ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 515.124+517.988.6+517.911.5

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ[1]

Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко

Предлагается распространение теоремы Надлера о неподвижной точке многозначного отображения на пространства с векторнозначной метрикой. Под векторнозначной метрикой понимается отображение, обладающее свойствами "обычной" метрики, значениями которого являются элементы линейного нормированного упорядоченного пространства. Доказанный аналог теоремы Надлера применяется к системе интегральных включений в пространстве суммируемых функций. Затем с помощью редукции к системе интегральных включений исследуется краевая задача с многозначными условиями для систем функционально-дифференциальных включений. Получены условия (не содержащие требования выпуклости значений многозначной функции, порождающей оператор Немыцкого) существования решений и даны оценки решений.

Ключевые слова: пространство с векторнозначной метрикой, сжимающее многозначное отображение, неподвижная точка, интегральное включение.

E. S. Zhukovskii, E. A. Panasenko. On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric.

Nadler's theorem on a fixed point of a multivalued mapping is extended to spaces with a vector-valued metric. A vector-valued metric is understood as a mapping with the properties of a usual metric and values in a linear normed ordered space. We prove an analog of Nadler's theorem and apply it to a system of integral inclusions in a space of summable functions. Then we study a boundary value problem with multivalued conditions for systems of functional differential equations by means of reduction to a system of integral inclusions. Conditions for the existence of solutions are obtained and estimates of the solutions are given. The existence conditions do not contain the convexity requirement for the values of the multivalued function generating a Nemytskii operator.

Keywords: space with a vector-valued metric, contracting multivalued mapping, fixed point, integral inclusion.

MSC: 54E35, 54H25, 34K09

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105

Введение

Общеизвестны многочисленные применения утверждений о неподвижных точках в функциональном анализе, теории дифференциальных и интегральных уравнений и включений, в численных методах. В последние годы эти результаты нашли новые приложения в кибернетике, теории управления и оптимизации, теории игр. Для решения дифференциальных игр А. Г. Ченцовым разработан метод программных итераций, существенно использующий неподвижные точки соответствующих операторов (см. [1; 2]). В связи с появлением отмеченных и многих других приложений неподвижные точки являются объектом постоянного интереса исследователей. В современных исследованиях неподвижных точек значительную долю занимают работы, связанные с распространением классического принципа Банаха сжимающих отображений на различные обобщения метрических пространств. Естественным обобщением метрических пространств являются пространства с векторнозначной метрикой, в которых каждой паре элементов поставлен в соответствие элемент вещественного линейного упорядоченного пространства — "векторное расстояние". Для таких пространств в [3; 4] получены

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание № 3.8515.2017/БЧ), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 16-01-00386); исследования в разделах 1, 2 выполнены за счет средств Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

результаты о неподвижных точках сжимающих и обобщенно сжимающих отображений, в [5] рассмотрена задача о точках совпадения, в [6;7] получены условия устойчивости накрывающих отображений к липшицевым возмущениям.

В данной работе предлагается утверждение о неподвижной точке многозначного сжимающего отображения пространства с векторнозначной метрикой — аналог известной теоремы Надлера (см., например [8, § 2.1.1]) — и демонстрируются его применения к исследованию интегральных включений и краевых задач для функционально-дифференциальных включений.

Большое влияние на это исследование оказали лекции и доклады профессора Александра Георгиевича Ченцова на “Колмогоровских чтениях” (г. Тамбов). Мы благодарны Александру Георгиевичу за внимание к нашим работам, ценные советы и замечания.

1. Определение векторнозначной метрики

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором задан выпуклый замкнутый острый конус E_+, т. е. замкнутое в E множество, удовлетворяющее условиям

$$0 \in E_+; \quad \forall e \in E_+ : \ e \neq 0 \quad \forall k > 0 \quad ke \in E_+, \ -ke \notin E_+;$$

$$\forall e, \tilde{e} \in E_+ \quad \forall k \in [0,1] \quad ke + (1-k)\tilde{e} \in E_+.$$

Определим в E упорядоченность $\leq$, полагая

$$\forall e, \tilde{e} \in E \quad \tilde{e} \leq e \quad \Leftrightarrow \quad e - \tilde{e} \in E_+.$$

Будем предполагать, что норма $\|\cdot\|_E$ в пространстве E является монотонной:

$$\forall e, \tilde{e} \in E_+ \quad \tilde{e} \leq e \ \Rightarrow \ \|\tilde{e}\|_E \leq \|e\|_E.$$

Пусть задано непустое множество Ω. Отображение $\mathcal{P}_\Omega \colon \Omega^2 \to E_+$ назовем *векторнозначной метрикой,* или в. *метрикой,* если для любых $\omega, u, v \in \Omega$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_\Omega(\omega,u) = 0 \ \Leftrightarrow \ \omega = u; \quad \mathcal{P}_\Omega(\omega,u) = \mathcal{P}_\Omega(u,\omega); \quad \mathcal{P}_\Omega(\omega,u) \leq \mathcal{P}_\Omega(\omega,v) + \mathcal{P}_\Omega(v,u).$$

В дальнейшем будем опускать индекс в обозначении в. метрики, если ясно, где она определена. Множество Ω с определенной на нем в. метрикой $\mathcal{P}$ будем называть в. *метрическим пространством.*

В пространстве $\Omega \doteq (\Omega, \mathcal{P})$ естественным образом определяются аналоги основных понятий метрических пространств. *Замкнутый шар с центром в точке* $\omega_0 \in \Omega$ *радиуса* $e \in E_+$ — это множество $\mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e) \doteq \{\omega \in \Omega \colon \mathcal{P}(\omega,\omega_0) \leq e\}$; *e-раздутие* $\mathrm{B}_\Omega(U,e)$ множества $U \subset \Omega$ определяется равенством $\mathrm{B}_\Omega(U,e) \doteq \bigcup_{\omega_0 \in U} \mathrm{B}_\Omega(\omega_0,e)$. Под *сходимостью* $\omega_i \to \omega$ при $i \to \infty$ в Ω понимается сходимость $\|\mathcal{P}(\omega_i,\omega)\|_E \to 0$. Множество $U \subset \Omega$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности его элементов $\omega_i \in U$, $\omega_i \to \omega$ выполнено $\omega \in U$. Последовательность $\{\omega_i\} \subset \Omega$ называют *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \quad \forall i > I \quad \forall j > I \quad \|\mathcal{P}(\omega_i,\omega_j)\|_E < \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовательность в Ω сходится, то это в. метрическое пространство называют *полным.*

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, если $\mathcal{P}$ — в. метрика на Ω, то, вследствие монотонности нормы в E, формула

$$\rho(\omega,u) = \|\mathcal{P}(\omega,u)\|_E \tag{1.1}$$

определяет “обычную” метрику на Ω, причем сходимости в пространствах (Ω,ρ), $(\Omega,\mathcal{P})$ равносильны, и полнота одного из них влечет полноту другого. Но, как далее будет показано, в задачах о неподвижной точке в. метрика может быть эффективнее “обычной” метрики (1.1): использование в. метрики позволяет получить более общие условия существования неподвижных точек и их более точные оценки.

Приведем несколько примеров в. метрических пространств.

П р и м е р 1. Пусть заданы метрические пространства (Ω_i, ρ_i), $i = \overline{1, n}$. В их произведении $\Omega \doteq \prod_{i=1}^n \Omega_i$ в. метрика — это вектор

$$\mathcal{P}(\omega, u) = \big(\rho_1(\omega_1, u_1), \dots, \rho_n(\omega_n, u_n)\big), \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega, \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in \Omega,$$

а пространство ее значений $E = \mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство с любой монотонной нормой $|\cdot|$. Рассматриваемое здесь пространство полно тогда и только тогда, когда полны все Ω_i, $i = \overline{1, n}$.

П р и м е р 2. “Стандартные” линейные нормированные пространства функций $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ и их подмножества можно рассматривать как пространства с в. метрикой

$$t \in [a, b] \mapsto \mathcal{P}(\omega, u)(t) = |\omega(t) - u(t)|.$$

В частности, в пространствах $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ и $L([a, b], \mathbb{R}^m)$ непрерывных и соответственно суммируемых функций для такой в. метрики выполнены $\mathcal{P}(\omega, u) \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ и соответственно $\mathcal{P}(\omega, u) \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$.

П р и м е р 3. Пусть элементами множества Ω являются функции двух аргументов t, x, пробегающих соответственно множества T и X. Тогда для определения в. метрики на Ω можно использовать следующую схему. Пусть для всех $\omega \in \Omega$ при каждом фиксированном $x \in X$ функция $\omega(\cdot, x)$ есть элемент метрического пространства (W, ρ_W) и для произвольных $\omega, \hat{\omega} \in \Omega$ отображение $x \in X \mapsto \rho_W\big(\omega(\cdot, x), \hat{\omega}(\cdot, x)\big) \in \mathbb{R}_+$ является элементом конуса E_+ линейного нормированного пространства E. Тогда это отображение — в. метрика в пространстве Ω.

2. Теорема о неподвижной точке многозначного отображения

Пусть задано линейное пространство E, упорядоченное выпуклым замкнутым острым конусом E_+, с монотонной нормой $||\cdot||_E$. Будем предполагать, что конус E_+ воспроизводящий, т. е. $E = E_+ - E_+$. Отметим, что на в. метрические пространства не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в E_+ может не иметь инфимума (в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$, упорядоченность в E частичная). Тем не менее для многозначных отображений в. метрических пространств можно сформулировать условия существования неподвижной точки, аналогичные известной теореме Надлера.

В пространстве $\mathcal{L}(E)$ линейных ограниченных операторов $F\colon E \to E$ (со стандартно определенной нормой) зададим множество $\mathcal{L}_+(E) \doteq \{F\colon E \to E\colon F(E_+) \subset E_+\}$ положительных операторов. Очевидно, нулевой оператор $0 \in \mathcal{L}(E)$ является положительным. Для произвольного ненулевого оператора $F \in \mathcal{L}_+(E)$, так как $Fe \in E_+$ при любом $e \in E_+$, то $kFe \in E_+$ при $k > 0$, т. е. $kF \in \mathcal{L}_+(E)$. Далее, так как конус E_+ воспроизводящий, то для произвольного ненулевого оператора $F \in \mathcal{L}_+(E)$ существует $e \in E_+$ такой, что $Fe \neq 0$. Тогда $-kFe \notin E_+$ при $k > 0$, следовательно, $-kF \notin \mathcal{L}_+(E)$. Таким образом, множество $\mathcal{L}_+(E)$ является острым конусом в $\mathcal{L}(E)$.

Замкнутость этого конуса вытекает из замкнутости конуса E_+. Действительно, пусть последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+(E)$ сходится (по норме операторов) к некоторому $F \in \mathcal{L}(E)$. Тогда, поскольку из сходимости по норме операторов следует сильная сходимость, для любого $e \in E_+$ имеем $||F_i e - Fe||_E \to 0$. Следовательно, $Fe \in E_+$ и, значит, $F \in \mathcal{L}_+(E)$. Аналогично из выпуклости E_+ следует выпуклость $\mathcal{L}_+(E)$. Итак, $\mathcal{L}_+(E)$ — выпуклый замкнутый острый конус. Этот конус задает порядок на $\mathcal{L}(E)$; соответственно для $F, G \in \mathcal{L}(E)$ будем писать $F \geq G$ или $F - G \geq 0$, если $F - G \in \mathcal{L}_+(E)$.

Определим аналог свойства сжатия для многозначного отображения пространства X с векторнозначной метрикой $\mathcal{P}\colon X^2 \to E_+$.

Обозначим через $\mathrm{Cl}(X)$ совокупность всех непустых замкнутых (в векторнозначной метрике $\mathcal{P}$) подмножеств пространства X.

Определение 1. Пусть задан оператор $Q \in \mathcal{L}_+(E)$ со спектральным радиусом $\varrho(Q) < 1$. Оператор $\Phi\colon X \to \mathrm{Cl}(X)$ будем называть *сжимающим с операторным коэффициентом* $Q \in \mathcal{L}_+(E)$ или Q*-сжатием* (*относительно векторнозначной метрики*), если

$$\forall x, \tilde{x} \in X \quad \Phi(x) \subset \mathrm{B}_X\big(\Phi(\tilde{x}), Q\mathcal{P}(\tilde{x}, x)\big).$$

Отметим, что это включение равносильно соотношению

$$\forall x, \tilde{x} \in X \quad \forall y \in \Phi(x) \quad \exists \tilde{y} \in \Phi(\tilde{x}) \quad \mathcal{P}(\tilde{y}, y) \leq Q\,\mathcal{P}(\tilde{x}, x).$$

Если оператор Φ — Q-сжатие, то он является замкнутым, т. е. для любых элементов $y, x, x_i \in X$, $y_i \in \Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, из сходимости $x_i \to x$, $y_i \to y$ следует $y \in \Phi(x)$. Действительно, при каждом $i = 1, 2, \dots$ существует такой $\tilde{y}_i \in \Phi(x)$, что $\mathcal{P}(\tilde{y}_i, y_i) \leq Q\,\mathcal{P}(x, x_i)$. Следовательно, $\tilde{y}_i \to y$, а так как множество $\Phi(x)$ замкнуто, то $y \in \Phi(x)$.

Отметим также, что если $E = \mathbb{R}$, то $Q = (q)_{1\times 1}$, $\varrho(Q) = q < 1$, и определение 1 равносильно классическому определению сжатия в метрическом пространстве.

Обозначим символом $I \in \mathcal{L}(E)$ тождественный оператор.

Сформулируем утверждение о существовании неподвижной точки у многозначного отображения в пространстве с векторнозначной метрикой.

Теорема 1. *Пусть пространство E является банаховым, пространство $(X, \mathcal{P})$ — полным. Если оператор $\Phi\colon X \to \mathrm{Cl}(X)$ сжимающий с операторным коэффициентом $Q \in \mathcal{L}_+(E)$, то для любых $x_0 \in X$, $x_1 \in \Phi(x_0)$ существует решение x включения*

$$x \in \Phi(x), \tag{2.1}$$

удовлетворяющее неравенству

$$\mathcal{P}(x, x_0) \leq (I - Q)^{-1}\,\mathcal{P}(x_1, x_0). \tag{2.2}$$

Доказательство. Из предположения $\varrho(Q) < 1$ следует, что оператор $I - Q\colon E \to E$ обратим, и обратный оператор является суммой ряда Неймана $(I - Q)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i$, члены которого — положительные операторы Q^i. Вследствие замкнутости конуса $\mathcal{L}_+(E)$ оператор $(I - Q)^{-1}\colon E \to E$ также является положительным, и при любом натуральном l справедливо $(I - Q)^{-1} - \sum_{i=0}^{l} Q^i \geq 0$.

Так как оператор Φ является Q-сжатием, то для элементов $x_0 \in X$ и $x_1 \in \Phi(x_0)$ найдется $x_2 \in \Phi(x_1)$, удовлетворяющий неравенству

$$\mathcal{P}(x_2, x_1) \leq Q\,\mathcal{P}(x_1, x_0).$$

Аналогично при каждом натуральном i существует $x_{i+1} \in \Phi(x_i)$, удовлетворяющий неравенству

$$\mathcal{P}(x_{i+1}, x_i) \leq Q\,\mathcal{P}(x_i, x_{i-1}) \leq Q^i\,\mathcal{P}(x_1, x_0). \tag{2.3}$$

Покажем, что последовательность $\{x_i\} \subset X$ является фундаментальной. В силу соотношений (2.3), для любых $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$ имеем

$$\mathcal{P}(x_{j+l}, x_j) \leq \sum_{i=j}^{j+l-1} \mathcal{P}(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=0}^{l-1} Q^i Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0) \leq (I - Q)^{-1} Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0), \tag{2.4}$$

откуда в силу монотонности нормы в пространстве E получаем соотношение

$$\|\mathcal{P}(x_{j+l}, x_j)\|_E \le \|(I-Q)^{-1}Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0)\|_E.$$

Так как $\varrho(Q) < 1$, то при $j \to \infty$ имеет место сходимость $Q^j \to 0$ (в пространстве $\mathcal{L}(E)$), следовательно, $\|(I-Q)^{-1}Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0)\|_E \to 0$, и поэтому последовательность $\{x_i\} \subset X$ действительно является фундаментальной. Обозначим через x ее предел и заметим, что вследствие замкнутости сжимающего оператора Φ выполнено $x \in \Phi(x)$.

Из неравенства (2.4), при $j = 0$, следует оценка

$$\mathcal{P}(x_l, x_0) \le (I-Q)^{-1}\,\mathcal{P}(x_1, x_0), \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, в силу замкнутости конуса E_+, получаем, что найденная неподвижная точка x отображения Φ удовлетворяет неравенству (2.2). $\square$

Пусть заданы метрические пространства (X_i, ρ_i), $i = \overline{1,n}$, их произведение $X \doteq \prod_{i=1}^n X_i$ наделим в. метрикой (см. пример 1)

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X,\ u = (u_1, \ldots, u_n) \in X \ \mapsto\ \mathcal{P}(x, u) = \big(\rho_1(x_1, u_1), \ldots, \rho_n(x_n, u_n)\big) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть определены отображения $\Phi_i\colon X \to \mathrm{Cl}(X_i)$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему включений

$$x_i \in \Phi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть пространства* (X_i, ρ_i), $i = \overline{1,n}$, *полные и для любого* $j = \overline{1,n}$ *при всех* $x_l \in X_l$, $l = \overline{1,n}$, $l \ne j$ *отображение* $\Phi_{ij} \doteq \Phi_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n)\colon X_j \to \mathrm{Cl}(X_i)$ q_{ij}*-липшицево, т.е.*

$$\forall x, \tilde{x} \in X_j \ \ \forall y \in \Phi_{ij}(x) \ \ \exists \tilde{y} \in \Phi_{ij}(\tilde{x}) \quad \rho_i(\tilde{y}, y) \le q_{ij}\rho_j(\tilde{x}, x).$$

Тогда если $n \times n$*-матрица* $Q = \big(q_{ij}\big)$ *имеет спектральный радиус* $\varrho(Q) < 1$, *то для любых* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in X$, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1) \in X$ *таких, что* $x_i^1 \in \Phi_i(x^0)$, $i = \overline{1,n}$, *существует решение* x *системы* (2.5), *удовлетворяющее неравенству* (2.2).

3. Условия разрешимости одного интегрального включения

Обозначим через $L([a,b], \mathbb{R}^n)$, $L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ пространства суммируемых, существенно ограниченных (по Лебегу) функций $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, соответственно, с нормами $||y||_L \doteq \int_a^b |y(t)|dt$, $||y||_{L_\infty} \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |y(t)|$; $L([a,b], \mathbb{R}_+)$ — множество суммируемых (по Лебегу) функций $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ (очевидно, образующее выпуклый замкнутый острый воспроизводящий конус в $L([a,b], \mathbb{R})$).

Пусть заданы функция $\kappa\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}^{m\times n}$ и многозначное отображение $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Рассмотрим интегральное включение

$$y(t) \in F\bigg(t, \int\limits_a^b \kappa(t,s)y(s)\,ds\bigg), \quad t \in [a,b], \tag{3.1}$$

относительно неизвестной суммируемой функции $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(a) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^m$ множество $F(t,x)$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$;

(b) для любого $x \in \mathbb{R}^m$ отображение $F(\cdot, x)\colon [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо;

(c) отображение $t \in [a,b] \mapsto F(t,0)$ имеет суммируемое сечение;

(d) для некоторой суммируемой функции $q\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ при п.в. $t \in [a,b]$, любых $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ и $y \in F(t,x)$ существует $\tilde{y} \in F(t,\tilde{x})$ удовлетворяющий неравенству $|\tilde{y} - y| \le q(t)|\tilde{x} - x|$;

(e) функция κ измерима и существенно ограничена.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **(a)**–**(e)** *и линейный оператор*

$$Q\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R}), \quad (Q\mathcal{P})(t) \doteq \int_a^b q(t)|\kappa(t,s)|\mathcal{P}(s)\,ds, \tag{3.2}$$

имеет спектральный радиус $\varrho(Q) < 1$. Тогда существует решение $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ включения (3.1).

Доказательство. В пространстве $L([a,b],\mathbb{R}^n)$ определим в. метрику

$$\mathcal{P}\colon L([a,b],\mathbb{R}^n) \times L([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{P}(\tilde{y},y)(t) \doteq |\tilde{y}(t) - y(t)| \ \ \forall \tilde{y}, y \in L([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Покажем, что включение (3.1) может быть представлено в виде включения (2.1) в пространстве $\big(L([a,b],\mathbb{R}^n),\, \mathcal{P}\big)$, удовлетворяющего предположениям теоремы 1.

Из условия **(e)** следует, что заданный соотношением

$$(\mathrm{k}y)(t) \doteq \int_a^b \kappa(t,s)y(s)\,ds$$

интегральный оператор действует из $L([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$. Определим многозначный оператор Немыцкого $\mathcal{N}_F\colon L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^m)$, сопоставляющий каждой функции $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ множество суммируемых сечений многозначного отображения $t \in [a,b] \mapsto F(t,z(t)) \subset \mathbb{R}^n$, и запишем включение (3.1) в виде

$$y \in \mathcal{N}_F \mathrm{k}\, y. \tag{3.3}$$

Покажем, что композиция $\mathcal{N}_F\mathrm{k}\colon L([a,b],\mathbb{R}^m) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^m)$ является сжатием (относительно в. метрики $\mathcal{P}$).

Из предположения **(d)** следует, что отображение $F(t,\cdot)\colon \mathbb{R}^m \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно (в метрике Хаусдорфа). Учитывая предположение **(a)**, заключаем, что F удовлетворяет условиям Каратеодори и поэтому суперпозиционно измеримо. Итак, для любого $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ отображение $F(\cdot, z(\cdot))$ измеримо. Покажем, что среди его сечений есть суммируемые функции.

Согласно предположению **(c)** найдем суммируемое сечение y_0 отображения $F(\cdot,0)$. Выберем произвольное $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ и определим многозначное отображение

$$V_{0,y_0,z}\colon [a,b] \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n), \quad V_{0,y_0,z}(t) \doteq \big\{v\colon |v - y_0(t)| \le q(t)|z(t)|\big\}.$$

Это отображение измеримо, и в силу предположения **(d)** имеем $V_{0,y_0,z}(t) \cap F(t,z(t)) \ne \varnothing$ при п.в. $t \in [a,b]$. Отображение $t \in [a,b] \mapsto V_{0,y_0,z}(t) \cap F(t,z(t))$ измеримо (см. [8, следствие 1.5.8]) и поэтому имеет измеримое сечение, очевидно являющееся суммируемым. Итак, при любом $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ у отображения $F(\cdot,z(\cdot))$ существуют суммируемые сечения. Множество таких сечений замкнуто в $L([a,b],\mathbb{R}^n)$. Действительно, если $u_i \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $u_i(t) \in F(t,z(t))$, $i = 1,2,\ldots$, и $\|u_i - u\|_L \to 0$, то некоторая подпоследовательность $\{u_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ сходится к u почти всюду и $u(t) \in F(t,z(t))$ вследствие замкнутости множества $F(t,z(t))$. Таким образом, $\mathcal{N}_F\colon L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) \to \mathrm{Cl}\big(L([a,b],\mathbb{R}^m)\big)$.

Теперь покажем, что для любых $z, \tilde{z} \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, $u \in \mathcal{N}_F z \subset L([a,b],\mathbb{R}^m)$ существует $\tilde{u} \in \mathcal{N}_F \tilde{z} \subset L([a,b],\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющий неравенству

$$|\tilde{u}(t) - u(t)| \le q(t)|\tilde{z}(t) - z(t)|. \tag{3.4}$$

Для этого определим измеримое многозначное отображение

$$V_{z,u,\tilde{z}}\colon [a,b] \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n), \quad V_{z,u,\tilde{z}}(t) \doteq \big\{v\colon |v - u(t)| \le q(t)|\tilde{z}(t) - z(t)|\big\}.$$

Согласно **(d)** при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $V_{z,u,\tilde{z}}(t) \cap F(t,\tilde{z}(t)) \neq \varnothing$. В силу измеримости отображения $t \in [a,b] \mapsto V_{z,u,\tilde{z}}(t) \cap F(t,\tilde{z}(t))$ оно имеет измеримое сечение $\tilde{u}$. Из $\tilde{u}(t) \in V_{z,u,\tilde{z}}(t)$, $t \in [a,b]$, следует, что функция $\tilde{u}$ суммируема и удовлетворяет неравенству (3.4).

Для композиции $\mathcal{N}_F\mathrm{k}$ в силу неравенства (3.4) получаем

$$\forall y, \tilde{y} \in L([a,b],\mathbb{R}^m) \quad \forall u \in \mathcal{N}_F\mathrm{k}\, y \quad \exists \tilde{u} \in \mathcal{N}_F\mathrm{k}\, \tilde{y}$$

$$\mathcal{P}(\tilde{u},u)(t) = |\tilde{u}(t) - u(t)| \le q(t)\int_a^b |\kappa(t,s)|\,|\tilde{y}(s) - y(s)|\,ds = \int_a^b q(t)|\kappa(t,s)|\mathcal{P}(\tilde{y},y)(s)\,ds.$$

Так как спектральный радиус оператора (3.2) меньше единицы, то отображение

$$\mathcal{N}_F\mathrm{k}\colon L([a,b],\mathbb{R}^m) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^m)$$

является сжатием с операторным коэффициентом (3.2). Согласно теореме 1 существует решение $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ включения (3.1). $\square$

Теорема 1 позволяет не только сформулировать условия разрешимости включения (3.1), но и, используя неравенство (2.2), получить оценки его решений. С этой целью для заданного соотношением (3.2) оператора Q найдем оператор $(I - Q)^{-1}\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R})$. Так как $\varrho(Q) < 1$, то оператор $(I - Q)^{-1}$ является суммой ряда Неймана $I + Q + Q^2 + \dots$. Получим представления членов этого ряда — степеней оператора Q, а затем его суммы. Напомним, что для любого положительного интегрального оператора $\mathrm{h}\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{h}u = \int_a^b \eta(t,s)u(s)\,ds$ с ядром $\eta(t,s) \ge 0$ при п.в. $(t,s) \in [a,b]^2$ выполнено $\int_a^b \eta(t,\cdot)\,dt \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ и $\|\mathrm{h}\|_{L\to L} = \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} \int_a^b \eta(t,s)\,ds$.

Так как интегральный оператор Q действует в $L([a,b],\mathbb{R})$ и регулярен (более того, положителен), то любая его i-я степень Q^i является интегральным оператором с ядром q_i, определяемым соотношениями (см. [9, гл. III, § 5.3, с. 158])

$$q_1(t,s) = q(t)\kappa_1(t,s), \quad \kappa_1(t,s) = |\kappa(t,s)|;$$

$$q_i(t,s) = q(t)\kappa_i(t,s), \quad \kappa_i(t,s) = \int_a^b \kappa_{i-1}(t,\varsigma)\,q(\varsigma)\,\kappa_1(\varsigma,s)\,d\varsigma, \quad i = 2,3,\dots .$$

Из этих соотношений в силу существенной ограниченности функции κ следует, что все функции κ_i, $i = 2,3,\dots$, также существенно ограничены.

Покажем, что *оператор $(I - Q)^{-1}$ представим в виде суммы тождественного оператора I и интегрального оператора с ядром $\eta(t,s) = q(t)\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i(t,s)$, причем имеет место сходимость*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} \int_a^b \Big(\eta(t,s) - q(t)\sum_{i=1}^{j}\kappa_i(t,s)\Big)\,dt \to 0 \quad \text{\textit{при}} \;\; j \to \infty. \tag{3.5}$$

В силу сходимости ряда Неймана для его частичных сумм — операторов $\mathrm{h}_j\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{h}_j u = \int_a^b \eta_j(t,s)u(s)\,ds$, где $\eta_j(t,s) = q(t)\sum_{i=1}^{j}\kappa_i(t,s)$, — справедливо

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists J \quad \forall i>j>J \quad \dot\forall t\in[a,b] \quad \int\limits_a^b \big(\eta_i(t,s)-\eta_j(t,s)\big)ds \le \varepsilon. \tag{3.6}$$

Следовательно, $\eta_i(t,\cdot)\to\eta(t,\cdot)$ в пространстве $L([a,b],\mathbb{R})$, где $\eta(t,s)=\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i(t,s)$. Поэтому из соотношения (3.6) получаем

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists J \quad \forall j>J \quad \dot\forall t\in[a,b] \quad \int\limits_a^b \big(\eta(t,s)-\eta_j(t,s)\big)ds \le \varepsilon;$$

таким образом, сходимость (3.5) доказана.

Теперь можем оценить решения включения (3.1).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для любых* $y_0\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y_1\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *таких, что* $y_1(t)\in F\big(t,\int_a^b\kappa(t,s)y_0(s)\,ds\big)$ *при п.в.* $t\in[a,b]$, *существует решение* $y\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *включения* (3.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$|y(t)-y_0(t)| \le |y_1(t)-y_0(t)| + \int\limits_a^b q(t)\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i(t,s)|y_1(s)-y_0(s)|\,ds, \quad t\in[a,b].$$

Заключим раздел следующим замечанием об общности рассмотренного здесь включения (3.3). Это включение содержит интегральный оператор $L([a,b],\mathbb{R}^m)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, а любой линейный оператор, действующий в этих пространствах, является интегральным (см. [9, гл. III, § 5.2, с. 157]), и, что более важно, к такому включению сводятся краевые задачи для функционально-дифференциальных включений.

4. Условия разрешимости краевой задачи для функционально-дифференциального включения

Приведем вначале некоторые сведения о функционально-дифференциальных уравнениях.

Символом $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство абсолютно непрерывных функций $t\in[a,b]\mapsto x(t)\in\mathbb{R}^n$. Пусть заданы линейные ограниченные отображения $\mathcal{L}\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n)\to L([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\ell\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$. Следуя [10, § 2.1], линейной краевой задачей для функционально-дифференциального уравнения мы называем систему уравнений

$$\mathcal{L}x = y, \tag{4.1}$$

$$\ell x = \gamma. \tag{4.2}$$

Если краевая задача (4.1), (4.2) при каждых $y\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma\in\mathbb{R}^n$ имеет единственное решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, то это решение непрерывно зависит от (y,γ) и определяется формулой [10, § 3.1]

$$x(t) = X(t)\gamma + \int\limits_a^b \mathfrak{g}(t,s)y(s)\,ds, \quad t\in[a,b]. \tag{4.3}$$

Здесь $X\in AC([a,b],\mathbb{R}^{n\times n})$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$, линейный непрерывный оператор $y\in L([a,b],\mathbb{R}^n)\mapsto\int_a^b\mathfrak{g}(\cdot,s)y(s)\,ds\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ — оператор Грина, а его ядро $\mathfrak{g}\in L_\infty([a,b]^2,\mathbb{R}^{n\times n})$ — функция Грина.

Пусть заданы: отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, измеримая функция $\tau\colon [a,b]\to[a,b]$ и вектор $\gamma\in\mathbb{R}^n$. Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального включения

$$(\mathcal{L}x)(t)\in F\bigl(t, x(\tau(t))\bigr),\quad t\in[a,b], \tag{4.4}$$

с линейным краевым условием (4.2). Заметим, что требование принадлежности значений функции τ отрезку $[a,b]$ необходимо нам лишь для сокращения выкладок, оно не ограничивает общность рассматриваемого включения: при его невыполнении можно определить равносильное включение, удовлетворяющее этому условию.

Будем предполагать, что соответствующая линейная краевая задача (4.1), (4.2) однозначно разрешима; тогда задача (4.4), (4.2) равносильна включению

$$y(t)\in F\Bigl(t,\ X\bigl(\tau(t)\bigr)\gamma+\int\limits_a^b \mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)y(s)\,ds\Bigr),\quad t\in[a,b], \tag{4.5}$$

а именно для любого решения $y\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ включения (4.5) определяемая соотношением (4.3) функция x будет решением задачи (4.4), (4.2); обратно, для любого решения x задачи (4.4), (4.2) правая часть y уравнения (4.1) будет решением включения (4.5).

Применяя к включению теорему 2 и следствие 2, получаем следующее утверждение о разрешимости краевой задачи (4.4), (4.2).

Теорема 3. *Пусть отображение F удовлетворяет условиям* **(a)**–**(d)** *и линейный оператор*

$$Q\colon L([a,b],\mathbb{R})\to L([a,b],\mathbb{R}),\quad (Q\mathcal{P})(t)\doteq\int\limits_a^b q(t)|\mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)|\mathcal{P}(s)\,ds,$$

имеет спектральный радиус $\varrho(B)<1$. Тогда существует решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (4.4), (4.2)*. Кроме того, для любых $x_0\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y_1\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ таких, что $\ell x_0=\gamma$ и $y_1(t)\in F\bigl(t,x_0(\tau(t))\bigr)$ при п.в. $t\in[a,b]$, существует решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ задачи* (4.4), (4.2)*, удовлетворяющее неравенству*

$$|(\mathcal{L}x)(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|\le|y_1(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|+\int\limits_a^b q(t)\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i(t,s)|y_1(s)-(\mathcal{L}x_0)(s)|\,ds,\quad t\in[a,b],$$

$$\text{где}\ \ \kappa_1(t,s)=|\mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)|,\quad \kappa_i(t,s)=\int\limits_a^b \kappa_{i-1}(t,\varsigma)\,q(\varsigma)\,\kappa_1(\varsigma,s)\,d\varsigma,\quad i=2,3,\ldots\,.$$

В заключение рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального включения (4.4) с многозначным краевым условием

$$\ell x\in\Psi x, \tag{4.6}$$

где $\Psi\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n)\to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$. По-прежнему предполагаем, что линейная краевая задача (4.1), (4.2) однозначно разрешима. Задача (4.4), (4.6) равносильна системе включений

$$\begin{cases} y(t)\in F\Bigl(t,\ X\bigl(\tau(t)\bigr)\gamma+\int\limits_a^b \mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)y(s)\,ds\Bigr),\quad t\in[a,b],\\ \gamma\in\Psi\Bigl(X(\cdot)\gamma+\int\limits_a^b \mathfrak{g}(\cdot,s)y(s)\,ds\Bigr),\end{cases} \tag{4.7}$$

т. е. для любого решения $(y,\gamma)\in L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ системы (4.7) соотношение (4.3) определяет решение x задачи (4.4), (4.6); обратно, для любого решения x задачи (4.4), (4.6) правая часть (y,γ) задачи (4.1), (4.2) удовлетворяет системе (4.7).

Относительно многозначного функционала Ψ будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(f) существует линейный функционал $\psi\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, положительный относительно конуса неотрицательных функций и такой, что для любых $x,u\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $\gamma\in\Psi x$ существует $\tilde\gamma\in\Psi u$, удовлетворяющий неравенству $|\tilde\gamma-\gamma|\le\psi|u(\cdot)-x(\cdot)|$.

Для исследования системы (4.7) применим теорему 1 и таким образом получим следующий признак разрешимости краевой задачи (4.4), (4.6).

Теорема 4. *Пусть отображение F удовлетворяет условиям* **(a)–(d)**, *а отображение Ψ — условию* **(f)**. *Если для спектрального радиуса ϱ линейного оператора*

$$Q\colon L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}\to L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R},$$

$$Q(p,\alpha)\doteq\left(\int_a^b q(\cdot)\,|\mathfrak{g}\big(\tau(\cdot),s\big)|\,p(s)\,ds+q(\cdot)\,|X\big(\tau(\cdot)\big)|\,\alpha;\ \psi\int_a^b|\mathfrak{g}(\cdot,s)|\,p(s)\,ds+\psi|X(\cdot)|\,\alpha\right)\qquad(4.8)$$

выполнено $\varrho(Q)<1$, то существует решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (4.4), (4.6).

Доказательство. В произведении $\Omega\doteq L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ определим в. метрику $\mathcal{P}\colon\Omega\times\Omega\to L([a,b],\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+$ — отображение, сопоставляющее любым $\omega=(y,\gamma)\in\Omega$, $\tilde\omega=(\tilde y,\tilde\gamma)\in\Omega$ пару $\mathcal{P}(\tilde\omega,\omega)\doteq\big(|\tilde y(\cdot)-y(\cdot)|,\,|\tilde\gamma-\gamma|\big)$. Отметим, что множество $L([a,b],\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+$ является выпуклым замкнутым острым воспроизводящим конусом в $L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$.

Запишем систему (4.7) в виде следующей системы операторных включений

$$\begin{cases} y\in\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,y+X(\tau(\cdot))\gamma\big),\\ \gamma\in\Psi(\mathrm{g}y+X\gamma).\end{cases}$$

Здесь операторы $\mathrm{g}\colon L([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{k}\colon L([a,b],\mathbb{R}^n)\to AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ определены равенствами

$$\mathrm{g}\,y=\int_a^b\mathfrak{g}(\cdot,s)\,y(s)\,ds,\quad \mathrm{k}\,y=\int_a^b\mathfrak{g}\big(\tau(\cdot),s\big)\,y(s)\,ds,$$

где $\mathcal{N}_F\colon L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)\to\mathrm{Cl}\big(L([a,b],\mathbb{R}^m)\big)$ — оператор Немыцкого, порожденный удовлетворяющей условиям Каратеодори (см. доказательство теоремы 1) многозначной функцией F.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 2, можно показать, что для любых (y,γ) и $(\tilde y,\tilde\gamma)$, принадлежащих $L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, любой суммируемой функции $v\in\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,y+X(\tau(\cdot))\gamma\big)$ существует суммируемая функция $\tilde v\in\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,\tilde y+X(\tau(\cdot))\tilde\gamma\big)$, удовлетворяющая неравенству

$$|\tilde v(t)-v(t)|\le\int_a^b q(t)\,|\mathfrak{g}\big(\tau(t),s\big)|\,|\tilde y(s)-y(s)|\,ds+q(t)\,|X\big(\tau(t)\big)|\,|\tilde\gamma-\gamma|,\quad t\in[a,b].$$

В силу предположения **(f)** для любых $(y,\gamma)\in L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, $(\tilde y,\tilde\gamma)\in L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, любого вектора $\vartheta\in\Psi(X\gamma+\mathrm{g}y)$ существует вектор $\tilde\vartheta\in\Psi(X\tilde\gamma+\mathrm{g}\tilde y)$ такой, что

$$|\tilde\vartheta-\vartheta|\le\psi\int_a^b|\mathfrak{g}(\cdot,s)|\,|\tilde y(s)-y(s)|\,ds+\psi|X(\cdot)|\,|\tilde\gamma-\gamma|.$$

Итак, установлено, что отображение

$$(y,\gamma)\in\Omega\mapsto\Big(\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,y+X(\tau(\cdot))\gamma\big),\,\Psi(X\gamma+\mathrm{g}y)\Big)\in\Omega$$

является сжимающим с операторным коэффициентом $Q\in\mathcal{L}_+\big(L([a,b],\mathbb{R})\big)$, заданным соотношением (4.8). Согласно теореме 1 система (4.7), а следовательно, и краевая задача (4.4), (4.6) разрешимы. □

Для получения оценки решений краевой задачи (4.4), (4.6) определим натуральные степени оператора (4.8). Для сокращения выкладок обозначим

$$q_1(t,s)\doteq q(t)\,|\mathfrak{g}\big(\tau(t),s\big)|,\quad Y_1(t)\doteq q(t)\,|X\big(\tau(t)\big)|,\quad \nu_1\doteq\psi|X(\cdot)|.$$

В силу интегрального представления линейных ограниченных функционалов на пространстве $L([a,b],\mathbb{R})$ (см., например, [11, гл. VI, § 2.1]) существует такая функция $\varphi_1\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что

$$\psi\int_a^b|\mathfrak{g}(\cdot,s)|\,p(s)\,ds=\int_a^b\varphi_1(s)p(s)\,ds.$$

Таким образом, оператор (4.8) каждой паре $(p,\alpha)\in L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ сопоставляет

$$Q(p,\alpha)=\bigg(\int_a^b q_1(\cdot,s)\,p(s)\,ds+Y_1(\cdot)\alpha;\ \int_a^b\varphi_1(s)p(s)\,ds+\nu_1\alpha\bigg)\in L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}.$$

Натуральные степени оператора этого оператора определяются соотношением

$$Q^i(p,\alpha)=\bigg(\int_a^b q_i(\cdot,s)\,p(s)\,ds+Y_i(\cdot)\alpha;\ \int_a^b\varphi_i(s)p(s)\,ds+\nu_i\alpha\bigg),\quad i=2,3,\dots,$$

где

$$q_i(t,s)=\int_a^b q_1(t,\varsigma)q_{i-1}(\varsigma,s)\,d\varsigma+Y_1(t)\varphi_{i-1}(s);\quad Y_i(t)=\int_a^b q_1(t,s)Y_{i-1}(s)\,ds+Y_1(t)\nu_{i-1};$$

$$\varphi_i(s)=\int_a^b\varphi_1(\varsigma)q_{i-1}(\varsigma,s)\,d\varsigma+\nu_1\varphi_{i-1}(s);\quad \nu_i=\int_a^b\varphi_1(s)Y_{i-1}(s)\,ds+\nu_1\nu_{i-1}.$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда для произвольных* $x_0\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y_1\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *и* $\gamma_1\in\mathbb{R}^n$ *таких, что* $y_1(t)\in F\big(t,x_0(\tau(t))\big)$ *при п.в.* $t\in[a,b]$ *и* $\gamma_1\in\Psi x_0$, *существует решение* $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ *краевой задачи* (4.4), (4.6), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\begin{gathered}|(\mathcal{L}x)(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|\\ \le|y_1(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|+\int_a^b\sum_{i=1}^\infty q_i(t,s)|y_1(s)-(\mathcal{L}x_0)(s)|\,ds+\sum_{i=1}^\infty Y_i(t)|\gamma_1-\ell x_0|,\quad t\in[a,b],\end{gathered}$$

$$|\ell x-\ell x_0|\le|\gamma_1-\ell x_0|+\int_a^b\sum_{i=1}^\infty\varphi_i(s)|y_1(s)-(\mathcal{L}x_0)(s)|\,ds+\sum_{i=1}^\infty\nu_i|\gamma_1-\ell x_0|.$$

В большинстве исследований дифференциальных включений предполагается выпуклость значений многозначного отображения F. Это условие, в частности, обеспечивает замкнутость образов композиции линейного интегрального оператора и оператора Немыцкого. Такая композиция — "интегральный мультиоператор, порожденный отображением F" (см. [8, определение 1.5.33]), — возникает в результате стандартно используемой редукции дифференциального включения к интегральному включению в пространстве решений — непрерывных функций. В данной работе функционально-дифференциальное включение сводится к включению в пространстве производных от решений — суммируемых функций. Это позволяет избавиться от обременительного условия выпуклости значений F. Отметим, что функционально-дифференциальные включения вида $\dot{x} \in Gx$, где $G\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^n)$ — вольтеррово многозначное отображение, возможно, не обладающее свойством выпуклости значений, изучалось в работах А. И. Булгакова; в этих исследованиях использовались результаты о существовании у отображения G непрерывных селекторов (см., например, [12]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321 .
2. **Ченцов А.Г.** Об одной модификации метода программных итераций // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1076–1086.
3. **Забрейко П.П., Макаревич Т.А.** Об одном обобщении принципа Банаха — Каччиополли на операторы в псевдометрических пространствах // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1497–1504.
4. **Перов А.И.** Многомерная версия принципа обобщённого сжатия М. А. Красносельского // Функц. анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 1. С. 83–87. doi: 10.4213/faa2953 .
5. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения векторных отображений // Изв. вузов. Математика. 2016. № 10. С. 14–28.
6. **Жуковский Е.С.** О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21, № 2. С. 375–379. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-375-379 .
7. **Жуковский Е.С.** О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 297–311.
8. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. М.: Либроком, 2011. 224 с.
9. Функциональный анализ / ред. С.Г. Крейн. М.: Наука, 1972. 544 с.
10. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
12. **Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.** Функционально-дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2005. № 1. С. 3–20.

Жуковский Евгений Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор НИИ математики, физики и информатики
ТГУ имени Г.Р. Державина, г. Тамбов
ведущий научный сотрудник
Математический институт им. С.М. Никольского РУДН, г. Москва
e-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила 09.10.2017

Панасенко Елена Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой функционального анализа
ТГУ имени Г.Р. Державина, г. Тамбов
e-mail: panlena_t@mail.ru

REFERENCES

1. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543817050066 .
2. Chentsov A.G. A Version of the Program Iteration Method. *Diff. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1132–1143. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000011287.42107.96 .
3. Zabrejko P.P., Makarevich T.A. A generalization of the Banach–Cacciopolli principle to operators in pseudometric spaces. *Diff. Equ.*, 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1024–1030.
4. Perov A.I. Multidimensional version of M. A. Krasnoselskii's generalized contraction principle. *Funct. Anal. Appl.*, 2010, vol. 44, no. 1, pp. 69–72. doi: 10.1007/s10688-010-0008-z .
5. Zhukovskiy E.S. On coincidence points for vector mappings. *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2016, vol. 60, no. 10, pp. 10–22. doi: 10.3103/S1066369X16100030 .
6. Zhukivskiy E.S. On perturbations of covering mappings in spaces with vector-valued metrics. *Vestn. Tambov. Univ. Ser.: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 375–379 (in Russian).
7. Zhukivskiy E.S. Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 230–241. doi: 10.1134/S0037446616020063 .
8. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differenzial'nykh vklyuchenii.*[Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions]. Moscow, Librocom Publ., 2011, 224 p. (in Russian). ISBN: 978-5-397-01526-4 .
9. Vilenkin N.Ya., Krein S.G., et al. *Functional analysis.* Wolters-Noordhoff Ser. of Monographs and Textbooks on Pure and Appl. Math., Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, 379 p. ISBN: 9001909809 . Original Russian text published in Krein S.G. (ed.), *Funkzional'nyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 544 p.
10. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* Advanced Seri. in Math. Science and Engineering, 3. Atlanta: World Federation Publ., 1995, 172 p. ISBN: 1-885978-02-2 . Original Russian text published in Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p.
11. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis.* Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251 . Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz.* Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p.
12. Bulgakov A.I., Belyaeva O.P., Machina A.N. Functional-differential inclusion with multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching. *Vestn. Udmurt. Univ. Matematika*, 2005, no. 1, pp. 3–20 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2017.

Evgenii Semenovich Zhukovskiy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Research Institute of Mathematics, Physics, and Computer Sciences, Tambov Derzhavin State University, Tambov, 392000 Russia; Nikol'skii Mathematical Institute, RUDN University, Moscow, 117198 Russia,
e-mail: zukovskys@mail.ru .

Elena Aleksandrovna Panasenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), docent, Functional Analysis Department, Tambov Derzhavin State University, Tambov, 392000 Russia,
e-mail: panlena_t@mail.ru .