/s00220-004-1129-0 .
9. **Mohamed A.** Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential // J. Math. Phys. 1997. Vol. 38, no. 8. P. 4023–4051. doi: 10.1063/1.532105 .

10. **Parnovski L.** Bethe-Sommerfeld conjecture // Ann. H. Poincaré. 2008. Vol. 9, no. 3. P. 457–508. doi: 10.1007/s00023-008-0364-x .
11. **Parnovski L., Sobolev A.V.** Bethe-Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations // Invent. Math. 2010. Vol. 181, no. 3. P. 467–540. doi: 10.1007/s00222-010-0251-1 .

Борисов Денис Иванович
Поступила 26.03.2018
д-р физ.-мат. наук, профессор РАН
ведущий науч. сотрудник
и.о. зав. отделом
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН;
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г. Уфа;
Университет Градца Кралове, Чехия
e-mail: borisovdi@yandex.ru

REFERENCES

1. Borisov D.I. On Lacunas in the lower part of the spectrum of the periodic magnetic operator in a strip. *Sovremennaya Matematika. Fundamental'nye Napravleniya,* 2017, vol. 63, no. 3, pp. 373–391 (in Russian).
2. Skriganov. M.M. Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators. *Proc. Steklov Institute Math.*, 1987, vol. 171, pp. 1–121.
3. Beeken C.B.E. *Periodic Schrödinger operators in dimension two: constant magnetic fields and boundary value problems.* PhD thesis, University of Sussex, Brighton, 2002, 118 p.
4. Borisov D. and Cardone G. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions. *J. Phys. A. Math. Gen.*, 2009, vol. 42, no. 36, id 365205. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/365205 .
5. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition. *Ann. H. Poincaré*, 2010, vol. 11, no. 8, pp. 1591–1627. doi: 10.1007/s00023-010-0065-0 .
6. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics. *Zeit. Angew. Math. Phys.*, 2013, vol. 64, no. 3, pp. 439–472. doi: 10.1007/s00033-012-0264-2 .
7. Dahlberg B.E.J., Trubowitz E. A remark on two dimensional periodic potentials. *Comment. Math. Helvetici*, 1982, vol. 57, no. 1, pp. 130–134. doi: 10.1007/BF02565850 .
8. Karpeshina Y. Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case. *Comm. Math. Phys.*, 2004, vol. 251, no. 3, pp. 473–514. doi: 10.1007/s00220-004-1129-0 .
9. Mohamed A. Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential. *J. Math. Phys.*, 1997, vol. 38, no. 8, pp. 4023–4051. doi: 10.1063/1.532105 .
10. Parnovski L. Bethe-Sommerfeld conjecture. *Ann. H. Poincaré*, 2008, vol. 9, no. 3, pp. 457–508. doi: 10.1007/s00023-008-0364-x .
11. Parnovski L., Sobolev A.V. Bethe-Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations. *Invent. Math.*, 2010, vol. 181, no. 3, pp. 467–540. doi: 10.1007/s00222-010-0251-1 .

The paper was received by the Editorial Office on March 26, 2018.

Denis Ivanovich Borisov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof. RAS, Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008, Russia; Bashkir State Pedagogical University named after M. Akhmulla, Ufa, 450000, Russia; University of Hradec Králové, 500 03, Czech Republic, e-mail: borisovdi@yandex.ru .