ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.977

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ БРОУНОВСКОГО ЛИСТА[1]

У. А. Алексеева

Работа посвящена исследованию свойств броуновского листа — случайного поля, обобщающего процесс броуновского движения. Показано, что в качестве определения этой случайной функции, как и для процесса броуновского движения, можно использовать различные наборы свойств. Приведены четыре определения процесса броуновского движения и на их основе сформулированы четыре определения броуновского листа. Одним из интересных и ключевых в обсуждаемом контексте свойств броуновского движения является тот факт, что процесс с непрерывными траекториями и независимыми приращениями, стартующий из нуля, является гауссовским (теорема Дж. Дуба). В работе доказано обобщение этого утверждения на случай случайных полей, что позволило доказать эквивалентность сформулированных определений броуновского листа.

Ключевые слова: броуновский лист, броуновское движение, винеровский процесс, гауссовский процесс, случайное поле Винера — Ченцова.

U. A. Alekseeva. On the definition of a Brownian sheet.

We study the properties of a Brownian sheet, which is a random field generalizing the Brownian motion. It is demonstrated that different sets of properties can be used to define this random function, just as in the case of the Brownian motion. We formulate four definitions of the Brownian motion and, based on them, four definitions of a Brownian sheet. An interesting property of the Brownian motion, which is important for our discussion, is the fact that a process with continuous trajectories and independent increments starting from zero is Gaussian (J. Doob's theorem). In the present paper, we generalize this statement to the case of random fields, which allows us to prove the equivalence of the formulated definitions of a Brownian sheet.

Keywords: Brownian sheet, Brownian motion, Wiener process, Gaussian process, Wiener–Chentsov random field.

MSC: 60G60, 60G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-3-11

Введение

Работа посвящена исследованию свойств броуновского листа — случайной функции, обобщающей процесс броуновского движения (винеровский процесс) на случай нескольких независимых переменных. Известно, что такого рода случайные функции возникают при математическом моделировании внешних воздействий на систему, происходящих в случайный момент времени в случайной точке пространства, например, в задаче о малых поперечных колебаниях струны под воздействием случайных внешних сил или в задаче о теплообмене в стержне при наличии случайных нагревающих/охлаждающих источников [1; 2]. При описании таких моделей выявляются различные свойства получаемой случайной функции (броуновского листа в нашем случае), что вызывает вопрос о том, какой из наборов свойств однозначно характеризует исследуемый объект и, если такой набор не один, об эквивалентности различных определений.

Вопрос возник не впервые, он является продолжением изучения свойств броуновского движения. Становление процесса броуновского движения как математического объекта прошло несколько стадий и стало результатом работы многих ученых, что отразилось в разных подходах к его трактовке. При этом оказалось, что процесс броуновского движения “богат” различными свойствами, и некоторые сочетания этих свойств равносильны другим. В результате в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

литературе можно встретить различные (не всегда эквивалентные) определения броуновского движения [3–6]; выбор того или иного определяется рамками теории, в которой исследуется задача, и набором операций, которые планируется осуществить с этим процессом. Например, при построении интеграла по броуновскому движению на первый план выходит вопрос о независимости его приращений [3] (определение 3), а для исследования белого шума как производной броуновского движения используется подход, связанный с определением этого процесса как пространства его траекторий [4]. В случае обобщения винеровского процесса на бесконечномерный случай как цилиндрического винеровского процесса оказывается удобным использовать определение через закон распределения (определение 4), а при определении Q-винеровского процесса, в котором ковариационный оператор указывается в явном виде, — определение 2 [6; 7].

В настоящей работе обсуждаются различные подходы к определению броуновского листа. В первом разделе приведены четыре исторически сложившиеся и встречающиеся в литературе определения броуновского движения и сформулированы четыре соответствующие им определения броуновского листа. В разд. 2 доказана эквивалентность определений броуновского листа (теорема 2). Для доказательства одной из импликаций понадобилось обобщение на случай случайных полей того факта, что процесс с непрерывными траекториями и независимыми приращениями, стартующий из нуля, является гауссовским (теорема Дж. Дуба, см. например, [3; 5]). Это обобщение доказано в теореме 1. Ей предшествует утверждение, которое участвует в доказательстве обеих теорем; оно вынесено в лемму.

1. Определения броуновского движения и броуновского листа

Приведем четыре определения процесса броуновского движения, встречающиеся в разных источниках.

Определение 1 [5]. Действительный случайный процесс $W = \{W_t,\, t \geq 0\}$ называется *броуновским движением* (*винеровским процессом*), если

(W1.1) W — гауссовский процесс;

(W1.2) $\mathsf{E}\,[W_t] = 0,\ \ t \geq 0$;

(W1.3) $\mathsf{Cov}\,(W_t, W_s) = t \wedge s,\ \ t, s \geq 0$.

Определение 2 [5]. Действительный случайный процесс $W = \{W_t,\, t \geq 0\}$ называется *броуновским движением* (*винеровским процессом*), если

(W2.1) $W_0 = 0$ п.н.;

(W2.2) процесс W имеет независимые приращения;

(W2.3) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ при любых $0 \leq s \leq t$.

Определение 3 [3]. Действительный случайный процесс $W = \{W_t,\, t \geq 0\}$ называется *броуновским движением* (*винеровским процессом*), если

(W3.1) $W_0 = 0$ п.н.;

(W3.2) $\mathsf{E}\,[W_t] = 0,\ \ \mathsf{D}\,[W_t] = t,\ \ t \geq 0$;

(W3.3) W — гауссовский однородный процесс;

(W3.4) процесс W имеет независимые приращения.

Определение 4 [6]. Действительный случайный процесс $W = \{W_t,\, t \geq 0\}$ называется *броуновским движением* (*винеровским процессом*), если

(W4.1) $W_0 = 0$ п.н.;

(W4.2) процесс W имеет независимые приращения и непрерывные п.н. траектории;

(W4.3) $\mathrm{Law}(W_t - W_s) = \mathrm{Law}(W_{t-s}),\ \ 0 \le s \le t$;

(W4.4) $\mathrm{Law}(W_t) = \mathrm{Law}(-W_t),\ \ t \ge 0$.

Заметим, что в последнем определении, в отличие от первых трех, присутствует непрерывность траекторий, но отсутствует гауссовость в какой-либо форме. Это различие по существу, поскольку в первых трех случаях можно доказать существование непрерывной версии процесса (с помощью теоремы Колмогорова о существовании непрерывной версии). На этом основании обычно при работе с броуновским движением используют именно непрерывную версию и считают это свойство по умолчанию включенным в определение.

В четвертом определении требование непрерывности траекторий опустить нельзя, так как именно процесс с непрерывными траекториями и независимыми приращениями согласно теореме Дуба является гауссовским. В общем случае процесс с независимыми приращениями может оказаться пуассоновским.

Отметим еще одно очевидное отличие. Во всех определениях кроме первого процесс стартует из нуля: $W_0 = 0$ п.н.; для процесса, заданного определением 1, это является следствием его свойств.

Перейдем к определению броуновского листа. Пусть $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ — действительная случайная функция k переменных (случайное поле). В зависимости от удобства будем использовать одно из обозначений: $W(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ или W_t или $W(t)$, где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$.

Нам понадобится

О п р е д е л е н и е 5. Под приращением функции $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ в точке t, соответствующим приращению $\triangle t = (\triangle t_1, \ldots, \triangle t_k)$, будем понимать величину[2]

$$\triangle W_t = \triangle_{\triangle t_k}(\triangle_{\triangle t_{k-1}}(\ldots(\triangle_{\triangle t_1} W(t)))),$$

где $\triangle_{\triangle t_i} f(t)$ есть частичное приращение функции f по переменной t_i, соответствующее приращению $\triangle t_i$.

В частности, для функции двух переменных $W = \{W(t,s),\, t, s \ge 0\}$

$$\triangle W(t,s) = \triangle_{\triangle t, \triangle s} W(t,s) = W(t+\triangle t, s+\triangle s) - W(t+\triangle t, s) - W(t, s+\triangle s) + W(t,s). \quad (1.1)$$

О п р е д е л е н и е 6 [5]. Действительная случайная функция $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ с непрерывными п.н. траекториями называется *броуновским листом* (*случайным полем Винера — Ченцова*), если

(BS1.1) W — гауссовская функция (т. е. все ее конечномерные распределения гауссовские);

(BS1.2) $\mathsf{E}\,[W_t] = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^k$;

(BS1.3) $\mathsf{Cov}\,(W_t, W_\tau) = \prod_{i=1}^k t_i \wedge \tau_i, \quad t = (t_1, \ldots, t_k),\ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{R}_+^k$.

О п р е д е л е н и е 7. Действительная случайная функция $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ с непрерывными п.н. траекториями называется *броуновским листом*, если

(BS2.1) $W(0, t_2, \ldots, t_k) = W(t_1, 0, t_3, \ldots, t_k) = \ldots = 0$ п.н. (нулевые граничные условия);

[2]Наряду с обозначением $\triangle W_t$ в тех случаях, когда нужно подчеркнуть и точку, в которой составлено приращение, и величину приращений аргумента, будем использовать обозначение $\triangle_{\triangle t} W_t$ или $\triangle_{\triangle t} W(t)$.

(BS2.2) W имеет независимые приращения (на непересекающихся параллелепипедах);

(BS2.3) $\triangle W_t \sim \mathcal{N}(0, \prod_{i=1}^k \triangle t_i)$ при любых $t \in \mathbb{R}_+^k$, $\triangle t_i \geq 0$, $i = \overline{1, k}$.

Определение 8. Действительная случайная функция $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ с непрерывными п.н. траекториями называется *броуновским листом*, если

(BS3.1) $W(0, t_2, \ldots, t_k) = W(t_1, 0, t_3, \ldots, t_k) = \ldots = 0$ п.н.;

(BS3.2) $\mathsf{E}\,[W_t] = 0$, $\mathsf{D}\,[W_t] = \prod_{i=1}^k t_i$, $t \in \mathbb{R}_+^k$;

(BS3.3) W — гауссовская функция;

(BS3.4) W имеет независимые приращения;

(BS3.5) W — однородная случайная функция (т. е. $\mathrm{Law}(\triangle_{\triangle t} W_t)$ не зависит от t).

Из доказательства теоремы 2 будет видно, что в определении 8 условие (BS3.5) является избыточным: из свойств (BS3.1)–(BS3.4) получим, что W имеет стационарные приращения — условие (BS4.3); в частности, это означает однородность поля.

Определение 9. Действительная случайная функция $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ с непрерывными п.н. траекториями называется *броуновским листом*, если

(BS4.1) $W(0, t_2, \ldots, t_k) = W(t_1, 0, t_3, \ldots, t_k) = \ldots = 0$ п.н.;

(BS4.2) W имеет независимые приращения;

(BS4.3) $\mathrm{Law}(\triangle_{\triangle t} W(t)) = \mathrm{Law}(\triangle_{\triangle t} W(0))$, $t,\, \triangle t \in \mathbb{R}_+^k$;

(BS4.4) $\mathrm{Law}(W(t)) = \mathrm{Law}(-W(t))$, $t \in \mathbb{R}_+^k$.

2. Эквивалентность определений броуновского листа

В этом разделе мы распространяем теорему Дж. Дуба на случай случайных полей и доказываем эквивалентность определений 6–9 броуновского листа. Для наглядности все доказательства проведены при $k = 2$, т. е. для случайной функции $W = \{W(t, s),\, t, s \geq 0\}$. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ — действительная случайная функция с независимыми приращениями и нулевыми граничными условиями*

$$W(0, t_2, \ldots, t_k) = W(t_1, 0, t_3, \ldots, t_k) = \ldots = 0 \quad \text{п.н.} \tag{2.1}$$

Если W_t при каждом $t \in \mathbb{R}_+^k$ является нормально распределенной случайной величиной, то W — гауссовская случайная функция.

Доказательство. Покажем, что конечномерные распределения случайной функции $W(t, s)$ гауссовские. Возьмем $0 < t_1 < \ldots < t_n$, $0 < s_1 < \ldots < s_k$ и рассмотрим вектор

$$Y = (W_{11}, \ldots, W_{1k}, W_{21}, \ldots, W_{2k}, \ldots, W_{nk})^T, \quad \text{где} \quad W_{ij} = W(t_i, s_j).$$

Заметим, что приращение функции по прямоугольнику $(0, t_p] \times (0, s_q]$ складывается из приращений по непересекающимся элементарным прямоугольникам

$$\triangle W(t_i, s_j) = W(t_{i+1}, s_{j+1}) - W(t_{i+1}, s_j) - W(t_i, s_{j+1}) + W(t_i, s_j), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, q-1},$$

что с учетом нулевых граничных условий дает представление

$$W_{pq} = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{p-1} \triangle W(t_i, s_j).$$

Следовательно, $Y = AZ$, где A — матрица линейного оператора, а вектор Z составлен из независимых нормально распределенных приращений $\triangle W(t_i, s_j)$:

$$Z = \Big(\triangle W(0,0), \triangle W(0,s_1), \ldots, \triangle W(0,s_{k-1}), \triangle W(t_1,0), \ldots, \triangle W(t_{n-1},s_{k-1})\Big)^T,$$

а значит, он распределен по нормальному закону: $Z \sim \mathcal{N}(a,Q)$, и имеет характеристическую функцию

$$\varphi_Z(\lambda) = \mathsf{E}\,[e^{i\langle\lambda,Z\rangle}] = e^{i\langle a,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle Q\lambda,\lambda\rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nk}.$$

Тогда характеристическая функция вектора Y равна

$$\varphi_Y(\lambda) = \mathsf{E}\,[e^{i\langle\lambda,Y\rangle}] = \mathsf{E}\,[e^{i\langle\lambda,AZ\rangle}] = \mathsf{E}\,[e^{i\langle A^*\lambda,Z\rangle}] = e^{i\langle a,A^*\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle QA^*\lambda,A^*\lambda\rangle} = e^{i\langle Aa,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle AQA^*\lambda,\lambda\rangle},$$

т. е. $Y \sim \mathcal{N}(Aa, AQA^*)$ и все конечномерные распределения функции $W(t,s)$ гауссовские. □

Докажем обобщение теоремы Дж. Дуба [5, гл. V, теорема 14] на случай нескольких переменных.

Теорема 1. *Пусть $W = \{W_t,\, t \in \mathbb{R}_+^k\}$ — действительное случайное поле с независимыми приращениями, непрерывными п.н. траекториями и нулевыми граничными условиями* (2.1). *Тогда W — гауссовская случайная функция, а функции $a(t) = \mathsf{E}\,[W_t], G(t) = \mathsf{D}\,[W_t]\colon \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что приращение $\triangle_{\triangle t,\triangle s} W(t,s)$ по прямоугольнику $(t, t+\triangle t] \times (s, s+\triangle s]$, $t, s \geq 0$, распределено по нормальному закону. Для этого разобьем отрезок $[t, t+\triangle t]$ на n частей точками $t_{n,i} = t + \dfrac{i}{n}\triangle t$ $(i = \overline{0,n})$, а отрезок $[s, s+\triangle s]$ — на m частей точками $s_{m,j} = s + \dfrac{j}{m}\triangle s$ $(j = \overline{0,m})$ и представим приращение $\triangle W(t,s)$ в виде суммы приращений по частичным непересекающимся прямоугольникам:

$$\triangle_{\triangle t,\triangle s} W(t,s) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \xi_{n,i,m,j},$$

где приращения $\xi_{n,i,m,j} := W(t_{n,i}, s_{m,j}) - W(t_{n,i}, s_{m,j-1}) - W(t_{n,i-1}, s_{m,j}) + W(t_{n,i-1}, s_{m,j-1})$ суть независимые случайные величины.

Из непрерывности п.н. $W(t,s)$ на $\mathbb{R}_+^2$ следует равномерная непрерывность п.н. этой функции на $[t, t+\triangle t] \times [s, s+\triangle s]$, следовательно,

$$\max_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq i\leq m}} |\xi_{n,i,m,j}| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty \quad \text{п.н.} \tag{2.2}$$

Упорядочим приращения $\xi_{n,i,m,j}$ следующим образом: положим

$$\eta_{p,q} = \begin{cases} \xi_{n,q,m,1}\,, & 1 \leq q \leq n, \\ \xi_{n,q-n,m,2}\,, & n+1 \leq q \leq 2n, \\ \ldots & \ldots \\ \xi_{n,q-(m-1)n,m,m}, & (m-1)n+1 \leq q \leq mn, \end{cases} \qquad \text{где} \quad p = nm, \quad 1 \leq q \leq p.$$

Случайные величины $\eta_{p,q}$ независимы при разных q (в серии p), их сумма сходится по распределению к $\triangle W(t,s)$:

$$\mathrm{Law}\Big(\sum_{q=1}^{p} \eta_{p,q}\Big) = \mathrm{Law}\Big(\sum_{i,j=1}^{n,m} \xi_{n,i,m,j}\Big) = \mathrm{Law}(\triangle_{\triangle t,\triangle s} W(t,s)),$$

а из (2.2) получаем $\max_{1\le q\le p}|\eta_{p,q}|\to 0$ п.н. при $p\to\infty$. Тогда (см., например, [5, лемма 4, приложение 3]) случайная величина $\triangle_{\triangle t,\triangle s}W(t,s)$ гауссовская.

Отсюда имеем, что $W(t,s)=\triangle_{t,s}W(0,0)$ — также нормально распределенная случайная величина: $W(t,s)\sim\mathcal{N}(a(t,s),G(t,s))$, тогда согласно лемме случайная функция W гауссовская.

Осталось показать непрерывность функций $a(t,s)=\mathsf{E}\,[W(t,s)]$ и $G(t,s)=\mathsf{D}\,[W(t,s)]$, $t,s\ge 0$. Возьмем $t_n\to t$ и $s_m\to s$. В силу непрерывности траекторий $W(t_n,s_m)\to W(t,s)$ п.н. при $n,m\to\infty$. Тогда $W(t_n,s_m)\to W(t,s)$ по распределению, следовательно, $a(t_n,s_m)=\mathsf{E}\,[W(t_n,s_m)]\to\mathsf{E}\,[W(t,s)]=a(t,s)$ и $G(t_n,s_m)=\mathsf{D}\,[W(t_n,s_m)]\to\mathsf{D}\,[W(t,s)]=G(t,s)$. □

Теорема 2. *Определения* 6–9 *броуновского листа эквивалентны.*

Доказательство. Определение 6 $\Rightarrow$ Определение 7.

Из свойств (BS1.2) и (BS1.3) следует, что $\mathsf{E}\,[W(t,0)]=\mathsf{D}\,[W(t,0)]=0$ при любом $t\ge 0$, следовательно, $W(t,0)=0$ п.н. Аналогично $W(0,s)=0$ при $s\ge 0$.

Докажем (BS2.3). Рассмотрим приращение $\triangle W(t,s)$, определенное в (1.1), и введем вектор

$$X=(W(t,s),W(t,s+\triangle s),W(t+\triangle t,s),W(t+\triangle t,s+\triangle s))^T. \tag{2.3}$$

Согласно (BS1.1) случайная функция $W(t,s)$ гауссовская, что означает гауссовость ее конечномерных распределений, в частности вектора X. Известно, что случайный вектор является гауссовским тогда и только тогда, когда его скалярное произведение с любым (детерминированным) вектором λ является действительной нормально распределенной случайной величиной, и если при этом $X\sim\mathcal{N}(m,R)$, то $\langle\lambda,X\rangle\sim\mathcal{N}(\langle\lambda,m\rangle,\langle R\lambda,\lambda\rangle)$. В нашем случае $m=0$, а ковариационную матрицу R вектора X легко вычислить на основании свойства (BS1.3):

$$R=\begin{pmatrix} ts & ts & ts & ts\\ ts & t(s+\triangle s) & ts & t(s+\triangle s)\\ ts & ts & (t+\triangle t)s & (t+\triangle t)s\\ ts & t(s+\triangle s) & (t+\triangle t)s & (t+\triangle t)(s+\triangle s)\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Осталось заметить, что для $\lambda=(1,-1,-1,1)$ выполняется $\triangle W(t,s)=\langle\lambda,X\rangle\sim\mathcal{N}(0,\triangle t\triangle s)$.

Докажем (BS2.2). Независимость приращений $\triangle W(t_1,s_1)$ и $\triangle W(t_2,s_2)$ будет следовать из их ортогональности, поскольку мы уже знаем, что они гауссовы. Рассмотрим два непересекающихся прямоугольника $(t_1,t_1+\triangle t_1]\times(s_1,s_1+\triangle s_1]$ и $(t_2,t_2+\triangle t_2]\times(s_2,s_2+\triangle s_2]$ и вычислим ковариацию приращений по этим прямоугольникам. Для определенности будем считать, что $t_1+\triangle t_1\le t_2$ и $s_1+\triangle s_1\le s_2$ (прямоугольники не пересекаются). Тогда из равенства нулю средних приращений и свойства (BS1.3) получаем

$$\begin{aligned}&\mathsf{Cov}\,[\triangle W(t_1,s_1),\triangle W(t_2,s_2)]\\ &=\mathsf{Cov}\,[W(t_1+\triangle t_1,s_1+\triangle s_1),\triangle W(t_2,s_2)]-\mathsf{Cov}\,[W(t_1+\triangle t_1,s_1),\triangle W(t_2,s_2)]\\ &\quad-\mathsf{Cov}\,[W(t_1,s_1+\triangle s_1),\triangle W(t_2,s_2)]+\mathsf{Cov}\,[W(t_1,s_1)),\triangle W(t_2,s_2)].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для первого слагаемого ковариация случайной величины $W(t_1+\triangle t_1,s_1+\triangle s_1)$ с каждым элементом приращения $\triangle W(t_2,s_2)$ равна $(t_1+\triangle t_1)(s_1+\triangle s_1)$, поэтому

$$\mathsf{Cov}\,[W(t_1+\triangle t_1,s_1+\triangle s_1),\triangle W(t_2,s_2)]=(t_1+\triangle t_1)(s_1+\triangle s_1)(1-1-1+1)=0.$$

То же самое справедливо для остальных слагаемых в (2.5), следовательно, приращения $\triangle W(t_1,s_1)$ и $\triangle W(t_2,s_2)$ не коррелируют.

Определение 7 $\Rightarrow$ Определение 8.

Свойство (BS3.1) совпадает с (BS2.1), а свойство (BS3.4) — с (BS2.2).

Свойство (BS3.2) получаем благодаря нулевым граничным условиям и нормальному распределению приращений:

$$W(t,s) = W(t,s) - W(t,0) - W(0,s) + W(0,0) = \triangle W(0,0) \sim \mathcal{N}(0, ts).$$

Свойство (BS3.3) следует из леммы.

Наконец, по условию (BS2.3) $\triangle_{\triangle t, \triangle s} W(t,s) \sim \mathcal{N}(0, \triangle t \triangle s)$, т. е. закон распределения приращения определяется только величинами $\triangle t, \triangle s$ и не зависит от точки (t,s), что означает однородность поля (свойство (BS3.5)).

О п р е д е л е н и е $8 \Rightarrow$ О п р е д е л е н и е 9.

Свойство (BS4.1) совпадает с (BS3.1), а свойство (BS4.2) — с (BS3.4).

Докажем (BS4.3). Возьмем приращение (1.1) и представим его в виде $\triangle_{\triangle t, \triangle s} W(t,s) = \langle \lambda, X \rangle$, где $\lambda = (1, -1, -1, 1)^T$, а вектор X определен в (2.3). Функция $W(t,s)$ гауссовская с нулевым средним, поэтому $X \sim \mathcal{N}(0, R)$, где матрица R составлена из ковариаций компонент вектора X: $R = \{\mathsf{Cov}\,(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^4$. Например,

$$R_{12} = \mathsf{Cov}\,(x_1, x_2) = \mathsf{Cov}\,(W(t,s), W(t+\triangle t, s))$$

$$= \mathsf{E}\left[\big(W(t,s) - W(t,0) - W(0,s) + W(0,0)\big)\big(W(t+\triangle t, s) - W(t+\triangle t, 0) - W(t,s) + W(t,0) + W(t,s)\big)\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\triangle_{t,s} W(0,0) \cdot \triangle_{\triangle t, s} W(t,0) + W^2(t,s)\right] = \mathsf{E}\left[W^2(t,s)\right] = t \cdot s = \min\{t, t+\triangle t\} \cdot \min\{s, s\}.$$

Продолжая вычисления таким образом, получим, что R есть матрица, определенная в (2.4), тогда

$$\triangle_{\triangle t, \triangle s} W(t,s) = \langle \lambda, X \rangle \sim \mathcal{N}(0, \langle R\lambda, \lambda \rangle) = \mathcal{N}(0, \triangle t \triangle s).$$

Приращение $\triangle_{\triangle t, \triangle s} W(0,0)$ имеет тот же закон распределения в силу нулевых краевых условий и свойства (BS3.2):

$$\triangle_{\triangle t, \triangle s} W(0,0) = W(\triangle t, \triangle s) - W(\triangle t, 0) - W(0, \triangle s) + W(0,0) = W(\triangle t, \triangle s) \sim \mathcal{N}(0, \triangle t \triangle s),$$

что доказывает свойство (BS4.3).

Докажем (BS4.4). Для произвольного множества $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(-W(t,s))(\Lambda) = \mathsf{P}\,(-W(t,s) \in \Lambda) = \mathsf{P}\,(W(t,s) \in -\Lambda)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi ts}} \int\limits_{-\Lambda} e^{-\frac{x^2}{ts}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi ts}} \int\limits_{\Lambda} e^{-\frac{y^2}{ts}}\,dy = \mathcal{L}(W(t,s))(\Lambda).$$

О п р е д е л е н и е $9 \Rightarrow$ О п р е д е л е н и е 6.

Согласно теореме 1, функция с непрерывными траекториями, независимыми приращениями и нулевыми краевыми условиями (BS4.1) является гауссовской: $W(t,s) \sim \mathcal{N}(a(t,s), G(t,s))$, причем функции $a(t,s)$ и $G(t,s)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+^2$.

Покажем, что в нашем случае $a(t,s) \equiv 0$ (свойство (BS1.2)). В силу (BS4.4) для произвольных $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $t, s \geq 0$ справедливо $\mathsf{P}\,(-W(t,s) \in \Lambda) = \mathsf{P}\,(W(t,s) \in \Lambda)$, следовательно,

$$\int\limits_{\Lambda} W(t,s)\mathsf{P}\,(d\omega) = \int\limits_{\Lambda} -W(t,s)\mathsf{P}\,(d\omega),$$

в частности, выбирая $\Lambda = \Omega$, получаем $\mathsf{E}\,[W(t,s)] = \mathsf{E}\,[-W(t,s)]$, а значит, $\mathsf{E}\,[W(t,s)] = 0$.

Чтобы доказать (BS1.3), сначала покажем, что функция $G(t,s)$ является однородной. В силу нулевых краевых условий (свойство (BS4.1)), независимости приращений (свойство (BS4.2)) и нулевого математического ожидания (только что доказанного) для $t, s, \triangle t, \triangle s \geq 0$ получаем

$$G(t+\triangle t, s+\triangle s) = \mathsf{D}\,[W(t+\triangle t, s+\triangle s)] = \mathsf{D}\,[\triangle_{t+\triangle t, s+\triangle s} W(0,0)]$$

$$= \mathsf{D}\,[\triangle_{t,s}W(0,0)] + \mathsf{D}\,[\triangle_{\triangle t,s}W(t,0)] + \mathsf{D}\,[\triangle_{t,\triangle s}W(0,s)] + \mathsf{D}\,[\triangle_{\triangle t,\triangle s}W(t,s)],$$

откуда в силу (BS4.3)

$$= \mathsf{D}\,[\triangle_{t,s}W(0,0)] + \mathsf{D}\,[\triangle_{\triangle t,s}W(0,0)] + \mathsf{D}\,[\triangle_{t,\triangle s}W(0,0)] + \mathsf{D}\,[\triangle_{\triangle t,\triangle s}W(0,0)]$$

$$= \mathsf{D}\,[W(t,s)] + \mathsf{D}\,[W(\triangle t,s)] + \mathsf{D}\,[W(t,\triangle s)] + \mathsf{D}\,[W(\triangle t,\triangle s)]$$

$$= G(t,s) + G(\triangle t,s) + G(t,\triangle s) + G(\triangle t,\triangle s).$$

Тогда для $\triangle t = t$ и $\triangle s = s$

$$G(2t,2s) = 4G(t,s) \quad \Rightarrow \quad G(nt,ms) = nmG(t,s), \quad n,m \in \mathbb{N},$$

следовательно,

$$G\Big(\frac{n}{m}t, \frac{p}{q}s\Big) = \frac{np}{mq}G(t,s), \quad n,m,p,q \in \mathbb{N},$$

и в силу непрерывности $G(t,s)$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$ получаем $G(\alpha t,\beta s) = \alpha\beta G(t,s)$. Окончательно имеем

$$G(t,s) = \alpha ts, \quad \text{где} \quad \alpha = G(1,1). \tag{2.6}$$

Теперь докажем свойство (BS1.3). Из нулевых средних и краевых условий и независимости приращений для $0 < t_1 < t_2$, $0 < s_1 < s_2$ получаем

$$\mathsf{Cov}\,(W(t_1,s_1),W(t_2,s_2)) = \mathsf{E}\left[\triangle_{t_1,s_1}W(0,0)\cdot(\triangle_{t_2-t_1,s_2}W(t_1,0) + W(t_1,s_2))\right]$$

$$= \mathsf{E}\left[\triangle_{t_1,s_1}W(0,0)\cdot W(t_1,s_2)\right] = \mathsf{E}\,[W(t_1,s_1)\cdot W(t_1,s_2)],$$

аналогично

$$\mathsf{E}\,[W(t_1,s_1)\cdot W(t_1,s_2)] = \mathsf{E}\,[\triangle_{t_1,s_1}W(0,0)\cdot(\triangle_{t_1,s_2-s_1}W(0,s_1) + W(t_1,s_1))] = \mathsf{E}\,[W^2(t_1,s_1)],$$

таким образом в силу (2.6)

$$\mathsf{Cov}\,(W(t_1,s_1),W(t_2,s_2)) = G(t_1,s_1) = \alpha t_1 s_1 = \alpha\min\{t_1,t_2\}\cdot\min\{s_1,s_2\}. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е. Определения 6–8 дают “стандартный” броуновский лист — гауссовскую случайную функцию с параметрами 0 и $\prod_{i=1}^k t_i$, в то время как по определению 9 можно получить случайную функцию с дисперсией $\alpha\prod_{i=1}^k t_i$, где α — необязательно единица. В этом смысле это определение не до конца эквивалентно трем первым.

Существует еще подход к определению броуновского движения, определяющий сразу все пространство его траекторий [4]. Автору неизвестно о попытках распространить его на случай полей; в настоящей работе такая цель не ставилась.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Allen E.J.** Modeling with Ito stochastic differential equations. N Y, Berlin, Springer, 2007. 228 p. doi: 10.1007/978-1-4020-5953-7.
2. **Бовкун В.А.** О моделях, приводящих к бесконечномерной стохастической задаче Коши // Теория вероятностей и ее применения. 2017. Т. 62, № 4. С. 803–804.
3. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 355 с.
4. **Ито К., Маккин Г.** Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968. 395 с.
5. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 400 с.
6. **Da Prato G., Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014. 380 p. ISBN: 9781107295513.

7. **Melnikova I.V.** Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016. 300 p. ISBN: 1482210509 .

Алексеева Ульяна Алексеевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент ИЕНиМ
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: uliana.alekseeva@urfu.ru

Поступила 19.03.2018

REFERENCES

1. Allen E.J. *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations.* Dordrecht: Springer, 2007, 228 p. doi: 10.1007/978-1-4020-5953-7 .
2. Bovkun V.A. On models that lead to an infinite-dimensional stochastic Cauchy problem. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 2017, vol. 62, no. 4, pp. 803–804 (in Russian). doi: 10.4213/tvp5151 .
3. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Stochastic differential equations.* Berlin: Springer, 1972, 356 p. ISBN: 0-387-05946-6 . Original Russian text published in Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya.* Kiev: Naukova Dumka, 1968, 355 p.
4. Itô K., Mckean H.P. *Diffusion processes and their sample paths.* Berlin: Springer, 1965, 338 p. ISBN: 3540606297 . Translated to Russian under the title *Diffuzionnye protsessy i ikh traektorii.* Moscow, Mir Publ., 1968, 395 p.
5. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 400 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
6. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014, 380 p. ISBN: 9781107295513 .
7. Melnikova I.V. *Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions.* Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016, 300 p. ISBN: 1482210509 .

The paper was received by the Editorial Office on March 19, 2018.

Uliana Alekseevna Alekseeva, Cand. Sci. (Phys.-Math), Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: uliana.alekseeva@urfu.ru .