

УДК 519.642.5

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕСТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА
В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ¹****А. С. Апарцин, И. В. Сидлер**

Важным элементом интегральных моделей развивающихся систем являются уравнения Вольтерра I рода, описывающие баланс между требуемым уровнем развития системы и возможностью его достижения совокупностью элементов системы, принадлежащих различным возрастным группам. Оказывается, при некоторых соотношениях между коэффициентами эффективности функционирования таких элементов (ядрами соответствующих интегральных операторов) решение балансового уравнения неизбежно с течением времени становится неустойчивым. Специфику этого феномена позволяют понять простейшие тестовые уравнения. В данной работе такие уравнения, введенные ранее для случая двух возрастных групп, обобщены и исследованы применительно к трем возрастным группам элементов. Основным теоретическим результатом статьи, сформулированным в теореме 2, является мажорантная оценка такого узла любого метода квадратур численного решения тестового уравнения, в котором погрешность сеточного решения впервые превысит заданный сколь угодно большой порог при вычислениях на компьютере с фиксированной погрешностью округлений. Этот результат проиллюстрирован расчетами модельных примеров с помощью модифицированных методов левых и средних прямоугольников. Разработанная техника может быть естественным путем обобщена и на случай произвольного числа возрастных групп.

Ключевые слова: развивающаяся система, три возрастные группы, тестовое уравнение Вольтерра I рода, численное решение, неустойчивость.

A. S. Apartsyn, I. V. Sidler. Study of test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems.

Volterra equations of the first kind are an important element of integral models of developing systems. They describe the balance between the required level of system development and the possibility of achieving this level by a set of elements of the system belonging to different age groups. The solution to the balance equation, which is continuous on any finite time interval, inevitably becomes unstable over time for some relations between the efficiency coefficients of the elements (kernels of the corresponding operators). The simplest test equations allow us to understand the specifics of this phenomenon. Such equations were introduced earlier for the case of two age groups, and we generalize them to the case of three age groups of elements and investigate the obtained equations. The main theoretical result, formulated in Theorem 2, is a majorant estimate for a grid node of any quadrature method for the numerical solution of a test equation where the error of the grid solution exceeds for the first time a given arbitrarily large threshold in the case of using a computer with a fixed rounding error. The result is illustrated by calculations for model examples with the use of modified methods of left and middle rectangle. The developed technique can be naturally extended to the case of an arbitrary number of age groups.

Keywords: developing system, three age groups, test Volterra equation of the first kind, numerical solution, instability.

MSC: 45D05, 65R20

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33

Введение

Интегральный оператор Вольтерра с двумя переменными пределами интегрирования является “визитной карточкой” интегральных моделей развивающихся систем, введенных В. М. Глушковым в основополагающей работе [1] на примере двухсекторной макроэкономической системы. В простейшем односекторном варианте, когда в системе отсутствует специальная подсистема развития, модель В. М. Глушкова включает балансовое интегральное урав-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-01425) и в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект АААА-А17-117030310446-6).

нение Вольтерра I рода

$$\int_{a(t)}^t K(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

где $x(s)$ — количество элементов системы, возраст которых в момент времени t равен $t - s$, $K(t, s)$ — коэффициент эффективности функционирования в момент t элементов $x(s)$, $a(t)$ — неубывающая функция, отражающая динамику замены устаревших элементов системы новыми, $y(t)$ — интегральный показатель уровня развития системы.

Интегральные модели типа модели В. М. Глушкова получили всестороннее развитие и нашли обширную область приложений (см. [2–4], там же дальнейшие ссылки).

Специфику (0.1) во многом определяет значение нижнего предела в точке $t = 0$. Если $a(0) < 0$, то это означает, что к моменту времени $t = 0$ система уже имела некоторую предысторию

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [a(0), 0], \quad (0.2)$$

при этом $y(0) = \int_{a(0)}^0 K(0, s)x^0(s)ds$ и задание предыстории (0.2) необходимо для корректной постановки задачи решения (0.1). Именно этот случай типичен для приложений моделей В. М. Глушкова, рассмотренных в [2–4]. Если же моменту $t = 0$ соответствует время возникновения моделируемой системы, то предыстория отсутствует, $a(0) = 0$ и $y(0) = 0$.

Теория уравнений типа (0.1) и численные методы их решения детально исследованы в [5].

Если систему образуют элементы, принадлежащие n возрастным группам G_i , $i = \overline{1, n}$, так что $x(s) \in G_i$ при $t - s \in [t - a_{i-1}(t), t - a_i(t)]$, $t > 0$,

$$a_0(t) \equiv t > a_1(t) > \dots > a_n(t) \geq 0 \quad \forall t > 0,$$

то естественно рассмотреть в качестве обобщения (0.1) уравнение

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (0.3)$$

И вновь принципиальную роль играют значения $a_i(0)$. Случай $a_i(0) < 0$, $i = \overline{1, n}$, предполагает задание предыстории

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [a_n(0), 0].$$

В частности, при $a_i(t) = t - T_i$, $0 < T_1 < \dots < T_n$,

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-T_n, 0].$$

Этот случай для $n = 3$ рассмотрен в работе [6], в которой исследовано уравнение Вольтерра II рода (в (0.3) $y(t) = x(t)$), являющееся математической моделью многих физических, биологических и других систем и объектов. В [7; 8] уравнение (0.3) с $n = 3$ и $a_i(t) = t - T_i$ положено в основу построения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы России на период с 2010 по 2050 г., а в качестве $y(t)$ принималась суммарная располагаемая мощность электростанций.

Пусть теперь $a_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$a_0(t) \equiv t > a_1(t) > \dots > a_n(t) \geq 0 \quad \forall t > 0; \quad a_i(0) = 0, \quad a'_i(t) \geq 0, \quad a'_i(0) < 1. \quad (0.4)$$

В настоящее время теория уравнений типа (0.3) с условиями (0.4) при $n \geq 2$ еще только создается. Для понимания их специфики весьма полезны простейшие тестовые уравнения.

Достаточно просто исследуется при любом n случай постоянных ядер: $K_i = \beta_i = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$, $\beta_1 = 1$. Пусть $a_i(t) = \alpha_i t$, $1 = \alpha_0 > \alpha_1 \dots > \alpha_n = 0$. Тогда (0.3) имеет вид

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.5)$$

где $y(t) \in \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$, т. е. $y'(t) \in C_{[0, T]}$, $y(0) = 0$.

Если представить (0.5) в операторной форме

$$(V_1 + \Delta V_1)x = y, \quad (0.6)$$

где $V_1 x = \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds$ — главная, обратимая часть (0.6), а $\Delta V_1 x = \sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s) ds$, то прямым следствием известной теоремы функционального анализа (см., например, [9, с. 212]) об ограниченности обратного к линейному ограниченному оператору $V_1 + \Delta V_1$, действующему на паре банаховых пространств (B_1, B_2) (в нашем случае $B_1 = C_{[0, T]}$, $B_2 = \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$), при условии ограниченности V_1^{-1} является оценка [10]

$$\sum_{i=2}^n |\beta_{i-1} - \beta_i| \alpha_{i-1} < 1. \quad (0.7)$$

Переход дифференцированием от (0.5) к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \sum_{i=2}^n (\beta_{i-1} - \beta_i) \alpha_{i-1} x(\alpha_{i-1} t) + y'(t), \quad t \in [0, T],$$

показывает, что неравенство (0.7) обеспечивает свойство сжатия оператора

$$Wx = \sum_{i=2}^n W_i x \equiv \sum_{i=2}^n (\beta_{i-1} - \beta_i) \alpha_{i-1} x(\alpha_{i-1} t), \quad t \in [0, T], \quad (0.8)$$

действующего в $C_{[0, T]}$, а перестановочность операторов W_i позволяет получить как общую формулу обращения (0.8), так и ее интересные частные случаи [10; 11]. Важно подчеркнуть, что в случае постоянных ядер свойства оператора W , а следовательно и решения уравнения (0.5), целиком определяются параметрами α_i , β_i и не зависят от того, на каком временном промежутке $[0, T]$ рассматривается уравнение (0.5).

В случае переменных ядер ситуация принципиально иная уже для $n = 2$. В [12] рассмотрено тестовое уравнение

$$\int_{\alpha t}^t x(s) ds + \int_0^{\alpha t} (1 - \delta s) x(s) ds = t - \frac{\alpha^2 \delta}{2} t^2, \quad t \in [0, T], \quad (0.9)$$

точное решение которого, а также эквивалентного функционального уравнения

$$x(t) = \alpha^2 \delta t x(\alpha t) + 1 - \alpha^2 \delta t, \quad t \in [0, T], \quad (0.10)$$

$\bar{x}(t) = 1$ для любого $T < \infty$. Оператор в (0.10) является сжимающим лишь при $t < T^* = 1/\alpha^2 |\delta|$, а следовательно, устойчивость приближенного (численного) решения (0.10) ((0.9)) гарантирована лишь при $T < T^*$. Однако для изучения процессов старения элементов развивающейся системы и замены их новыми важно рассматривать отрезок $[0, T]$ моделирования

системы достаточно большим, так что $T > T^*$. Идея исследования механизма возникновения неустойчивости численного решения (0.9) в области $t > T^*$ базируется на том, что его погрешность заведомо не меньше, чем погрешность точного решения $\tilde{x}(t)$ функционального уравнения

$$x(t) = \alpha^2 \delta t x(\alpha t) + 1 - \alpha^2 \delta t, \quad t \geq T^*,$$

если стартовое значение $\tilde{x}(T^*)$ совпадает с сеточным решением в точке T^* $x^h(T^*)$.

Пусть $\tilde{\varepsilon}(t) = |\bar{x}(t) - \tilde{x}(t)|$, $t > T^*$, и $T_i = T^* \alpha^{-i}$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда, как установлено в [12], справедливо равенство

$$\tilde{\varepsilon}(T_i) = \alpha^{-\frac{i^2+i}{2}} \tilde{\varepsilon}(T^*), \quad \tilde{\varepsilon}(T^*) \neq 0. \quad (0.11)$$

Именно на основе (0.11) в [12] доказана теорема, которую удобно сформулировать в наших обозначениях следующим образом.

Теорема 1 [12, теорема 1]. Пусть M — любое сколь угодно большое наперед заданное число. Тогда найдется такое $t = T_M \leq \bar{T}_M$, где $\bar{T}_M = \frac{1}{|\delta| \alpha^{2+\bar{i}_M}}$,

$$\bar{i}_M = \left\lceil -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2 \log(M/\tilde{\varepsilon}(T^*))}{\log \alpha}} \right\rceil \quad (0.12)$$

($\lceil \cdot \rceil$ — ближайшее целое справа), что $\tilde{\varepsilon}(T_M) = |\bar{x}(T_M) - \tilde{x}(T_M)| \geq M$.

Допустим теперь, что численное решение (0.9) получено на компьютере с погрешностью округления ε^* . Положим в (0.12) $\tilde{\varepsilon}(T^*) = \varepsilon^*$.

Следствием теоремы 1 является тот факт, что для данных α , δ и M никакой численный метод не может дать в точке $t = T_M$ погрешность численного решения интегрального уравнения (0.9), меньшую M .

Эти результаты обобщены в [13] в различных направлениях. Показано, что утверждение теоремы 1 справедливо при любой $y(t)$, принадлежащей области значений интегрального оператора левой части (0.9). Рассмотрен случай сверхлинейного роста модуля второго ядра в (0.9). Приведены численные результаты для модельных примеров, иллюстрирующие полное соответствие численных расчетов теоретическим оценкам.

Цель данной статьи — рассмотреть тестовое уравнение, аналогичное (0.9), для случая $n = 3$.

1. Исследование тестового уравнения для $n = 3$

Введем тестовое уравнение

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} (1 - \delta_1 s) x(s) ds + \int_0^{\alpha_2 t} (1 - \delta_2 s) x(s) ds = y(t); \quad (1.1)$$

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0; \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \quad t \in [0, T].$$

Поскольку при $\delta_2 = \delta_1$ (1.1) совпадает с (0.9), то уравнение (1.1) является естественным обобщением (0.9) на случай $n = 3$. Ниже для определенности будем предполагать $\delta_2 > \delta_1$.

Полагая $y(t) \in \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$, выпишем для (1.1) эквивалентное функциональное уравнение:

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t x(\alpha_1 t) + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) t x(\alpha_2 t) + y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

В операторной форме (1.2) имеет вид

$$x(t) = Wx(t) + y'(t) \equiv W_1 x(t) + W_2 x(t) + y'(t), \quad t \in [0, T],$$

где $W_1x(t) = \alpha_1^2\delta_1t x(\alpha_1t)$, $W_2x(t) = \alpha_2^2(\delta_2 - \delta_1)t x(\alpha_2t)$. При

$$T < T^* = \frac{1}{\alpha_1^2\delta_1 + \alpha_2^2(\delta_2 - \delta_1)}$$

оператор W , рассматриваемый действующим из $C_{[0,T]}$ в $C_{[0,T]}$, является сжимающим. Пусть $T > T^*$. Для исследования характера неустойчивости при $t > T^*$ решения $\tilde{x}(t)$ уравнения

$$x(t) = Wx(t) + y'(t), \quad t \geq T^*,$$

выпишем однородное уравнение относительно ошибки $\tilde{\varepsilon}(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2\delta_1t\tilde{\varepsilon}(\alpha_1t) + \alpha_2^2(\delta_2 - \delta_1)t\tilde{\varepsilon}(\alpha_2t), \quad t \geq T^*, \quad (1.3)$$

с начальными условиями $\tilde{\varepsilon}(\alpha_1T^*) \cup \tilde{\varepsilon}(\alpha_2T^*) \neq 0$ и положим в (1.3) $t = T_i = T^*/\alpha_1^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Если

$$\text{sign } \tilde{\varepsilon}(\alpha_1T^*) = \text{sign } \tilde{\varepsilon}(\alpha_2T^*), \quad (1.4)$$

то переход в (1.3) при $t = T_i$ к оценке по модулю дает

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2\delta_1T_i |\tilde{\varepsilon}(\alpha_1T_i)| + \alpha_2^2(\delta_2 - \delta_1)T_i |\tilde{\varepsilon}(\alpha_2T_i)|, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

При $n = 2$ ключевым для оценивания $\tilde{\varepsilon}(T_i)$ являлось равенство (0.11). В случае $n = 3$ аналогичную формулу получить не удастся.

Предположим дополнительно, что

$$\alpha_2 = \alpha_1^2. \quad (1.6)$$

Тогда $\alpha_1T_i = T_{i-1}$, $\alpha_2T_i = T_{i-2}$ и (1.5) переходит в линейное разностное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2\delta_1T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})| + \alpha_1^4(\delta_2 - \delta_1)T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-2})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

с начальными данными

$$|\tilde{\varepsilon}(T_{-2})| = |\tilde{\varepsilon}(\alpha_1^2T^*)|, \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{-1})| = |\tilde{\varepsilon}(\alpha_1T^*)|,$$

причем с ростом i экспоненциальный рост коэффициентов в (1.7) гарантирует существование такого $i = i_M^*$, для которого

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| < M, \quad i = \overline{0, i_M^* - 1}; \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{i_M^*})| \geq M,$$

каково бы ни было сколь угодно большое $M < \infty$.

Допустим теперь, что для численного решения (1.1) применен какой-либо сходящийся на $[0, T^*]$ метод квадратур, погрешность которого в точках α_iT^* равна $\varepsilon^h(\alpha_iT^*)$, $i = 1, 2$ (h — шаг сетки). Положим стартовые значения для рекурсии (1.7)

$$|\tilde{\varepsilon}(\alpha_iT^*)| = |\varepsilon^h(\alpha_iT^*)|, \quad i = 1, 2; \quad \varepsilon^h(\alpha_1T^*) \cup \varepsilon^h(\alpha_2T^*) \neq 0, \quad (1.8)$$

и введем в обозначении T_i дополнительный индекс h , тогда под $T_{i_M^*}^h$ будем понимать такую точку временной оси, для которой

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i^h)| < M, \quad i = \overline{0, i_M^* - 1}; \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{i_M^*}^h)| \geq M.$$

В силу погрешности аппроксимации интеграла квадратурой, а также неизбежной погрешности вычислений (округлений) найдется такой номер k_M^* узла $T_{k_M^*}^h$ равномерной сетки, что

$$|\varepsilon_k^h| = |\bar{x}(T_k^h) - x_k^h| < M, \quad k = \overline{0, k_M^* - 1}; \quad |\varepsilon_{k_M^*}^h| \geq M, \quad (1.9)$$

(x_k^h — сеточное решение уравнения (1.1) в k -м узле) и при этом

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*}^h. \quad (1.10)$$

Полученный результат суммирует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть стартовые значения для рекурсии (1.7) удовлетворяют условиям (1.4), (1.8) и выполнено равенство (1.6). Пусть M — сколь угодно большое наперед заданное число. Тогда для любого сходящегося на $[0, T^*)$ численного метода решения тестового уравнения (1.1) найдется такой номер k_M^* узла $T_{k_M^*}^h$ равномерной сетки, что выполнены неравенства (1.9), (1.10).

Из теоремы 2 вытекает важное

Следствие. Для любого метода квадратур численного решения (1.1), реализуемого на компьютере с погрешностью округления ε^* , и заданного порога $M < \infty$ справедлива априорная оценка

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*} \quad \forall h \in (0, \alpha_2 T^*],$$

если положить $\tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T^*) = \tilde{\varepsilon}(\alpha_2 T^*) = \varepsilon^*$.

З а м е ч а н и е 1. Если погрешность аппроксимации интеграла квадратурой равна нулю, то ситуация принципиально не меняется в том смысле, что, хотя k_M^* при этом существенно возрастает, мажорантная оценка (1.10) по-прежнему верна.

З а м е ч а н и е 2. Условие неравенства нулю в (1.8) заведомо выполняется с учетом влияния погрешностей вычислений (округлений).

З а м е ч а н и е 3. Результаты теоремы 2, разумеется, справедливы с точностью до обозначений и для случая $n = 2$.

В следующем разделе приводятся результаты численных экспериментов.

2. Численные результаты

Вопросам приближенного решения классических вольтерровых интегральных уравнений посвящены многочисленные публикации. В ряду капитальных монографий по данной тематике особо отметим [14; 15], в которых детально изложены основные идеи современных подходов, методов, алгоритмов и приведена обширная библиография. В недавно вышедшей монографии [16], посвященной направлениям теоретических исследований последних лет, отмечены и публикации, касающиеся уравнений вида (0.3) и их приложений.

Применение квадратурных методов, разработанных для стандартных уравнений Вольтерра, к уравнению (0.3) осложнено тем, что в силу переменности как верхних, так и нижних пределов интегрирования в (0.3) требуется находить численное решение в точках, не совпадающих с узлами базовой квадратуры. В работах [17; 18] предложены модификации методов левых и средних прямоугольников соответственно (обозначаемые далее как ммлп и ммсп), свободные от этого недостатка и основанные на предварительном преобразовании исходного уравнения к эквивалентному, у которого переменными являются лишь верхние пределы интегрирования. Их программная реализация и использована для получения приводимых ниже численных результатов.

Пусть точным решением тестового уравнения (1.1) является $\bar{x}(t) = 1$, так что правая часть (1.1) $y(t) = t + \frac{1}{2}(\alpha_2^2(\delta_1 - \delta_2) - \alpha_1^2\delta_1)t^2$. Зададим $\delta_1 = 100$, $\delta_2 = 200$ (большие значения δ_1 , δ_2 позволяют сократить время счета). Численные расчеты с помощью ммлп для различных пар α_1 , α_2 и M приведены в табл. 1. Видно, что результаты вычислений находятся в полном согласии с теоремой 2: сравнение колонок 7 с 8, 9 с 10, 11 с 12 показывает справедливость неравенства (1.10).

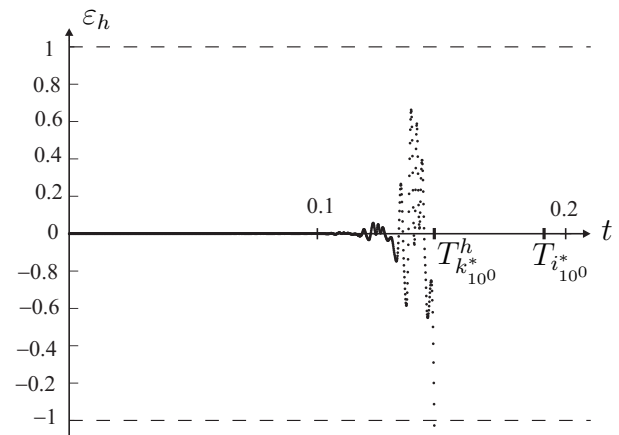
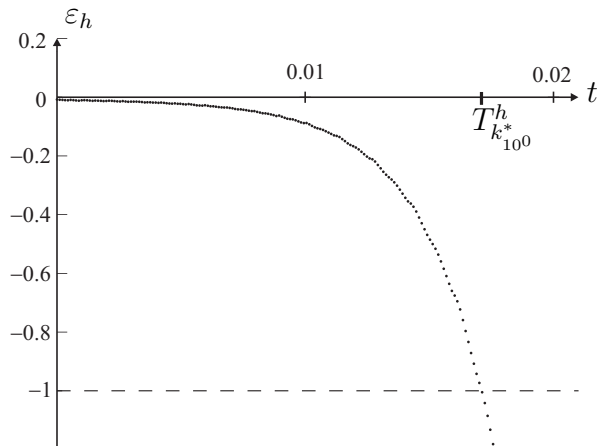
В табл. 2 приведены результаты расчетов для ммсп. Если для ммлп, как видно из табл. 1, с уменьшением шага h значение $T_{k_M^*}^h$ увеличивается за счет уменьшения влияния на точность численного решения погрешности аппроксимации интеграла квадратурой, то в случае применения ммсп погрешность аппроксимации равна нулю при любом шаге $h \in (0, \alpha_2 T^*]$, поэтому в табл. 2 приведены результаты лишь для максимального допустимого шага, который требует

Т а б л и ц а 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	α_2	T^*	h	$\varepsilon^h(\alpha_2 T^*)$	$\varepsilon^h(\alpha_1 T^*)$	$T_{k^*10^0}^h$	$T_{i^*10^0}^h$	$T_{k^*10^1}^h$	$T_{i^*10^1}^h$	$T_{k^*10^2}^h$	$T_{i^*10^2}^h$
1/2	1/4	0.03200	0.00800	-0.37500	-0.37500	0.0480	0.1280	0.1760	0.2560	0.3680	0.5120
			0.00400	-0.15000	-0.14125	0.0800	0.1280	0.2080	0.5120	0.4160	0.5120
			0.00200	-0.04906	-0.05744	0.0940	0.2560	0.2400	0.5120	0.4640	1.0240
2/3	4/9	0.01558	0.00389	-0.34530	-0.41075	0.0273	0.0351	0.0701	0.0789	0.1168	0.1183
			0.00097	-0.11001	-0.10919	0.0467	0.0526	0.0886	0.1183	0.1441	0.1774
			0.00024	-0.02322	-0.02642	0.0657	0.0786	0.1193	0.1774	0.1818	0.2662
3/4	9/16	0.01138	0.00284	-0.40637	-0.40637	0.0199	0.0270	0.0398	0.0480	0.0682	0.0852
			0.00071	-0.07577	-0.09453	0.0299	0.0360	0.0526	0.0639	0.0796	0.1136
			0.00018	-0.02068	-0.03166	0.0418	0.0639	0.0676	0.0852	0.0981	0.1136
8/9	64/81	0.00707	0.00044	-0.10914	-0.13315	0.0133	0.0161	0.0199	0.0230	0.0270	0.0291
			0.00022	-0.05697	-0.06336	0.0153	0.0181	0.0219	0.0258	0.0285	0.0327
			0.00011	-0.02761	-0.03085	0.0171	0.0204	0.0236	0.0258	0.0305	0.0327

Т а б л и ц а 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	α_2	T^*	h	$\varepsilon^h(\alpha_2 T^*)$	$\varepsilon^h(\alpha_1 T^*)$	$T_{k^*10^0}^h$	$T_{i^*10^0}^h$	$T_{k^*10^1}^h$	$T_{i^*10^1}^h$	$T_{k^*10^2}^h$	$T_{i^*10^2}^h$
1/2	1/4	0.03200	0.02133	$1 \cdot 10^{-16}$	$1 \cdot 10^{-16}$	30.603	65.536	38.517	65.536	44.725	65.536
2/3	4/9	0.01558	0.01039	$-3 \cdot 10^{-16}$	$-3 \cdot 10^{-16}$	3.702	4.547	4.356	4.547	5.333	6.821
3/4	9/16	0.01138	0.00759	$1 \cdot 10^{-16}$	$1 \cdot 10^{-16}$	1.354	1.514	1.635	2.018	1.801	2.018
8/9	64/81	0.00707	0.00202	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$	0.1606	0.1913	0.1768	0.2152	0.1949	0.2421



Погрешность численного решения уравнения (1.1) модифицированными методами левых (левый график) и средних прямоугольников ($\alpha_1 = 8/9$, $\alpha_2 = 64/81$, $\delta_1 = 10^2$, $\delta_2 = 2 \cdot 10^2$, $M = 10^0$, $T^* = 0.00707$, $h = 0.00011$).

минимального количества арифметических операций, а значит минимизирует вклад погрешности округлений.

В целом применение ммпс позволяет увеличить на порядок длину коридора погрешности численного решения, не превышающей заданный порог M . Характер неустойчивости численного решения (1.1) иллюстрирует рисунок выше. Вычисления производились на компьютере с двойной точностью, так что $\varepsilon^* = 10^{-16}$.

Заключение

Таким образом, в работе введено и исследовано тестовое уравнение (1.1), отражающее специфику уравнения Вольтерра I рода вида (0.3) с условиями (0.4), когда элементы развивающейся системы принадлежат трем возрастным группам ($n = 3$). Установлено, что при опережающем росте модуля коэффициента эффективности элементов средней и (или) старшей возрастной группы по сравнению с коэффициентом эффективности молодых элементов системы с течением времени система неизбежно теряет устойчивость к возмущениям стартовых значений (1.8).

Получена мажорантная оценка границы временного промежутка, в которой погрешность любого численного метода решения тестового уравнения (1.1) при вычислениях на компьютере с фиксированной погрешностью округлений впервые превысит сколь угодно большой наперед заданный порог.

Разработанная техника исследования тестовых уравнений может быть обобщена на случай произвольного натурального n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. 1977. № 2. С. 3–6.
2. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.
3. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев: Наук. думка, 1991. 218 с.
4. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Applied mathematical modelling of engineering problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. 308 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9160-7.
5. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
6. Messina E., Russo E., Vecchio A. A stable numerical method for Volterra integral equations with discontinuous kernel // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337, iss 2. P. 1383–1393. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.04.059.
7. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3–16.
8. Интегральные модели для разработки стратегии технического перевооружения генерирующих мощностей / А.С. Апарцин, Е.В. Маркова, И.В. Сидлер, В.В. Труфанов // Электричество. 2017. № 3. С. 4–11. doi: 10.24160/0013-5380-2017-3-4-11.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 752 с.
10. Апарцин А.С. К теории интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 5. С. 824–839. doi: 10.7868/s0044466916050069.
11. Апарцин А.С. Формулы обращения и их конечномерные аналоги для некоторых классов уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами [Электр. ресурс] // Тр. Междунар. конф. “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015” (Новосибирск, 19–23.10.2015). Новосибирск: Абвей, 2015. 1 электрон. опт. диск. С. 62–69.
12. Апарцин А.С. К исследованию устойчивости решений тестовых неклассических уравнений Вольтерра I рода // Сиб. электр. мат. изв.. 2015. Т. 12, № S. С. 15–20. doi: 10.17377/semi.2015.12.089.
13. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О тестовых уравнениях Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 4. С. 31–45.
14. Brunner H., Van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations. CWI Monographs, Vol. 3. North-Holland, Amsterdam, 1986. 588 p. ISBN: 0-444-70073-0.
15. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 597 p. doi: 10.1017/CBO9780511543234.
16. Brunner H. Volterra integral equations: An introduction to theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 387 p. doi: 10.1017/9781316162491.

17. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Сб. тр. Междунар. симп. “Обобщенные постановки и решения задач управления”. М.: АНО “Изд-во физ.-мат. литературы”, 2014. С. 21–25.
18. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О численном решении неклассических уравнений Вольтерра I рода // Сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. “Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем”. Пенза: Педагог. гос. ун-т, 2014. С. 59–64.

Апарцин Анатолий Соломонович

Поступила 10.12.2017

д-р физ.-мат. наук

главный науч. сотрудник

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,

г. Иркутск

e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Сидлер Инна Владимировна

канд. технич. наук

старший науч. сотрудник

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,

г. Иркутск

e-mail: inna.sidler@mail.ru

REFERENCES

1. Glushkov V.M. On a class of dynamic macroeconomic models. *Upr. Sist. Mash.*, 1977, no. 2, pp. 3–6 (in Russian).
2. Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem* [Modeling of developing systems]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 350 p.
3. Yatsenko Yu.P. *Integral'nye modeli sistem s upravlyaemoi pamyat'yu* [Integral models of systems with controllable memory]. Kiev: Naukova Dumka, 1991, 219 p. ISBN: 5-12-002367-3.
4. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Applied mathematical modelling of engineering problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003, 308 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9160-7.
5. Apartsyn A.S. *Nonclassical linear Volterra equations of the first kind*. Utrecht-Boston: VSP, 2003, 168 p. doi: 10.1515/9783110944976.
6. Messina E., Russo E., Vecchio A. A stable numerical method for Volterra integral equations with discontinuous kernel. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 337, no. 2, pp. 1383–1393. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.04.059.
7. Apartsin A.S., Sidler I.V. Using the nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 6, pp. 899–910. doi: 10.1134/S0005117913060015.
8. Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V., Trufanov V.V. Integrated models for the development of technical modernization of generating capacities strategy. *Elektrichestvo*, 2017, no. 3, pp. 4–11 (in Russian). doi: 10.24160/0013-5380-2017-3-4-11.
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis*. Oxford: Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251. Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*. Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p.
10. Apartsin A.S. To the theory of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 5, pp. 810–825. doi: 10.1134/S0965542516050067.
11. Apartsyn A.S. The inversion formulas and their finite-dimensional analogs for certain classes of Volterra equations of the first kind with discontinuous kernels. *Proc. Int. Conf. “Actual Problems of Computational and Applied Mathematics – 2015”*, Novosibirsk, 19–23.10.2015. Novosibirsk: Abvei, 2015, 1 elektron. opt. disk, pp. 62–69 (in Russian). ISBN: 978-5-9905347-2-8.
12. Apartsyn A.S. To study the stability of solutions of test nonclassical Volterra equations of the first kind. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2015, vol. 12, no. S, pp. 15–20 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2015.12.089.
13. Apartsin A.S., Sidler I.V. On the test Volterra equations of the first kind in the integral models of developing systems. *Autom. Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 4, pp. 604–616. doi: 10.1134/S0005117918040033.

14. Brunner H., Van der Houwen P.J. *The Numerical Solution of Volterra Equations*. CWI Monographs, vol. 3. Amsterdam: North-Holland, 1986, 588 p. ISBN: 0-444-70073-0.
15. Brunner H. *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 597 p. doi: 10.1017/CBO9780511543234.
16. Brunner H. *Volterra integral equations: An introduction to theory and applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017, 387 p. doi: 10.1017/9781316162491.
17. Apartsyn A.S., Sidler I.V. Numerical solution of the Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems. *Proc. Int. Symp. "Generalized Statements and Solutions of Control Problems, GSSCP – 2014"*. Moscow: Izd. Fiz.-Mat. Lit., 2014, pp. 21–25 (in Russian). ISBN: 978-5-94052-236-2.
18. Apartsyn A.S., Sidler I.V. On the numerical solution of the nonclassical Volterra equations of the first kind. *Proc. IX Int. Nat. Sci. Conf. "Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems, ANM – 2014"*. Penza: Penz. Gos. Univ. Publ., 2014, pp. 59–64 (in Russian). ISBN: 978-5-94170-889-5.

The paper was received by the Editorial Office on December 10, 2017.

Anatoly Solomonovich Apartsyn, Dr. Phys.-Math. Sci., Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru.

Inna Vladimirovna Sidler, PhD, Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: inna.sidler@mail.ru.