ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.65

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ С РАВНОМЕРНЫМИ УЗЛАМИ[1]

В. Т. Шевалдин

Для функции $\varphi \in C^1[-h,h]$ $(h>0)$, удовлетворяющей условиям $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ $(x\in [0;h])$, $\varphi(x)$ не убывает на $[0;h]$, для любой функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ в работе изучаются свойства устойчивости обобщенных локальных сплайнов, построенных автором ранее, вида

$$S(x)=S(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x+\frac{3h}{2}-jh\Big) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

где $y_j=f(jh)$ $(j\in\mathbb{Z})$, $m(h)>0$ и

$$B_\varphi(x)=m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0;h],\\ 2\varphi(h)-\varphi(x-h)-\varphi(2h-x), & x\in[h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x\in[2h;3h],\\ 0, & x\notin[0;3h]. \end{cases}$$

Для таких сплайнов вычислены точно интегральные константы Лебега (нормы линейных операторов из l в L) на оси $\mathbb{R}$ и на любом отрезке этой оси при определенном выборе у сплайна S граничных условий и нормирующего множителя $m(h)$.

Ключевые слова: константы Лебега, локальные сплайны, граничные условия.

V. T. Shevaldin. On integral Lebesgue constants of local splines with uniform knots.

We study the stability properties of generalized local splines of the form

$$S(x)=S(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x+\frac{3h}{2}-jh\Big) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

where $\varphi \in C^1[-h,h]$ for $h>0$, $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ for $x\in[0;h]$, $\varphi(x)$ is nondecreasing on $[0;h]$, f is an arbitrary function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, $y_j=f(jh)$ for $j\in\mathbb{Z}$, and

$$B_\varphi(x)=m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0;h],\\ 2\varphi(h)-\varphi(x-h)-\varphi(2h-x), & x\in[h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x\in[2h;3h],\\ 0, & x\notin[0;3h] \end{cases}$$

with $m(h)>0$. Such splines were constructed by the author earlier. In the present paper we calculate the exact values of their integral Lebesgue constants (the norms of linear operators from l to L) on the axis $\mathbb{R}$ and on any segment of the axis for a certain choice of the boundary conditions and the normalizing factor $m(h)$ of the spline S.

Keywords: Lebesgue constants, local splines, boundary conditions.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-290-297

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Введение

Автор [1] предложил обобщение известной конструкции параболического базисного сплайна с равномерными узлами "склейки", построенного на основе одной функции $\varphi \in C^1[-h, h]$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \\ &2)\ \varphi(-x) = \varphi(x) \quad (x \in [0; h]), \\ &3)\ \varphi(x) \text{ не убывает на отрезке } [0; h] \end{aligned} \tag{0.1}$$

(ясно, что функция $\varphi(x)$ неотрицательна на отрезке $[-h; h]$). А именно, базисный сплайн $B_\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ на оси $\mathbb{R}$ определяется формулой

$$B_\varphi(x) = m(h) \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0; h], \\ 2\varphi(h) - \varphi(x-h) - \varphi(2h-x), & x \in [h; 2h], \\ \varphi(3h-x), & x \in [2h; 3h], \\ 0, & x \notin [0; 3h], \end{cases} \tag{0.2}$$

где $m = m(h) > 0$ — нормирующий множитель, который выбирается, как правило, из условия сохранения локальным сплайном некоторых функций. Нормализованный (в C) параболический сплайн получается из этого определения, если

$$\varphi(x) = x^2, \quad m(h) = \frac{1}{2\varphi(h)} = \frac{1}{2h^2}.$$

Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ ($j \in \mathbb{Z}$). Для любой фиксированной функции φ описанного типа в [1] изучались локальные сплайны вида

$$S(x) = S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x + \frac{3h}{2} - jh\Big) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{0.3}$$

и было доказано, что такие сплайны обладают хорошими формосохраняющими, сглаживающими и аппроксимативными свойствами на соответствующих классах функций, зависящих от функции φ. В данной работе аналогичные сплайны построены автором и на отрезке числовой прямой $\mathbb{R}$ с краевыми условиями типа второго рода (см. далее разд. 2). Сплайны $S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x)$ задают линейный (неинтерполяционный) метод $S\colon f \to S_\varphi$ аппроксимации функций, заданных своими значениями $y_j = f(jh)$ ($j \in \mathbb{Z}$) на числовой оси $\mathbb{R}$.

Пусть $y = \{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$:

$$\|y\| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |y_j| < +\infty \tag{0.4}$$

и

$$\|S_\varphi\| = \|S_\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} |S_\varphi(x)|\, dx.$$

Величина

$$L_{\varphi,h} = \sup_{\|y\| \le 1} \|S_\varphi\| \tag{0.5}$$

называется *интегральной константой Лебега линейного оператора* S.

В настоящей статье для функций f (с заданными значениями $y_j = f(jh)$ ($j \in \mathbb{Z}$)) величина $L_{\varphi,h}$ вычислена точно при любом $h > 0$ и указанных ограничениях на функцию φ. Кроме того, в разд. 2 при выборе нормирующего множителя $m(h) = 1/(2\varphi(h))$ и некоторых граничных условий сплайна S подобная константа вычислена и на любом отрезке числовой прямой.

Исследование констант Лебега интерполяционных (и неинтерполяционных) процессов (в частности, для сплайнов) является одной из важных задач теории приближения функций. В силу неравенства Лебега эти величины позволяют численно оценить устойчивость этих процессов к возмущению исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Для сплайнов одного переменного различного рода ранее изучалось в основном поведение *равномерных* констант Лебега (норм операторов из C в C) (см., например, [1; 2] и цитированную там литературу). Начало изучению *интегральных* констант Лебега интерполяционных сплайнов было положено в [3] (полиномиальные сплайны в периодическом случае) и в [4] (экспоненциальные сплайны на оси), но в обеих работах для указанных величин были получены только асимптотические оценки. Для локальных (неинтерполяционных) сплайнов подобные задачи, связанные с нахождением (или оценкой) интегральных констант Лебега, по-видимому, еще не рассматривались.

1. Интегральные константы Лебега на оси

Пусть f — произвольная функция, $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Положим $y_j = f(jh)$ $(j\in\mathbb{Z})$, и пусть последовательность $y=\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию (0.4). Выберем также произвольную (в дальнейшем, фиксированную) функцию $\varphi\in C^1[-h;h]$, удовлетворяющую условиям (0.1).

Укажем примеры таких неотрицательных функций, приводящие соответственно к параболическим, экспоненциальным и тригонометрическим сплайнам третьего порядка:

$$\begin{aligned}
&1)\ \varphi(x)=x^2,\\
&2)\ \varphi(x)=\operatorname{ch}\beta x-1\quad(\beta>0),\\
&3)\ \varphi(x)=1-\cos\alpha x\quad(\alpha>0).
\end{aligned}$$

Теорема 1. *Для функции* $\varphi\not\equiv 0$, *удовлетворяющей условиям* (0.1), *и сплайна* $S_\varphi(x)$, *определенного равенствами* (0.2) *и* (0.3), *для величины* $L_{\varphi,h}$, *заданной формулой* (0.5), *имеет место равенство*

$$L_{\varphi,h}=2m(h)\varphi(h)h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x\in[(l-1/2)h;(l+1/2)h]$ $(l\in\mathbb{Z})$ из (0.2), (0.3) для любой последовательности $y=\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\colon \|y\|\le 1$ имеет место равенство

$$S(x)=m(h)\Big[(y_{l+1}-y_l)\varphi\Big(x-lh+\frac{h}{2}\Big)+2\varphi(h)y_l+(y_{l-1}-y_l)\varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big]$$

$$=m(h)\Big[y_{l+1}\varphi\Big(x-lh+\frac{h}{2}\Big)+y_l\Big(2\varphi(h)-\varphi\Big(x-lh+\frac{h}{2}\Big)-\varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big)+y_{l-1}\varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big]. \quad (1.1)$$

Положим $t=x-lh\in[-h/2;h/2]$ и будем изучать наименьшую константу $M>0$ в неравенстве

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|S_\varphi(x)\,dx|\le M\|y\|. \quad (1.2)$$

Ясно, что $M=L_{\varphi,h}$. Из (1.1) имеем

$$\|S_\varphi\|=\int\limits_{\mathbb{R}}|S_\varphi(x)|\,dx=\sum_{l\in\mathbb{Z}}m(h)\int\limits_{(l-1/2)h}^{(l+1/2)h}\Big|y_{l+1}\varphi\Big(x-lh+\frac{h}{2}\Big)$$

$$+y_l\Big[2\varphi(h)-\varphi\Big(x-lh+\frac{h}{2}\Big)-\varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big]+y_{l-1}\varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big|\,dx$$

$$=\sum_{l\in\mathbb{Z}}m(h)\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big|y_{l+1}\varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big)+y_l\Big[2\varphi(h)-\varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big)-\varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big]+y_{l-1}\varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big|\,dt. \quad (1.3)$$

Так как $\varphi(t) \geq 0,\ t \in [-h;h]$, и $g(t) = 2\varphi(h) - \varphi(t+h/2) - \varphi(t-h/2) \geq 0,\ t \in [-h/2;h/2]$, то из (1.3) вытекает неравенство

$$\|S_\varphi\| \leq m(h)\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Bigg(|y_{l+1}|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big)\,dt + |y_l|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big]\,dt$$

$$+ |y_{l-1}|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\,dt\Bigg)$$

$$= m(h)\sum_{l\in\mathbb{Z}}|y_l|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big(\varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) + 2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big) + \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big)\,dt = \sum_{l\in\mathbb{Z}}M|y_l| = M\|y\|, \tag{1.4}$$

где

$$M = m(h)\int\limits_{-h/2}^{h/2}2\varphi(h)\,dt = 2m(h)\varphi(h)h.$$

Полученная таким образом константа M в неравенстве (1.2) для любой последовательности $y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\colon \|y\| \leq 1$ является точной в том смысле, что знак равенства в неравенствах (1.2) и (1.4) реализует любая последовательность y, удовлетворяющая условиям

1) $\|y\| = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|y_j| = 1$,

2) все члены последовательности y_j имеют один и тот же знак.

Теорема 1 полностью доказана. ☐

С л е д с т в и е. Для локальных параболических, экспоненциальных и тригонометрических сплайнов третьего порядка в [1, § 5.1] приведены явные формулы для функции φ и нормирующего множителя $m(h)$. С учетом этих формул выделим три частных случая теоремы 1.

1) Пусть $\varphi(x) = x^2$ и $m(h) = 1/(2h^2)$. Для возникающих в этом случае параболических сплайнов имеет место равенство

$$L_{\varphi,h} = h \quad (h > 0).$$

2) Пусть $\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1$ и $m(h) = ((4\operatorname{sh}^2(\beta h)/2)\operatorname{ch}(\beta h)/2)^{-1}$ $(\beta > 0)$. Для локальных экспоненциальных сплайнов третьего порядка, точных на функциях $e^{\beta x}$ и $e^{-\beta x}$, возникающих при этом в формуле (0.3), имеет место равенство

$$L_{\varphi,h} = \frac{h}{\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}} \quad (h > 0).$$

3) Пусть $\varphi(x) = 1 - \cos\alpha x$ и $m(h) = ((4\sin^2(\alpha h)/2)\cos(\alpha h)/2)^{-1}$ $(\alpha > 0,\ 0 < h < \pi/\alpha)$. В этом случае формулой (0.3) представлены локальные тригонометрические сплайны, точные на функциях $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$, и для них справедливо равенство

$$L_{\varphi,h} = \frac{h}{\cos\dfrac{\alpha h}{2}} \quad \Big(0 < h < \frac{\pi}{\alpha}\Big).$$

2. Интегральные константы Лебега на отрезке

Пусть аппроксимируемая функция f задана на некотором отрезке числовой прямой. Без ограничения общности пусть это отрезок $[0;A]$, который разобьем на n равных частей, и пусть

$x_j = jh$ $(j = \overline{0,n})$ — точки деления, $A = nh$. В этом разделе считаем, что функция f задана только в точках x_j, причем $f(x_j) = y_j$ $(j = \overline{0,n})$. Будем ее аппроксимировать сплайном $S_\varphi(x)$ вида (0.3), считая при этом, что $\varphi(h/2) \neq 0$. Формула (0.3) требует уточнение вблизи концов отрезка $[0; A]$, а именно, на отрезках $[0; h/2]$ и $[A - h/2; A]$. Следуя [1, §5.1, с. 155–156], на отрезке $[0; h/2]$ сплайн будем строить в виде

$$S_\varphi(x) = 2m(h)\varphi(h)y_0 + \Big[\frac{y_0(1 - 2m(h)\varphi(h))}{\varphi(h/2)} - m(h)(y_1 - y_0)\Big]\varphi\Big(x - \frac{h}{2}\Big) + m(h)(y_1 - y_0)\varphi\Big(x + \frac{h}{2}\Big)$$

$$= y_0\Big[2m(h)\varphi(h) + \frac{1 - 2m(h)\varphi(h)}{\varphi(\frac{h}{2})}\varphi\Big(x - \frac{h}{2}\Big) + m(h)\Big(\varphi\Big(x - \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x + \frac{h}{2}\Big)\Big)\Big]$$

$$+ \ y_1 m(h)\Big(\varphi\Big(x + \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x - \frac{h}{2}\Big)\Big), \tag{2.1}$$

а на отрезке $[A - h/2; A]$ — в виде

$$S_\varphi(x) = 2m(h)\varphi(h)y_n + \Big[\frac{y_n(1 - 2m(h)\varphi(h))}{\varphi(h/2)} - m(h)(y_{n-1} - y_n)\Big]\varphi\Big(nh - x - \frac{h}{2}\Big)$$

$$+ \ m(h)(y_{n-1} - y_n)\varphi\Big(nh - x + \frac{h}{2}\Big) = y_n\Big[2m(h)\varphi(h) + \frac{1 - 2m(h)\varphi(h)}{\varphi(\frac{h}{2})}\varphi\Big(nh - x - \frac{h}{2}\Big)$$

$$+ \ m(h)\Big(\varphi\Big(nh - x - \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(nh - x + \frac{h}{2}\Big)\Big)\Big] + y_{n-1}m(h)\Big(\varphi\Big(nh - x + \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(nh - x - \frac{h}{2}\Big)\Big). \tag{2.2}$$

На отрезках $[(l - 1/2)h; (l + 1/2)h]$ $(l = \overline{1, n-1})$ сплайн $S_\varphi(x)$ строим по формуле (0.3). Такое построение сплайна $S_\varphi(x)$ вблизи концов отрезка $[0; A]$ оправдывается, в частности, тем, что в классических случаях (параболические, экспоненциальные, тригонометрические сплайны третьего порядка при указанном ранее выборе функции φ и нормирующего множителя $m(h)$) величины аппроксимации в равномерной метрике соответствующих классов дважды дифференцируемых функций такими сплайнами на крайних отрезках $[0; h/2]$ и $[A - h/2; A]$ оказываются такими же, как и на всех средних $[(l - 1/2)h; (l + 1/2)h]$ $(l = \overline{1, n-1})$ (см. [5–7]). Отметим еще несколько свойств данного продолжения:

$$S_\varphi(0) = y_0, \quad S_\varphi\Big(\frac{h}{2} - 0\Big) = S_\varphi\Big(\frac{h}{2} + 0\Big), \quad S'_\varphi\Big(\frac{h}{2} - 0\Big) = S'_\varphi\Big(\frac{h}{2} + 0\Big),$$

$$S_\varphi(A) = y_n, \quad S_\varphi\Big(A - \frac{h}{2} - 0\Big) = S_\varphi\Big(\frac{A}{2} - \frac{h}{2} + 0\Big),$$

$$S'_\varphi\Big(A - \frac{h}{2} - 0\Big) = S'_\varphi\Big(A - \frac{h}{2} + 0\Big),$$

т. е. $S_\varphi \in C^1[0; A]$ в силу свойств (0.1) функции φ. Кроме того, нетрудно заметить, что на крайних отрезках $[0; h/2]$ и $[A - h/2; A]$ сплайн $S_\varphi(x)$ зависит только от двух значений функции f (в первом случае от y_0 и y_1, а во втором — от y_{n-1} и y_n). При этом $S_\varphi(0) = y_0 = f(0)$, $S_\varphi(A) = y_n = f(A)$, $S_\varphi(jh) \neq y_j$ $(j = \overline{1, n-1})$. В данном разделе считаем, что последовательность $y = \{y_j\|_{j=0}^n$ удовлетворяет условию

$$\|y\| = \sum_{j=0}^{n} |y_j| \leq 1$$

и пусть

$$\|S_\varphi\|_{[0;A]} = \int_0^A |S_\varphi(x)|\, dx.$$

Интегральной константой Лебега на отрезке $[0; A]$ естественно назвать величину

$$L^*_{\varphi,h} = \sup_{\|y\|\le 1} \|S_\varphi\|_{[0;A]}.$$

Поскольку метод аппроксимации сплайнами $S_\varphi(x)$ функции f на отрезке $[0; A]$ линейный, то величина $L^*_{\varphi,h}$ совпадает с наименьшей константой M^* в неравенстве

$$\|S_\varphi\|_{[0;A]} \le M^* \|y\|.$$

Заметим, что в нашем распоряжении остается выбор нормирующего множителя $m(h)$.

Теорема 2. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям* (0.1), $\varphi(h/2) \ne 0$ *и имеет место равенство*

$$2m(h)\varphi(h) = 1.$$

Для сплайна $S_\varphi(x)$, определенного формулами (0.2), (0.3) *при $x \in [h/2; A-h/2]$, и равенствами* (2.1), (2.2) *на отрезках $[0; h/2]$, $[A-h/2; A]$ соответственно, имеет место равенство*

$$L^*_{\varphi,h} = h.$$

Доказательство. В силу условия теоремы 2 имеем

$$\|S_\varphi\|_{[0;A]} = \int\limits_0^{h/2} |S_\varphi(x)|\,dx + K + \int\limits_{A-h/2}^{A} |S_\varphi(x)|\,dx, \tag{2.3}$$

где

$$\int\limits_0^{h/2} |S_\varphi(x)|\,dx = \int\limits_0^{h/2} \Big| y_0\Big[1 + m(h)\Big(\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big] + y_1 m(h)\Big(\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big|\,dx,$$

$$K = \sum_{l=1}^{n-1} \int\limits_{(l-1/2)h}^{(l+1/2)h} m(h)\Big| y_{l+1}\varphi\Big(x - lh + \frac{h}{2}\Big)$$

$$+\ y_l\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(x-lh+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big] + y_{l-1}\varphi\Big(x-lh-\frac{h}{2}\Big)\Big|\,dx$$

$$= m(h)\sum_{l=1}^{n-1} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big| y_{l+1}\varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) + y_l\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big] + y_{l-1}\varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big|\,dt,$$

$$\int\limits_{A-h/2}^{A} |S_\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{A-h/2}^{A} \Big| y_n\Big(1 + m(h)\Big(\varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big)$$

$$+\ y_{n-1}m(h)\Big(\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big|\,dx$$

$$= \int\limits_0^{h/2} \Big| y_n\Big(1 + m(h)\Big(\varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big)\Big) + y_{n-1}m(h)\Big(\varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big|\,dt. \tag{2.4}$$

Оценим сверху сумму в выражении для K, используя свойства функции φ:

$$K \le m(h)\Bigg[\sum_{l=1}^{n-1}|y_{l+1}|\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt + \sum_{l=1}^{n-1}|y_l|\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big]\,dt + \sum_{l=1}^{n-1}|y_{l-1}|\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt\Bigg]$$

$$= m(h)\sum_{l=2}^{n-2}|y_l|\Bigg[\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt + \int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big]\,dt\Bigg]$$

$$+\ m(h)|y_0|\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt + m(h)|y_1|\Bigg[\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big]\,dt + \int\limits_0^h \varphi(t)\,dt\Bigg]$$

$$+\ m(h)|y_{n-1}|\Bigg[\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[2\varphi(h) - \varphi\Big(t+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\Big]\,dt + \int\limits_0^h \varphi(t)\,dt\Bigg]$$

$$+\ m(h)|y_n|\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n} C_j|y_j|, \tag{2.5}$$

где

$$C_0 = C_n = m(h)\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt, \quad C_1 = C_{n-1} = m(h)\Big(2\varphi(h)h - \int\limits_0^h \varphi(t)\,dt\Big),$$

$$C_j = 2m(h)\varphi(h)h \quad (j = \overline{2, n-2}). \tag{2.6}$$

Из (2.3)–(2.6) с учетом равенства $m(h) = 1/(2\varphi(h))$ и свойств функции φ выводим оценку

$$\|S_\varphi\|_{[0;A]} \le \sum_{j=0}^{n} b_j|y_j|, \tag{2.7}$$

где

$$b_0 = b_n = C_0 + \int\limits_0^{h/2}\left(1 + \frac{\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big)}{2\varphi(h)}\right)dx,$$

$$b_1 = b_{n-1} = C_1 + \frac{1}{2\varphi(h)}\int\limits_0^{h/2}\Big(\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big)\,dx,$$

$$b_j = C_j = 2m(h)\varphi(h)h = h \quad (j = \overline{1, n-2}).$$

Из последних формул снова с учетом свойств (0.1) функции φ получаем неравенства

$$0 < b_0 = b_n \le h,$$

$$0 < b_1 = b_{n-1} \le h - \frac{1}{2\varphi(h)}\Bigg[\int\limits_0^h \varphi(t)\,dt - \int\limits_{h/2}^h \varphi(t)\,dt + \int\limits_0^{h/2} \varphi(t)\,dt\Bigg] \le h.$$

Поэтому из (2.7) для величин $M^* = L^*_{\varphi,h}$ получаем оценку сверху

$$L^*_{\varphi,h} \le h.$$

Доказанное неравенство является точным, поскольку знак равенства в нем реализует любая последовательность $y = \{y_j\}_{j=0}^n$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\|y\| = \sum_{j=0}^{n}|y_j| = 1$, 2) $y_0 = y_1 = y_{n-1} = y_n = 0$, 3) все числа$\{y_j\}_{j=2}^{n-2}$.

Теорема 2 полностью доказана. $\square$

З а м е ч а н и я. 1) Теорема 2 является, по-видимому, первым точным результатом в том числе для классических параболических сплайнов. Напомним, что в этом случае $\varphi(x) = x^2$, $m(h) = 1/(2h^2)$, и равенство $2m(h)\varphi(h) = 1$ выполнено автоматически.

2) Анализ доказательства теоремы 2 позволяет утверждать, что оценку сверху для величины $L^*_{\varphi,h} \le C(h)$ (C — некоторая положительная константа) можно получить и при более слабом ограничении на нормирующий множитель $m(h)$, а именно, при $2m(h)\varphi(h) \le 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
2. **Шевалдин В.Т., Шевалдина О.Я.** Константа Лебега локальных кубических сплайнов с равноотстоящими узлами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 445–451. doi: 10.15372/SJNM20170408 .
3. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Нормы в L периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 108–117.
4. **Guin Shaohui, Liu Yongping.** Asymptotic estimate for the Lebesgue constant of cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation operator // East J. of Approx. 2007. Vol. 13, № 3. P. 331–355.
5. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
6. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.
7. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by local exponential splines // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S147–S157.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 15.02.2018

REFERENCES

1. Shevaldin V.T. *Approximaciya lokalnymi splajnami* [Local approximation by splines]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2014, 198 p. (in Russian).
2. Shevaldin V.T., Shevaldina O.Ya. The Lebesgue constant of local cubic splines with equally-spaced knots. *Siberian J. Num. Math.*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 445–451. doi: 10.15372/SJNM2017040 .
3. Subbotin Yu.N., Telyakovskii S.A. Norms on L periodic interpolation splines with equidistant nodes. *Math. Notes.*, 2003, vol. 74, no. 1, pp. 100–109.
4. Guin Shaohui, Liu Yongping. Asymptotic estimate for the Lebesgue constant of cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation operator. *East J. of Approx.*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 331–355.
5. Subbotin Yu.N. Inheritance of monotonicity and convexity in local approximation. *Comput. Math. Math. Physics*, 1993, vol. 33, no. 7, pp. 879–884.
6. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local trigonometric splines. *Math. Notes*, 2005, vol. 77, no. 3, pp. 326–334.
7. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local exponential splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, Suppl. 1, pp. S147–S157.

The paper was received by the Editorial Office on February 15, 2018.

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr.Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .