ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. А. Шабуров

Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1 u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2 u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, & \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j = 1,2,$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности, и существует единственный вектор l_ε, определяющий оптимальное управление по формуле

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|\right)},$$

где

$$C_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = e^{A_{11}t}B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_\varepsilon(t)B_2, \qquad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$

Основное отличие статьи от предыдущих работ автора заключается в том, что терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных, а управляемая система имеет более общий вид. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида управления можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния l_ε, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

A. A. Shaburov. Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow variables only.

We consider an optimal control problem with a convex integral performance index for a linear system with fast and slow variables in the class of piecewise continuous controls with smooth constraints on the control

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1 u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2 u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, & \end{cases}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, A_{ij} and B_i for $i,j = 1,2$ are constant matrices of corresponding dimension, and the function $\varphi(\cdot)$ is continuously differentiable in $\mathbb{R}^n$, strictly convex, and cofinite in the sense of convex analysis. In the general case, Pontryagin's maximum principle is applied as a necessary and sufficient optimality condition in this problem, and there exists a unique vector l_ε that defines an optimal control by the formula

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|\right)},$$

where

$$C_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = e^{A_{11}t}B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_\varepsilon(t)B_2, \qquad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$

The main difference of this problem from the author's previous papers is that the terminal part of the performance index depends on the slow variables only and the control system has a more general form. It is proved that, in the case of a finite number of points where the type of the control is changed, a power asymptotic expansion can be constructed for the initial vector l_ε of the conjugate system that defines the type of the optimal control.

Keywords: optimal control, singularly perturbed problems, asymptotic expansion, small parameter.

MSC: 49N05, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-280-289

Статья посвящена исследованию асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, гл. 3] и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

В [5; 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7–9]. Отметим, что данный вид управляемой системы, но с терминальным критерием качества был рассмотрен в [8].

В данной работе получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренной ранее является более общий вид управляемой системы.

1. Постановка задачи и основные соотношения

Пусть управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1 u, & t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2 u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, & \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j = 1,2,$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа [10, § 13].

При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ управляемая система из (1.1) имеет вид

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u,$$

где

$$z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0) = z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества J первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T, а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Предположение 1. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т. е. $rank\big(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1}\mathcal{B}_\varepsilon\big) = n + m$.*

Предположение 2. *Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части.*

При выполнении предположения 1 принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение задачи (1.1) [3, п. 3.5, теорема 14].

Непосредственным вычислением получаем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} := \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & \mathcal{W}_\varepsilon(t) \\ 0 & e^{A_{22}t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где

$$\mathcal{W}_\varepsilon(t) = e^{A_{11}t} \int\limits_0^t e^{A_{11}\tau} A_{12} e^{A_{22}\tau/\varepsilon}\, d\tau. \tag{1.3}$$

Тогда, как доказано в [11, утверждение 1 и формулы (2.4), (2.5)], оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ в задаче (1.1) имеет вид

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon\|\right)}, \tag{1.4}$$

$$C_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = e^{A_{11}t}B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_\varepsilon(t)B_2, \qquad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases}, \tag{1.5}$$

а вектор l_ε есть единственное (с учетом кофинитности φ — [10, теорема 26.6]) решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + e^{A_{11}T}x^0 + \mathcal{W}_\varepsilon(T)y^0 + \int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t) l}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t) l\|\right)} dt. \tag{1.6}$$

Здесь φ^* — функция, сопряженная к φ в смысле выпуклого анализа (см. [10, § 12]).

Вырожденной задачей для (1.1) называется задача

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0 x_0 + B_0 u, \qquad t \in [0,T], \qquad \|u\| \leqslant 1, \\ A_0 := A_{11}, \qquad B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \qquad x_0(0) = x^0, \\ J(u) := \varphi(x_0(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\, dt \to \min. \end{cases}$$

Предположение 3. *Пары* (A_0, B_0) *и* (A_{22}, B_2) *вполне управляемы.*

Отметим, что выполнение предположения 3 влечет выполнение предположения 1 [5, Theorem 1].

В [11, Theorem 1] показано, что при выполнении предположений 2 и 3

$$l_\varepsilon \to l_0 \;\text{ при }\; \varepsilon \to +0, \tag{1.7}$$

где l_ε — единственное решение уравнения (1.6), а l_0 — единственное решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + e^{A_0 T}x^0 + \int\limits_0^T \frac{C_0(t)C_0^*(t) l}{S\left(\|C_0^*(t) l\|\right)} dt, \quad C_0(t) := e^{A_0 t}B_0. \tag{1.8}$$

Как показано в [8, формула (3.2)], из (1.3) следует, что равномерно на отрезке $[0,T]$ при $\varepsilon \to 0$ имеет место асимптотическое разложение

$$\mathcal{W}_\varepsilon(t) \sim \varepsilon\, e^{A_{11}t}\Big(-A_{12}A_{22}^{-1}\big(I - e^{A_{22}t/\varepsilon}\big)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(-A_{11})^k A_{22}\Big((-1)^{k+1}A_{22}^{-k-1}\big(I - e^{A_{22}t/\varepsilon}\big) + \sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-k+1}A_{22}^{p-k-1}\frac{1}{p!}\frac{t^p}{\varepsilon^p}e^{A_{22}t/\varepsilon}\Big)\Big). \qquad (1.9)$$

Из формул (1.9), (1.2), (1.5) и (1.8) следует, что справедливы асимптотические формулы

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + e^{A_{11}t}A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t/\varepsilon}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + \big(A_{11}e^{A_{11}t}A_{12}A_{22}^{-1} + \varepsilon^{-1}e^{A_{11}t}A_{12}\big)e^{A_{22}t/\varepsilon}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \qquad (1.11)$$

равномерно на отрезке $[0,T]$.

Отметим известный факт, что при выполнении предположения 2 существуют $\gamma > 0$ и $K > 0$ такие, что

$$\|e^{A_{22}t/\varepsilon}\| \leqslant Ke^{-\gamma t/\varepsilon}. \qquad (1.12)$$

Из формул (1.10), (1.11) и оценки (1.12) следует, что существуют $K_1 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $t \in [\mu,T]$, где $\mu = \varepsilon^p$, $p \in (0,1)$, справедливы неравенства

$$\|C_\varepsilon^*(t) - C_0^*(t)\| \leqslant K_1\varepsilon, \quad \Big\|\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon^*(t) - \frac{d}{dt}C_0^*(t)\Big\| \leqslant K_1\varepsilon. \qquad (1.13)$$

Основная задача, которая ставится для (1.1), есть нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε оптимального управления u, оптимального значения функционала качества J и оптимального процесса $(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))$. Формула (1.4) показывает, что если удастся получить полное асимптотическое разложение вектора l_ε, определяющего оптимальное управление в задаче (1.1), то из него получатся и асимптотические разложения указанных величин.

2. Асимптотическое разложение вектора l_ε

1. Сначала рассмотрим случай, когда у предельной задачи есть только одна точка смены вида оптимального управления.

Пусть для предельной задачи и начального состояния системы x^0 существует единственный момент времени $t = t_0 \in (0,T)$ такой, что

$$\forall\, t < t_0 : \|C_0^*(t)l_0\| > 2;\ \|C_0^*(t_0)l_0\| = 2;\ \forall\, t > t_0 : \|C_0^*(t)l_0\| < 2;\ \frac{d}{dt}\|C_0^*(t)l_0\|^2\Big|_{t=t_0} \neq 0. \qquad (2.1)$$

В этом случае интеграл из (1.8) разбивается на два интеграла

$$\int_0^T \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{S\,(\|C_0^*(t)l\|)}dt = \int_0^{t_0}\frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{\|C_0^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T C_0(t)C_0^*(t)l\,dt.$$

Отметим, что в силу (1.13) и (1.7) при всех $t \in [\mu,T]$, $\mu = \varepsilon^p$, $p \in (0,1)$, величина $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|$ близка к $\|C_0^*(t)l_0\|$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Потребуем выполнения условия

$$\forall\, l_\varepsilon \to l_0\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\ \forall\, t \in [0,\mu] : \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2. \qquad (2.2)$$

Утверждение 1. *Если выполнено условие*

$$\forall\,\tau \geqslant 0:\ \psi(\tau) := \bigl\|\bigl(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*\bigr)l_0\bigr\| \neq 2 \quad \text{и} \quad \psi(0) = \|B_1^* l_0\| > 2, \tag{2.3}$$

то выполнено и условие (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда найдутся последовательности $\{t_k\} \subset [0,\mu]$ и $\{\varepsilon_k\}$ такие, что $\varepsilon_k \to +0$ и

$$\|C_{\varepsilon_k}^*(t_k)l_{\varepsilon_k}\| \leqslant 2. \tag{2.4}$$

Положим $\tau_k := t_k/\varepsilon_k$ и $l_k := l_{\varepsilon_k}$. Тогда $\varepsilon_k, \delta_k = t_k \to 0$ и в силу (1.10)

$$C_{\varepsilon_k}^*(\varepsilon_k\tau_k)l_k = B_0^* e^{A_{11}^*\varepsilon_k\tau_k} l_k + B_2^* e^{A_{22}^*\tau_k}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^* e^{A_{11}^*\varepsilon_k\tau_k} l_k + O(\varepsilon_k), \quad \varepsilon_k \to +0. \tag{2.5}$$

Пусть τ_0 — какая-нибудь предельная точка последовательности $\{\tau_k\}$ (для сокращения записи считаем, что $\tau_k \to \tau_0$). Если $\tau_0 = +\infty$, то, переходя в (2.5) к пределу при $k \to \infty$ и учитывая, что $l_k \to l_0$, получим $C_{\varepsilon_k}^*(\varepsilon_k\tau_k)l_k \to B_0^* l_0$. Но $\|B_0^* l_0\| > 2$ в силу (2.1), что противоречит условию (2.4).

Таким образом, все предельные точки τ_0 конечны. Тогда $\varepsilon_k\tau_n \to 0$, и поэтому

$$C_{\varepsilon_k}^*(\varepsilon_k\tau_k)l_k \to \bigl(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*\bigr)l_0.$$

Отсюда и из (2.3), (2.4) получим, что $\psi(\tau_0) < 2$. В силу (2.3), непрерывности функции ψ и определения B_1 следует существование точки τ_1 такой, что $\psi(\tau_1) = 2$. Но это противоречит условию (2.3).

Утверждение 1 доказано.

Теорема 1. *При выполнении условий* (2.1) *и* (2.2) *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *существует единственная точка* t_ε *смены вида оптимального управления в задаче* (1.1), *т. е.*

$$\forall\, t < t_\varepsilon : \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2; \quad \|C_\varepsilon^*(t_\varepsilon)l_\varepsilon\| = 2; \quad \forall\, t > t_\varepsilon : \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| < 2.$$

При этом $t_\varepsilon \to t_0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что в силу предположения (2.1) существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\forall\, t \in [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] : \frac{d}{dt}\|C_0^*(t)l_0\|^2\Big|_{t=t_0} < 0.$$

В силу (1.7) и (1.13) и того, что $\|C_0^*(t_0-\delta_0)l_0\| > 2$ и $\|C_0^*(t_0+\delta_0)l_0\| < 2$, найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\forall\,\varepsilon \in (0,\varepsilon_1):\ \|C_\varepsilon^*(t_0-\delta_0)l_\varepsilon\| > 2,\ \|C_\varepsilon^*(t_0+\delta_0)l_\varepsilon\| < 2,$$

$$\forall\, t \in [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] : \frac{\partial}{\partial t}\bigl(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|^2\bigr) < 0.$$

Отсюда следует наличие единственной точки $t_\varepsilon \in [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0]$ такой, что $\|C_\varepsilon^*(t_\varepsilon)l_\varepsilon\| = 2$.

Покажем, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_1$) других точек t, удовлетворяющих равенству $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$, не существует.

В силу условия (2.1) существует $\alpha > 0$ такое, что при $t : |t-t_0| \geqslant \delta_0$ выполняется оценка

$$\bigl|\|C_0^*(t)l_0\| - 2\bigr| \geqslant \alpha > 0.$$

Из оценки (1.10) и условия (1.7) следует, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, $t \in [\mu, T]$ и $\|t-t_0\| \geqslant \delta_0$ будет справедливо неравенство $\bigl|\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| - 2\bigr| \geqslant \dfrac{\alpha}{2} > 0$. Тем самым при таких ε и t $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| \neq 2$.

На оставшемся отрезке $[0,\mu]$ соотношение $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| \neq 2$ выполняется в силу условия (2.2). Теорема 1 доказана.

Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл из (1.6) тоже разбивается в сумму двух интегралов

$$\int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l\|\right)}dt = \int\limits_0^{t_\varepsilon} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_\varepsilon}^T C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt. \tag{2.6}$$

Пусть $\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0$, $\Delta t_\varepsilon := t_\varepsilon - t_0$. Тогда

$$\Delta l_\varepsilon = o(1), \quad \Delta t_\varepsilon = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{2.7}$$

и в силу (1.6), (1.8) и теоремы 1 пара Δl_ε и Δt_ε является решением следующей системы уравнений, зависящей от параметра:

$$\begin{cases} 0 = F(\varepsilon,\Delta l,\Delta t) := -\nabla\varphi^*(-l) + \nabla\varphi^*(-l_0) + \mathcal{W}_\varepsilon(T)y^0 + \displaystyle\int\limits_0^{t_\varepsilon} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt \\ \quad + \displaystyle\frac{1}{2}\int\limits_{t_\varepsilon}^T C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l\,dt - \int\limits_0^{t_0} \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{\|C_0^*(t)l\|}dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^T C_0(t)C_0^*(t)l\,dt, \\ 0 = G(\varepsilon,\Delta l,\Delta t) := \|C_\varepsilon^*(t_0+\Delta t)(l_0+\Delta l)\|^2 - \|C_0^*(t_0)l\|^2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Отметим, что функции F и G непрерывны. Рассмотрим их асимптотические разложения относительно бесконечно малых Δl и Δt.

В силу бесконечной дифференцируемости функции φ^*

$$-\nabla\varphi^*(-l_0-\Delta l) + \nabla\varphi^*(-l_0) \sim D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \sum_{k=2}^\infty \Phi_k(\Delta l), \tag{2.9}$$

где $D^2\varphi^*(-l_0)$ — дифференциал второго порядка от φ^* в точке $(-l_0)$, а $\Phi_k(\Delta l)$ — однородные степени k известные функции (многочлены от компонент вектора Δl).

В силу (1.9)

$$\mathcal{W}_\varepsilon(T)y^0 \sim -\varepsilon e^{A_{11}T}A_{12}A_{22}^{-1}y^0 + \sum_{k=2}^\infty \varepsilon^k y_k, \tag{2.10}$$

где y_k — известные векторы.

Каждый интеграл в (2.6) разобьем на две части

$$\int\limits_0^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^T$$

и обозначим интегралы через $I_1(\varepsilon,\Delta l)$, $I_2(\varepsilon,\Delta l,\Delta t)$, $I_3(\varepsilon,\Delta l,\Delta t)$, $I_4(\varepsilon,\Delta l)$ соответственно.

Отметим, что в силу (1.9) асимптотика подынтегральных функций в I_2 — I_4 степенная по ε и компонентам вектора Δl с коэффициентами, гладко зависящими от t.

Для разложения интегралов I_2 и I_3 по Δt надо дополнительно разложить коэффициенты, зависящие от t, в ряд Тейлора в точке t_0 и затем проинтегрировать получившиеся разложения по указанным промежуткам.

Отметим, что слагаемое первого порядка малости по Δt в I_2 имеет вид $\dfrac{C_0(t_0)C_0^*(t_0)l_0}{\|C_0^*(t_0)l_0\|}\Delta t$, а в I_3 $-\dfrac{C_0(t_0)C_0^*(t_0)l_0}{2}\Delta t$. Так как $\|C_0^*(t_0)l_0\| = 2$, то в разложении суммы I_2+I_3 слагаемых первого порядка малости по Δt не будет.

В работе [8, формула (3.19)] методом вспомогательного параметра [12, § 30; 13] найдена асимптотика интеграла $I_1(\varepsilon, \Delta l)$:

$$I_1(\varepsilon,\Delta l)\sim\int\limits_0^{t_0}\frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l\|}dt+\int\limits_0^{t_0}C_0(t)\frac{C_0^*(t)\triangle l\|C_0^*(t)l_0\|^2-\langle C_0^*(t)\triangle l,C_0^*(t)l_0\rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}dt$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}I_{1,k}(\varepsilon,\Delta l), \tag{2.11}$$

где $I_{1,k}(\varepsilon, \Delta l)$ — однородные степени k известные функции.

Таким образом, в силу асимптотических оценок (2.9)–(2.11) асимптотика функции F при $\Delta l, \Delta t \to 0$ имеет вид

$$F(\varepsilon,\Delta l,\Delta t)\sim D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l-\varepsilon e^{A_{11}T}A_{12}A_{22}^{-1}y^0$$
$$+\int\limits_0^{t_0}C_0(t)\frac{C_0^*(t)\triangle l\|C_0^*(t)l_0\|^2-\langle C_0^*(t)\triangle l,C_0^*(t)l_0\rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}dt+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}C_0(t)C_0^*\Delta l dt+\sum_{k=2}^{\infty}F_k(\varepsilon,\Delta l,\Delta t), \tag{2.12}$$

где $F_k(\varepsilon, \Delta l, \Delta t)$ — однородные степени k известные функции.

Обозначим линейную часть по Δl в (2.12) через $\mathcal{F}(\Delta l)$.

Из (1.10) находится асимптотика функции $G(\varepsilon, \Delta l, \Delta t)$ при $\Delta l, \Delta t \to 0$:

$$G(\varepsilon,\Delta l,\Delta t)\sim 2\Big\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l+(C_0^*)'(t_0)l_0\Delta t-\varepsilon B_2^*(A_{22}^*)^{-1}A_{11}^*e^{A_{11}^*t_0}l_0\Big\rangle$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}G_k(\varepsilon,\Delta l,\Delta t),\quad (C_0^*)'(t_0):=\frac{d}{dt}C_0^*(t)\Big|_{t=t_0}, \tag{2.13}$$

где $G_k(\varepsilon, \Delta l, \Delta t)$ — однородные степени k известные функции.

В силу (2.12) и (2.13) система первого приближения для (2.8) распадается на два уравнения

$$\left\{\begin{aligned}&0=\mathcal{F}(\Delta l_1)-\varepsilon e^{A_{11}T}A_{12}A_{22}^{-1}y^0,\\&0=\big\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l_1\big\rangle+\big\langle C_0^*(t_0)l_0,(C_0^*)'(t_0)l_0\big\rangle\Delta t_1\\&\quad-\varepsilon\big\langle C_0^*(t_0)l_0, B_2^*(A_{22}^*)^{-1}A_{11}^*e^{A_{11}^*t_0}l_0\big\rangle.\end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

В силу условий на φ линейный оператор $D^2\varphi^*(-l_0)$ положительный, а в силу неравенства Коши — Буняковского остальные слагаемые в определении линейного оператора $\mathcal{F}$ неотрицательны. Поэтому оператор $\mathcal{F} > 0$, и тем самым из первого уравнения в (2.14) однозначно находится $\Delta l_1 = \varepsilon\mathcal{F}^{-1}\big(e^{A_{11}T}A_{12}A_{22}^{-1}\big)y^0 =: \varepsilon l_1$.

Поскольку в силу (2.1) $\langle C_0^*(t_0)l_0, (C_0^*)'(t_0)l_0\rangle \neq 0$, то из второго уравнения в (2.14) по Δl_1 однозначно находится Δt_1, и оно имеет вид $\Delta t_1 = \varepsilon t_1$.

Далее процесс нахождения следующих членов разложения Δl и Δt продолжается стандартным образом.

Пусть уже построены приближения Δl и Δt до N-го порядка. Тогда величины

$$\Delta l_{N+1}:=\Delta l-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k l_k,\quad \Delta t_{N+1}:=\Delta t-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k t_k \tag{2.15}$$

по построению удовлетворяют соотношениям

$$\left\{\begin{aligned}&\mathcal{F}(\Delta l_{N+1})=O\big(\varepsilon^{N+1}\big)+O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big)+O\big(\|r_{N+1}\|^2\big),\\&\mathcal{G}(\Delta l_{N+1},\Delta t_{N+1}):=\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l_{N+1}\rangle+\langle C_0^*(t_0)l_0,(C_0^*)'(t_0)l_0\rangle\Delta t_{N+1}\\&\qquad\qquad=O\big(\varepsilon^{N+1}\big)+O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big)+O\big(\|r_{N+1}\|^2\big),\end{aligned}\right. \tag{2.16}$$

где $r_{N+1} := \begin{pmatrix} \Delta l_{N+1} \\ \Delta t_{N+1} \end{pmatrix}$.

В силу непрерывной обратимости оператора $\begin{pmatrix} \mathcal{F} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix}$ из (2.16) получим, что

$$r_{N+1} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_{N+1}\|\big) + O\big(\|r_{N+1}\|^2\big). \tag{2.17}$$

Утверждение 2. *Если* $r_\varepsilon = o(1)$ *и* $r_\varepsilon = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|r_\varepsilon\|\big) + O\big(\|r_\varepsilon\|^2\big)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то* $r_\varepsilon = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{\varepsilon_k\} > 0$ такая, что для $r_k := r_{\varepsilon_k}$ справедливо соотношение $\big(\|r_k\|/\varepsilon_k\big) \to +\infty$. Отсюда следует, что $\big(\varepsilon_k/\|r_k\|\big) \to 0$. Но тогда при некотором $K > 0$

$$1 = \left\|\frac{r_k}{\|r_k\|}\right\| \leqslant K\Big(\frac{\varepsilon_k^{N+1}}{\|r_k\|} + \varepsilon_k + \|r_k\|\Big) \to 0,$$

что приводит к противоречию.

Утверждение 2 доказано.

Из соотношений (2.7), (2.15), (2.17) и утверждения 2 следует, что $r_{N+1} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 2 *и* 3, *а также условия* (2.1) *и* (2.3). *Тогда вектор* l_ε *и момент времени* t_ε *раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_\varepsilon \overset{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.18}$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

Случай, когда вместо условия (2.1) выполняется условие

$$\forall\, t < t_0 : \|C_0^*(t)l_0\| < 2;\ \|C_0^*(t_0)l_0\| = 2;\ \forall\, t > t_0 : \|C_0^*(t)l_0\| > 2;\ \frac{d}{dt}\|C_0^*(t)l_0\|^2\bigg|_{t=t_0} \neq 0, \tag{2.19}$$

рассматривается аналогично.

Дополнительное условие (2.3) заменяется на условие

$$\forall\, \tau \geqslant 0\ \psi(\tau) \neq 2 \ \text{ и } \ \psi(0) < 2, \tag{2.20}$$

где функция ψ определена в (2.3).

В этом случае справедлив аналог теоремы 1 (с естественной заменой знаков неравенств). При этом линейный оператор $\mathcal{F}$ будет строго положительным и иметь вид

$$\mathcal{F}(\Delta l) = D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0} C_0(t)C_0^*\Delta l\, dt$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{T} C_0(t)\frac{C_0^*(t)\triangle l\|C_0^*(t)l_0\|^2 - \langle C_0^*(t)\triangle l, C_0^*(t)l_0\rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}dt.$$

При выполнении предположений 2, 3, условий (2.19) и (2.20) величины l_ε и t_ε будут раскладываться в асимптотические ряды вида (2.18).

2. В общем случае в предположении, что существует конечное число точек $\{t_1, t_2, \ldots, t_p\} \subset (0,T)$ таких, что

$$\forall t \in [0,T] \setminus \{t_i\}_{i=1}^{p} : \|C_0^*(t)l_0\| \neq 2;\ \|C_0^*(t_i)l_0\|^2 = 4;\ \frac{d}{dt}\|C_0^*(t_i)l_0\|^2\bigg|_{t=t_i} \neq 0, \tag{2.21}$$

дополнительное условие (2.3) заменяется на

$$\forall\, \tau \geqslant 0:\ \psi(\tau) \neq 2 \text{ и } (\|C_0^* l_0\| - 2)(\psi(0) - 2) > 0. \tag{2.22}$$

В этом случае аналог теоремы 1 имеет следующий вид

Теорема 3. *При выполнении условий* (2.21) *и* (2.22) *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существуют точки* $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \ldots, t_{p,\varepsilon}\} \subset (0,T)$ *смены вида оптимального управления в задаче* (1.1). *Других точек смены вида управления нет, и* $t_{i,\varepsilon} \to t_i$ *при* $\varepsilon \to 0$ *для любого* $i = 1, \ldots, p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что в этом случае система уравнений, аналогичная системе (2.8), будет содержать вместо одного скалярного уравнения $0 = G$ набор из p уравнений $0 = G_p$, соответствующий точкам $t_{i,\varepsilon}$, и неизвестными величинами будут Δl и $\Delta_i t$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Аналогично доказательству теоремы 2 доказывается следующая, итоговая, теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* 2 *и* 3, *а также условия* (2.21) *и* (2.22). *Тогда вектор* l_ε *и моменты времени* $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \ldots, t_{p,\varepsilon}\}$ *раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \overset{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad i = 1, \ldots, p, \quad \varepsilon \to 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

Автор выражает благодарность Алексею Руфимовичу Данилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. Сер. Мат. анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
6. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
7. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
8. **Данилин А.Р., Парышева Ю. В.** Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.
9. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614. doi: 10.7868/S086956521325004X.
10. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.

11. **Shaburov A.A.** Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem in $\mathbb{R}^n$ with a convex integral quality index // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 1. P. 65–75. doi: 10.15826/umj.2017.1.005 .
12. **Ильин А. М., Данилин А. Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
13. **Данилин А. Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, №12. С. 2166–2177.

Шабуров Александр Александрович
аспирант
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: alexandershaburov@mail.ru

Поступила 19.11.2017

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy.* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
4. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 34, no. 3, pp. 1579–1629. doi: 10.1007/BF01262406 .
5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
6. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems*, Berlin; Heidelberg; N Y; Tokio: Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated to Russian under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 156 p.
7. Kalinin A.I., Semenov K.V. Asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with multidimensional control. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 3, pp. 407–417.
8. Danilin A.R., Parysheva Yu.V. Asymptotics of the optimal cost functional in a linear optimal control problem *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 478–481. doi: 10.1134/S1064562409040073 .
9. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi: 10.1134/S1064562413040364 .
10. Rockafellar R. *Convex analysis.* Princeton, Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow: Mir Publ., 1973, 470 p.
11. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem in $\mathbb{R}^n$ with a convex integral quality index. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 65–75. doi: 10.15826/umj.2017.1.005 .
12. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize.* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3 .
13. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062 .

The paper was received by the Editorial Office on November 19, 2017.

Aleksandr Aleksandrovich Shaburov, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexandershaburov@mail.ru .