ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.17

КОДЫ В ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ ШИЛЛА[1]

И. Н. Белоусов

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$ (Юришич и Видали). В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$, и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$, во втором случае Γ является графом Шилла. В работе изучаются графы Шилла, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 3, лежат в максимальном 1-коде. Доказано, что в случае $\theta_2 = -1$ граф с указанным свойством является либо графом Хэмминга $H(3,3)$, либо графом Джонсона. Кроме того найдены необходимые условия существования Q-полиномиальных графов Шилла, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 3, лежат в максимальном 1-коде. В частности, найдены две бесконечные серии допустимых массивов пересечений Q-полиномиальных графов с указанным свойством $\{b(b^2-3b)/2, (b-2)(b-1)^2/2, (b-2)t/2; 1, bt/2, (b^2-3b)(b-1)/2\}$ (графы с $p^3_{33} = 0$), $\{b^2(b-4)/2, (b^2-4b+2)(b-1)/2, (b-2)l/2; 1, bl/2, (b^2-4b)(b-1)/2\}$ (графы с $p^3_{33} = 1$).

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov. Codes in Shilla distance-regular graphs.

Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 containing a maximal 1-code C, which is locally regular and perfect with respect to the last neighborhood. Then Γ has intersection array $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ or $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, where $a = a_3$, $c = c_2$, and $p = p^3_{33}$ (Jurišić, Vidali). In the first case, Γ has eigenvalue $\theta_2 = -1$ and the graph Γ_3 is pseudogeometric for $GQ(p+1, a)$. In the second case, Γ is a Shilla graph. We study Shilla graphs in which every two vertices at distance 2 belong to a maximal 1-code. It is proved that, in the case $\theta_2 = -1$, a graph with the specified property is either the Hamming graph $H(3,3)$ or a Johnson graph. We find necessary conditions for the existence of Q-polynomial Shilla graphs in which any two vertices at distance 3 lie in a maximal 1-code. In particular, we find two infinite families of feasible intersection arrays of Q-polynomial graphs with the specified property: $\{b(b^2-3b)/2, (b-2)(b-1)^2/2, (b-2)t/2; 1, bt/2, (b^2-3b)(b-1)/2\}$ (graphs with $p^3_{33} = 0$) and $\{b^2(b-4)/2, (b^2-4b+2)(b-1)/2, (b-2)l/2; 1, bl/2, (b^2-4b)(b-1)/2\}$ (graphs with $p^3_{33} = 1$).

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-34-39

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$, $k_i = |\Gamma_i(u)|$ и $k = k_1$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α,s,t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Пусть M — алгебра Бозе — Меснера дистанционно регулярного графа Γ диаметра d, порожденная матрицей смежности A (см., например [1, § 2.2]). Алгебра M имеет базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0=\frac{1}{v}J,E_1,\dots,E_d\}$, где $v=|\Gamma|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ_i. Далее, $E_i\circ E_j=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^d q_{ij}^k E_k$, где $\circ$ — покомпонентное произведение. Числа q_{ij}^k $(0\le i,j,k\le d)$ неотрицательны [1, теорема 2.3.2] и называются *параметрами Крейна.* Граф Γ называется *Q-полиномиальным,* если для некоторого упорядочения примитивных идемпотентов $E_0=\frac{1}{v}J,E_1,\dots,E_d$ числа $q_{1j}^k=0$ при $|j-k|>1$. Скажем, что Γ является Q-полиномиальным относительно θ, если E_1 — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее θ.

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\min\{a_3,(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1=a_3$ по [2, теорема 7] имеем $\theta_1=(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2$. *Графом Шилла* называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a=a_3$ делит k и полагаем $b=b(\Gamma)=k/a$.

Пусть Γ является графом Шилла. Тогда $a_1=a-b$, Γ имеет массив пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$ и собственные значения θ_2,θ_3, являющиеся корнями уравнения $x^2-(a_2+a-b-ab)x+(b-1)b_2-a_2=0$. Если θ_2,θ_3 — целые числа, то $(a_2+a-b-ab)^2-4((b-1)b_2-a_2)$ является квадратом натурального числа, в противном случае кратности θ_2 и θ_3 совпадают.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется *e-кодом*, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C|\le p_{dd}^d+2$ [3, предложение 4.3.1]. В случае равенства код называется *максимальным.* Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $c_d\ge a_d p_{dd}^d$ [3, предложение 4.3.4]. В случае равенства код называется *локально регулярным.* Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C|\le k_d/\sum_{i=0}^e p_{id}^d+1$ [3, предложение 4.3.7]. В случае равенства код называется *совершенным относительно последней окрестности.*

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по [4, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$ или $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$, где $a=a_3,c=c_2,p=p_{33}^3$. Указанные массивы совпадают в случае $c=a+1$. Но в этом случае по [5, теорема 1] граф имеет массив пересечений $\{35,32,8;1,8,28\}$, противоречие с тем, что для этого массива $q_{33}^3=-36/25$.

В случае массива пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$ граф Γ имеет собственное значение $\theta_2=-1$, и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1,a)$. Если кроме того $c=a-1$, то граф $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(2p+2,a)$, а если еще $c=(p^2-4)/2$, то граф Γ является Q-полиномиальным и по [4, теорема 3] не существует.

В случае массива пересечений $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$ получаем граф Шилла. Обратно, граф Шилла Γ с $b_2=c_2$ имеет массив пересечений $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$, где $p=p_{33}^3=b-1$.

В работе изучаются графы Шилла, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 3, лежат в максимальном 1-коде. Если в графе $p_{33}^3\le 1$, то указанное свойство выполняется. Я. Видали [3, предложение 4.6.3] показал, что в Q-полиномиальных графах Шилла с

$b_2 = c_2$ это свойство также выполнено. При этом Γ имеет массив пересечений $\{2rt(2r+1),(2r-1)(2rt+t+1),r(r+t);1,r(r+t),t(4r^2-1)\}$, и в случае $t=r>1$ граф не существует по [4].

Автор этой статьи и А. А. Махнев [6, теорема 1] нашли бесконечную серию допустимых массивов пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b_2 = c_2$. Эта серия имеет вид $\{2r(2r^2-1)(2r+1),(2r-1)(2r(2r^2-1)+2r^2),r(2r^2+r-1);1,r(2r^2+r-1),(2r^2-1)(4r^2-1)\}$ и получена при $t=2r^2-1$.

В данной работе продолжено исследование графов Шилла, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 3, лежат в максимальном 1-коде. Основным результатом работы являются теоремы 1, 2.

Теорема 1. *Пусть Γ — граф Шилла с $p^3_{33}=0$. Тогда $(a+b)b_2=(a+1)c_2$, и выполняются следующие утверждения*:

(1) *число θ_2 не равно -1*;

(2) *если Γ является Q-полиномиальным графом относительно θ_1, то $2a+b+1$ делит $b(b-1)^2/2$, $2a+b+1 \neq b(b-1)$, а в случае $2a+b+1=(b-1)^2$ граф Γ имеет массив пересечений $\{b(b^2-3b)/2,(b-2)(b-1)^2/2,(b-2)t/2;1,bt/2,(b^2-3b)(b-1)/2\}$.*

Теорема 2. *Пусть Γ является графом Шилла с $p^3_{33}=1$. Тогда $(a+b)b_2=(a+2)c_2$, и выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $\theta_2=-1$, то Γ — граф Хэмминга $H(3,3)$ с массивом пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$ или граф Джонсона $J(9,3)$ с массивом пересечений $\{18,10,4;1,4,9\}$*;

(2) *если Γ является Q-полиномиальным графом относительно θ_1, то $2a+b+2$ делит $(b-2)b(b-1)/2$, число $2a+b+2$ не равно $b(b-1)$ и $b(b-2)$, а в случае $2a+b+2=(b-1)(b-2)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-4)/2,(b^2-4b+2)(b-1)/2,(b-2)l/2;1,bl/2,(b^2-4b)(b-1)/2\}$.*

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведем вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственными значениями $k=\theta_0>\theta_1>\theta_2>\theta_3$, то $\theta_1+\theta_2+\theta_3=a_1+a_2+a_3-k$, $\theta_1\theta_2\theta_3=(a_1+1)(b_2-a_3)+a_3c_2$ и $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1)=b_1(b_2-a_3-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица T порядка 3, собственные значения которой совпадают с собственными значениями $\theta_1>\theta_2>\theta_3$ графа Γ, имеет вид [1, с. 130]

$$T=\begin{pmatrix} -1 & b_1 & 0 \\ 1 & k-b_1-c_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3-b_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\theta_1+\theta_2+\theta_3=Tr(T)=a_1+a_2+a_3-k$ и $\theta_1\theta_2\theta_3=det(T)=k(b_2-a_3)+a_3c_2$. Наконец, $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1)=det(T+I)=b_1(b_2-a_3-1)$. Лемма доказана.

Для графа с массивом пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$ имеем $\theta_2+\theta_3=a-b-b_2-c_2$, $-\theta_2\theta_3=b(b_2-a)+c_2$ и $(\theta_2+1)(\theta_3+1)=(b-1)(b_2-a-1)$.

Лемма 2. *Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\theta_2=-1$, u — вершина графа Γ и $k_i=|\Gamma_i(u)|$, то верны следующие утверждения*:

(1) *$b_2-1=a_3$, и граф Γ_3 сильно регулярен*;

(2) *c_2 делит b_1, и $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $\theta_2=-1$. По [7, предложение 3.3] имеем $b_2-1=a_3$, $k+1=c_3+b_2$,и граф Γ_3 сильно регулярен.

Положим $\Delta = \bar{\Gamma}_3$. По замечанию после предложения 4.2.18 [1] собственные значения графа Δ равны $(\theta^2 + (c_2 - a_1)\theta - k)/c_2$, когда θ пробегает множество собственных значений графа Γ. При $\theta = -1$ получим $\theta_2(\Delta) = -(b_1 + c_2)/c_2$, и c_2 делит b_1.

Заметим, что $k(\Delta) = k + k_2 = k(1 + b_1/c_2)$ делится на $\theta_2(\Delta)$, поэтому Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(k, b_1/c_2)$.

По лемме 1 имеем $-\theta_1\theta_3 = k + a_3c_2$ и $\theta_1 + \theta_3 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 - k = a_1 + a_2 + b_2 - k = a_1 - c_2$. Поэтому $\theta_1(\Delta) = (\theta_3^2 + (c_2 - a_1)\theta_3 - k)/c_2 = (-\theta_1\theta_3 - k)/c_2 = a_3$ и $\alpha = k - a_3 = c_3$. Лемма доказана.

2. Графы Шилла с $p^3_{33} = 0$

В этом разделе предполагается, что Γ является графом Шилла с $p^3_{33} = 0$. Напомним, что $p^3_{33} = (ab_2 + b_2b - ac_2 - c_2)/c_2$, поэтому в случае $p^3_{33} = 0$ имеем $(a + b)b_2 = (a + 1)c_2$.

Лемма 3. *Пусть* Γ *— граф Шилла с* $p^3_{33} = 0$. *Тогда число* θ_2 *не равно* -1.

Доказательство. Пусть Γ — граф Шилла с $p^3_{33} = 0$. Если $\theta_2 = -1$, то по лемме 2 $b_2 = a+1$. По условию $(a+b)b_2 = (a+1)c_2$, поэтому $c_2 = a+b = b+b_2-1$ делит $b_1 = (a+1)(b-1)$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), a + 1; 1, a + b, a(b - 1)\}$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{a(b-1)}(ab, (a+1)(b-1)/(a+b))$, и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $k_3 = (a + 1)^2b/(a + b)$, $\mu' = (a + 1)^2/(a + b)$. Далее, Γ_3 имеет неглавные собственные значения r, $-(\mu' + r)$, $k_3 = (r + 1)\mu' + r^2$, причем μ' делит $r^2(r - 1)$ и $\mu' + 2r$ делит $r(r + 1)(r + 2)(r + 3)$. Отсюда $r^2 = (a + 1)^2(b - r - 1)/(a + b)$ и $(a + b)/(b - r - 1) = (a + 1)^2/r^2$. Положим $t = (a + 1)/r$. Тогда $tr - 1 + b = (b - r - 1)t^2$ и $b = tr/(t-1)+1$. Таким образом, $r = (t-1)l$, $a+1 = t(t-1)l$, $b = tl+1$, $a+b = t^2l$, $\mu' = (t-1)l$ и $2r + 1 = (t - 1)(tl + 1)$. Отсюда $t = 2$, $r = l$, $a = 2l - 1$, $b = 2l + 1$, противоречие.

Лемма 4. *Пусть* Γ *— граф Шилла с* $p^3_{33} = 0$. *Если* Γ *является* Q*-полиномиальным графом относительно* θ_1,*, то* $2a+b+1$ *делит* $b(b-1)^2/2$, $2a+b+1 \neq b(b-1)$, *а в случае* $2a+b+1 = (b-1)^2$ *граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{b(b^2 - 3b)/2, (b - 2)(b - 1)^2/2, (b - 2)t/2; 1, bt/2, (b^2 - 3b)(b - 1)/2\}$.

Доказательство. Пусть Γ является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. Тогда $\theta_3 = -b(bb_2+c_2)/(b_2+c_2) = -b(b(a+1)/(a+b)+1)/((a+1)/(a+b)+1) = -b/2\cdot(2ab+2a+4b)/(2a+b+1) = -b/2\cdot(b+(2a+3b-b^2)/(2a+1+b)) = -b/2\cdot(b+1-(b-1)^2/(2a+b+1))$, поэтому $2a + b + 1$ делит $b(b - 1)^2/2$. По [2, следствие 16] имеем $-b^2 < \theta_3 \leq -(b + 1)$, следовательно, $2(b + 1)/b \leq b + 1 - (b - 1)^2/(2a + b + 1) \leq 2b$ и $(b - 1)^2/(2a + b + 1) \leq (b + 1)(b - 2)/2$.

Положим $b(b - 1)^2/2 = (2a + b + 1)t$. Тогда $2a + 2 = (b + 1)b(b - 1)/(2t) - b + 1$, t делит $((b+1)b(b-1)/2, b(b-1)^2/2) = (b+1, b-1)b(b-1)/2$ и $(2a+2, b-1) = ((b+1)b(b-1)/(2t), b-1)$.

В случае $2a+b+1 = b(b-1)$ имеем $a = (b^2-2b-1)/2$, b нечетно, $(b+1)b_2 = (b-1)c_2$, поэтому $b_2 = (b-1)l/2$, $c_2 = (b+1)l/2$ делит $a(a+1)b(b-1)$. Отсюда $(b+1)/2$ делит $(b-1)^2(b+1, b-1)$, $(b+1)/2$ делит 8 и $b \in \{3, 7, 15\}$. Соответственно, $a \in \{1, 17, 97\}$, $b_2 \in \{l, 3l, 7l\}$ и $c_2 \in \{2l, 4l, 8l\}$. Противорчие с тем, что число k_3 не целое.

В случае $2a + b + 1 = (b - 1)^2$ имеем $a = (b^2 - 3b)/2$, $bb_2 = (b - 2)c_2$, поэтому $b_2 = (b - 2)l/2$, $c_2 = bl/2$ делит $a(a + 1)b(b - 1)$. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{b(b^2 - 3b)/2, (b - 2)(b - 1)^2/2, (b - 2)l/2; 1, bl/2, (b^2 - 3b)(b - 1)/2\}$. Лемма доказана.

Из лемм 3, 4 следует теорема 1.

3. Графы Шилла с $p^3_{33} = 1$

В этом разделе предполагается, что Γ является графом Шилла с $p^3_{33} = 1$. Напомним, что $p^3_{33} = (ab_2 + b_2b - ac_2 - c_2)/c_2$, поэтому в случае $p^3_{33} = 1$ имеем $(a + b)b_2 = (a + 2)c_2$.

Лемма 5. *Если* $\theta_2 = -1$, *то* Γ — *граф Хэмминга* $H(3,3)$ *с массивом пересечений* $\{6,4,2;1,2,3\}$ *или граф Джонсона* $J(9,3)$ *с массивом пересечений* $\{18,10,4;1,4,9\}$.

Доказательство. Пусть Γ — граф Шилла с $p^3_{33} = 1$. Если $\theta_2 = -1$, то по лемме 2 $b_2 = a+1$. По условию $(a+b)b_2 = (a+2)c_2$, поэтому $a+2$ делит $a+b$. Так как $a \geq b$, то $b = 2$, $b_2 = c_2$, и ввиду [2, теорема 12] Γ — граф Хэмминга $H(3,3)$ или граф Джонсона $J(9,3)$.

Лемма 6. *Если* Γ *является* Q-*полиномиальным графом относительно* θ_1, *то* $2a+b+2$ *делит* $(b-2)b(b-1)/2$, *число* $2a+b+2$ *не равно* $b(b-1)$ *и* $b(b-2)$, *а в случае* $2a+b+2 = (b-1)(b-2)$ *граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{b^2(b-4)/2, (b^2-4b+2)(b-1)/2, (b-2)l/2; 1, bl/2, (b^2-4b)(b-1)/2\}$.

Доказательство. Пусть Γ является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. Тогда $\theta_3 = -b(bb_2+c_2)/(b_2+c_2) = -b(b(a+2)/(a+b)+1)/((a+2)/(a+b)+1)$, поэтому $\theta_3 = -b/2\cdot(2ab+2a+6b)/(2a+b+2) = -b/2\cdot(b+(2a+4b-b^2)/(2a+b+2)) = -b/2\cdot(b+1-(b^2-3b+2)/(2a+b+2))$. Отсюда $2a+b+2$ делит $b(b-2)(b-1)/2$.

Положим $b(b-1)(b-2)/2 = (2a+b+2)t$. Тогда $2a+2 = (b-2)b(b-1)/(2t) - b$, b делит $2(a+1)t$, t делит $(b-2)(b-1)b/2)$ и $(2a+2,b) = ((b-2)b(b-1)/(2t), b)$.

В случае $2a+b+2 = (b-2)(b-1)$ имеем $a = (b^2-4b)/2$, b четно, $(b^2-2b)b_2 = (b^2-4b+4)c_2$, $bb_2 = (b-2)c_2$, поэтому $b_2 = (b-2)l/2$, $c_2 = bl/2$ делит $a(a+1)b(b-1)$. Отсюда $2l$ делит $(b^2-4b)(b^2-4b+2)(b-1)$, и Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-4)/2, (b^2-4b+2)(b-1)/2, (b-2)l/2; 1, bl/2, (b^2-4b)(b-1)/2\}$.

В случае $2a+b+2 = (b-2)b$ имеем $a = (b^2-3b-2)/2$, $(b-2)(b+1)b_2 = (b^2-3b)c_2$, поэтому $b_2 = (b^2-3b)l/4$, $c_2 = (b-2)(b+1)l/4$ делит $a(a+1)b(b-1)$. Так как $(b-2, b^2-3b-2)$ делит 4, $(b-2, b^2-3b)$ делит 2, то $b-2$ делит 16. Далее, так как $(b+1, b^2-3b-2) = (b+2, 4b+2)$ делит 6, $(b+1, b^2-3b)$ делит 4, то $b+1$ делит 48. Отсюда $b = 3$, противоречие.

В случае $2a+b+2 = (b-1)b$ имеем $a = (b^2-2b-2)/2$, $(b^2-2)b_2 = (b^2-2b)c_2$, поэтому $b_2 = (b^2-2b)l/2$, $c_2 = (b^2-2)l/2$ делит $a(a+1)b(b-1)$. Так как (b^2-2, b^2-2b-2) делит 2, (b^2-2, b^2-2b) делит 2, то b^2-2 делит 16. Отсюда $b = 2$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 5, 6 следует теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. **Vidali J.** Kode v razdaljno regularnih grafih: Doctorska dissertacija / Univerza v Ljubljani. Ljubljana, 2013. 155 str.
4. **Jurisic A., Vidali J.** Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65, no. 1-2. P. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
5. **Махнев А. А., Нирова М. С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 5. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
6. **Белоусов И. Н., Махнев А. А.** К теории графов Шилла с $b_2 = c_2$ // Сиб. электрон. мат. известия. 2017. Т. 14. С. 1135–1146. doi: 10.17377/semi.2017.14.097 .
7. **Koolen J.H., Park J., Yu H.** An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph // Linear Algebra Appl. 2011. Vol. 434, no. 12. P. 2404–2412. doi: 10.1016/j.laa.2010.12.032 .

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Поступила 25.12.2017

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. Vidali J. *Kode v razdaljno regularnih grafih*, Doctorska dissertacija, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 2013, 155 str.
4. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
5. Makhnev A.A., Nirova M.S. Shilla distance-regular graphs with $b_2 = c_2$. *Mat. Zametki*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 730–744 (in Russian). doi: 10.4213/mzm11503 .
6. Makhnev A.A., Belousov I.N. To the theory of Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, vol. 14, pp. 1135–1146 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2017.14.097 .
7. Koolen J.H., Park J., Yu H. An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph. *Linear Algebra Appl.*, 2011, vol. 434, no. 12, pp. 2404–2412. doi: 10.1016/j.laa.2010.12.032 .

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 25, 2017.

Ivan NIkolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phis.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia: Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .