ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

О ПОРОЖДАЮЩИХ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ И ЕЕ НЕКОТОРЫХ ПОДАЛГЕБР[1]

А. А. Азамов

Показывается, что полная алгебра матриц M_n допускает систему порождающих из двух нильпотентных матриц P, Q таким образом, что любая матрица $A=(a_{ij})$ выражается явно через P и Q в виде $A=\sum_{i\neq j} a_{ij}P^{i-1}QP^{n-j}$; $i,j=1,2,\ldots,n$. Приводится приложение этого представления к вычислению степеней матрицы коэффициентов A линейной системы $x_{n+1}=Ax_n+r_n$, моделирующей процесс теплообмена в регенеративных воздухоподогревателях. При этом получаются удобные рекуррентные формулы для элементов $A^k, k=1,2,\ldots,$. Рассматривается также задача построения простых систем порождающих для подалгебр диагональных и треугольных матриц. Отмечено, что порождающая матрица подалгебры диагональных матриц связана с интерполяционной формулой Лагранжа. Установлено, что подалгебра треугольных матриц T_n порождается диагональной матрицей с попарно различными элементами и первой косой диагональю. Показано, что треугольная матрица $A\in T_n$ с попарно различными диагональными элементами может быть приведена к жордановой форме в пределах самой подалгебры T_n, т. е. существует $L\in T_n$, такая, что $L^{-1}AL$ будет диагональной. В общем случае это свойство не имеет места для произвольных матриц из T_n.

Ключевые слова: алгебра матриц, система образующих, нильпотентная матрица, матричная единица, подалгебра, жорданова форма, интерполяционный многочлен, дискретная система, воздухонагреватель, теплообмен.

A. A. Azamov. On generators of a matrix algebra and some of its subalgebras.

It is shown that a full matrix algebra M_n admits a generator system consisting of two nilpotent matrices P and Q such that any matrix $A=(a_{ij})$ is expressed explicitly in terms of P and Q as $A=\sum_{i\neq j} a_{ij}P^{i-1}QP^{n-j}$, $i,j=1,2,\ldots,n$. We show how this representation can be applied to calculate the powers of the coefficient matrix A of a linear system $x_{n+1}=Ax_n+r_n$ modeling heat exchange in a regenerative air preheater. More exactly, we obtain convenient recursive formulas for the elements of A^k, $k=1,2,\ldots$. We also consider the problem of constructing a simple system of generators for the subalgebras of diagonal and triangular matrices. We observe that a generating matrix of the subalgebra of diagonal matrices is related to the Lagrange interpolation formula and prove that the subalgebra of triangular matrices is generated by a diagonal matrix with pairwise different elements and first skew diagonal. It is shown that a triangular matrix $A\in T_n$ with pairwise different diagonal elements can be reduced to a Jordan form within the subalgebra T_n; i.e., there exists $L\in T_n$ such that $L^{-1}AL$ is diagonal. In the general case this property does not hold for arbitrary matrices from T_n.

Keywords: matrix algebra, system of generators, nilpotent matrix, matrix unit, subalgebra, Jordan form, interpolation polynomial, discrete system, air preheater, heat exchange.

MSC: 15A30, 15B99

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-8-14

1. Удобная система образующих алгебры матриц

Хорошо известно, что полная матричная алгебра M_n над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ порождается двумя матрицами [1–7]. Например, в качестве образующих можно взять жорданову форму J матрицы с характеристическим полиномом λ^n, т. е. первую(верхнюю) косую диагональ и ее транспонированную P. При этом, однако, дать явное выражение заданной матрицы A через J и P не просто, так как образующие алгебры M_n не могут быть взаимно перестановочными.

Существование системы из двух образующих можно вывести также из аналогичных результатов теории алгебр Ли. Например, если положить $P=x_1[1,1]+\cdots+x_n[n,n]$ и $Q=$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по координации развития науки и технологий при Кабинете министров Республики Узбекистан (проект ОТ-Ф4-84).

$\sum_{i\neq j}[i,j]$ ($[i,j]$ обозначает матричную единицу, определение см. чуть ниже), то из результатов статьи [8] вытекает тождество

$$[P[P\dots[P,Q]\dots]]=\sum_{i\neq j}y_{i,j}^d[i,j],$$

где в левой части коммутатор $[A,B]=AB-BA$ применяется d раз; $y_{i,j}=x_i-x_j$. Это тождество, в принципе, позволяет выразить все матричные единицы через P и Q, что, в свою очередь, приведет к выражению произвольной матрицы с попарно различными диагональными элементами через матрицы P и Q. Следует при этом отметить, что такое представление может быть признано явным лишь условно, поскольку для определения коэффициентов $y_{i,j}$ представления придется обратиться к формуле Крамера, которое к тому же не применимо к матрицам, имеющим совпадающие диагональные элементы.

Оказывается, что существует явное, притом простое выражение для любой матрицы через пару специальных нильпотентных матриц.

В дальнейшем, если не оговорено другое, будем рассматривать алгебру M_n над произвольным полем характеристики больше 2.

Пусть $A=(a_{ij})$ — матричная единица, у которой лишь один элемент равен 1, а все остальные равны 0 [9]. Если элемент, равный 1, расположен на пересечении k-й строки и l-го столбца, то соответствующую матричную единицу обозначим через $[k,l]$.

Матричные единицы составляют базис векторного пространства M_n, а между собой перемножаются по правилу

$$[i,j]\cdot[k,l]=[i,j]\ \text{ для } j=k;\quad [i,j]\cdot[k,l]=O\ \text{ при }\ j\neq k. \tag{1.1}$$

В частности, $[i,j]^2=\mathsf{0}$ при $i\neq j$, а упомянутые выше матрицы через матричные единицы записываются следующим образом:

$$J=\sum_{j=1}^{n-1}[j,j+1],\quad P=\sum_{j=1}^{n-1}[j+1,j],\quad Q=[1,n]\,.$$

Они нильпотентны: $J^{n-1}=P^{n-1}=Q^2=\mathsf{0}$.

Теорема 1. *Имеет место равенство* $P^{i-1}QP^{n-j}=[i,j]$, *так что*

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}P^{i-1}QP^{n-j} \tag{1.2}$$

для любой матрицы $A=(a_{ij})\in M_n$.

Доказательство можно провести прямым вычислением произведений $P^{i-1}QP^{n-j}$, однако это сопровождается громоздкими записями матриц. Правило (1.1) позволяет упростить вычисления. В первую очередь заметим, что

$$PQ=[2,n],\quad QP=[1,n-1]. \tag{1.3}$$

В частности, при $n=2$ матрицы $P=[2,1]$, $Q=[1,2]$, $PQ=[2,2]$, $QP=[1,1]$ составляют базис векторного пространства M_2, поэтому (1.2) выполняется.

Далее будем предполагать $n\geq 3$. Тогда

$$P^\alpha=\sum_{j=1}^{n-\alpha}[j+\alpha,j]\quad\text{для}\quad \alpha=0,1,2,\dots,n-1.$$

Например,

$$P^2 = \sum_{i=1}^{n-1}[i+1,i] \cdot \sum_{j=1}^{n-1}[j+1,j] = \sum_{i=0}^{n-1}[i+1,i] \cdot [i,i-1] = \sum_{i=1}^{n-2}[i+2,i]. \tag{1.4}$$

Матрицы P, P^2, $\ldots$, P^{n-2} попарно различны и содержат соответственно $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 2 элемента, равных 1, в то время как $P^{n-1} = [n,1]$. Из (1.3) вытекает, что в мультипликативной полугруппе, порожденной идемпотентами P и Q, не более $n-2+n^2$ элементов. Пользуясь правилами (1.1) и (1.4), сразу получаем

$$P^\alpha Q P^\beta = \left(\sum_{j=1}^{n-\alpha}[\alpha+j,j] \cdot [1,n]\right) P^\beta = [\alpha+1,n]\sum_{j=1}^{n-\beta}[\beta+j,j] = [\alpha+1,n-\beta].$$

Переобозначив $\alpha+1=i$, $n-\beta=j$, приходим к формуле $P^{i-1}QP^{n-j} = [i,j]$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие. *Матрицы $P^{i-1}QP^{n-j}$, $i,j=1,2,\ldots,n$, образуют базис линейного пространства M_n, а матрицы P и Q — систему образующих алгебры M_n.*

Полезно заметить, что если $n \geq 3$ и F алгебраически замкнуто или $n \geq 4$ и F является подполем замкнутого поля G, такого, что $[G:F]=2$, то алгебра M_n над F не может быть порождена одной матрицей. В самом деле, пусть имеет место противоположное: найдется $P \in M_n$ такая, что для любой $A \in M_n$ имеет место представление

$$A = u_0E + u_1P + u_2P^2 + \ldots + u_mP^m \tag{1.5}$$

для каких-то целого неотрицательного m и набора элементов u_0, u_1, $\ldots$, u_m основного поля. Если $J = L^{-1}AL$ — жорданова форма A, то из (1.5) вытекает

$$L^{-1}AL = u_0E + u_1J + u_2J^2 + \ldots + u_mJ^m,$$

что приведет к противоречию — правая часть равенства будет блочно-треугольной матрицей, в то время как левая часть не обязательна будет таковой.

2. Системы образующих для подалгебр диагональных и треугольных матриц

Самые простые из подалгебр M_n — это алгебры циркулянтных и диагональных матриц. Первая из них порождается, например, матрицей перестановки [10;11] $I = \sum_{j=1}^n [j, j+1 (\mathrm{mod}\, n)]$.

Теорема 2. *Алгебра D_n диагональных матриц порождается матрицей $R \in D_n$ тогда и только тогда, когда все диагональные элементы R попарно различны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть $R = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — матрица, удовлетворяющая условию теоремы, а $A = \mathrm{diag}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — произвольная матрица из D_n. Если f — интерполяционный многочлен Лагранжа, такой что $f(r_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $A = f(R)$. Обратное очевидно. $\square$

Рассмотрим теперь подалгебру верхне-треугольных матриц T_n.

Теорема 3. *Алгебра T_n порождается диагональной матрицей $R = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ с попарно различными элементами и верхним косым рядом J.*

Доказательство. К сожалению, на этот раз не удается найти столь же простую пару порождающих, как в теореме 1. Здесь укажем на систему образующих R и J, позволяющую выразить любую матрицу в явном виде в каждом конкретном случае (см. (2.1)).

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная треугольная матрица. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \Bigl(\sum_{j=1}^{n-i+1} x_{ij} R^{j-1} \Bigr) J^{i-1} = A \tag{2.1}$$

относительно набора неизвестных x_{ij} в количестве $\dfrac{n(n+1)}{2}$ – размерности T_n. Заметим, что в этом уравнении каждое неизвестное участвует лишь в одном слагаемом. Поскольку главная и косые диагонали E, J, J^2, …, J^{n-1} покрывают верхний треугольник матрицы $n \times n$ однократно, то уравнение (1.4) распадается на n независимых систем

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} x_{ij} R^{j-1} = A_i, \tag{2.2}$$

где A_i — соответствующая R^i косая диагональ матрицы A ($i = 0$ — главная диагональ).

Уравнение (2.2) представляет собой нормальную линейную систему относительно неизвестных x_{i1}, x_{i2}, …, $x_{i,n-i+1}$ с определителем Вандермонда, составленным из чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$, который не равен 0. Поэтому (2.2) имеет единственное решение и его можно выразить через элементы матрицы A посредством формул Крамера. □

В том случае, когда матрица $A \in T_n$ диагональная, представление (2.1) существенно упрощается. В связи с этим вспомним, что если у треугольной матрицы диагональные элементы попарно различны, то ее жорданова форма будет диагональной. Оказывается, это свойство может быть уточнено следующим образом.

Теорема 4. *Пусть у матрицы $A \in T_n$ диагональные элементы попарно различны. Тогда существует невырожденная матрица $L \in T_n$ такая, что $L^{-1}AL$ будет диагональной.*

Таким образом, треугольную матрицу с попарно различными диагональными элементами можно привести к жордановой (здесь диагональной) форме в пределах самой алгебры T_n.

Доказательство. Зафиксируем номер столбца k, $k = 2, 3, \dots, n$, и рассмотрим матрицу $L_k = E + s_k[1,k]$, где $s_k = a_{1k}/(a_{11} - a_{kk})$.

Так как $(E + s_k[1,k])(E - s_k[1,k]) = E$ в силу $[1,k] \cdot [1,k] = \mathtt{0}$, то $L_k^{-1} = (E - s_k[1,k])$. Подвергнем матрицу A подобному преобразованию посредством L_k. Легко вычислить, что диагональные элементы и элементы ниже первой строки у матрицы $A^{'} = L_k^{-1} A L_k$ совпадают с соответствующими элементами матрицы A, в то время как $a^{'}_{1k} = 0$, а элементы a_{1j} переходят в $a^{'}_{1j} = a_{1j}/(a_{11} - a_{kk})$, $j = k+1, k+2, \dots, n$.

Таким образом, при подобии $L_2^{-1} P L_2$ элемент в позиции $(1,2)$ обнуляется, а элементы первой строки за этой позицией заменяются другими числами. Аналогично под действием $L_3^{-1}(L_2^{-1} P L_2) L_3$ элементы в позициях $(1,1)$ и $(1,2)$ не меняются, элемент в позиции $(1,3)$ обнуляется, а элементы, идущие за ним, как-то преобразуются. Окончательно в матрице $K = L^{-1} P L$, где $L = L_2 L_3 \dots L_n$, первая строка, за исключением элемента $(1,1)$ на диагонали, состоит из нулей. Другими словами, матрица K окажется блочно-треугольной с блоками размеров 1×1 и $(n-1) \times (n-1)$. Поэтому доказательство можно завершить индукцией. □

Приложение. Приведем одно приложение представления (1.2). К тепловым электростанциям обычно подключают специальные агрегаты — вращающиеся регенеративные воздухоподогреватели (ВРВП) — с целью повышения теплоотдачи топлива и одновременно уменьшения теплового загрязнения атмосферы. Моделирование процесса теплообмена между отработанным газом и атмосферным воздухом, с одной стороны, и металлическими насадками ВРВП — с другой, представляет собой достаточно сложную задачу [12; 13]. В работе [14] (см. также [15]) предложена упрощенная модель этого процесса, которая описывается дискретным уравнением

$$x_{n+1} = Ax_n + r_n, \tag{2.3}$$

где x, $r \in \mathbb{R}^m$, m — целое положительное число (будем предполагать $m \geq 2$), матрица $A = (a_{ij})$ принадлежит к типу мономиальных, конкретно

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, \quad i = 2, 3, \ldots, m+1, \quad j = i-1, \\ \beta, \quad i = m+2, m+3, \ldots, 2m, 2m+1, \quad j = i-1, \\ 0 \text{ для остальных значений } \quad i, j \end{cases}$$

(принято $a_{2m+1,2m} = a_{1,2m}$).

Решение уравнения (2.3) с начальным членом x_0 выражается аналогом формулы Коши [16]

$$\chi_n = A^n \chi_0 + \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} r_{k-1},$$

применение которой требует вычисление степеней матрицы A. Если $\alpha = \beta$, то матрица A станет циркулянтом, пропорциональным к матрице перестановки и ее степени легко вычисляются в явном виде [10; 11]. Параметры α и β характеризуют процесс теплообмена между насадками барабана ВРВП, с одной стороны, и соответственно воздухом и газом — с другой, и поэтому следует считать их не равными между собой. В этом случае, несмотря на все еще очень простое строение A, не удается найти явное выражение для ее степеней (возможная причина указывается ниже). Покажем, что представление (1.2) позволяет вывести простое рекуррентное соотношение для вычисления степеней A. С этой целью заметим, что $A = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ \alpha Q & \beta P \end{pmatrix}$, и положим

$$A^n = \begin{pmatrix} A_{11}^{(n)} & A_{12}^{(n)} \\ A_{21}^{(n)} & A_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_{11}^{(n)} = \alpha^n P^n + \sum_{i,j} y_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j}, \qquad A_{12}^{(n)} = \sum_{i,j} z_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j},$$

$$A_{21}^{(n)} = \sum_{i,j} u_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j}, \qquad A_{22}^{(n)} = \beta^n P^n + \sum_{i,j} v_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j}.$$

Тогда $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ \alpha Q & \beta P \end{pmatrix} A^n$ равносильно соотношениям

$$A_{11}^{(n+1)} = \alpha P A_{11}^{(n)} + \beta Q A_{21}^{(n)}, \qquad A_{12}^{(n+1)} = \alpha P A_{12}^{(n)} + \beta Q A_{22}^{(n)},$$

$$A_{21}^{(n+1)} = \alpha Q A_{11}^{(n)} + \beta P A_{21}^{(n)}, \qquad A_{12}^{(n+1)} = \alpha Q A_{12}^{(n)} + \beta P A_{22}^{(n)}. \tag{2.4}$$

Первое из них после сокращения $\alpha^n P^n$ примет вид

$$\sum_{i,j} y_{ij}^{(n+1)} P^{i-1} Q P^{m-j} = \sum_{i,j} \alpha y_{ij}^{(n)} P^i Q P^{m-j} + \sum_{i,j} \beta u_{ij}^{(n+1)} Q P^{i-1} Q P^{m-j}.$$

В первой сумме в левой части члены, соответствующие $i = m$, равны нулю (в силу $P^m = \mathtt{0}$), а во второй — отличен от нуля только член, соответствующий $i = m$ (в силу $QP^kQ = \mathtt{0}$ при $k \neq m-1$ и $QP^{m-1}Q = Q$).

Поскольку система матриц $P^{i-1}QP^{m-j}$ образует базис M_n, то

$$y_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} \beta u_{mj}^{(n)} & \text{для } \; i = 1, \\ \alpha y_{ij}^{(n)} & \text{для } \; i = 2, 3, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Займемся вторым из соотношений (2.4). В развернутом виде оно выглядит следующим образом:

$$\sum_{i,j} z_{ij}^{(n+1)} P^{i-1} Q P^{m-j} = \sum_{i,j} \alpha z_{ij}^{(n)} P^{i} Q P^{m-j} + \beta^{n+1} Q P^{n} + \sum_{i,j} \beta v_{ij}^{(n)} Q P^{i-1} Q P^{m-j}.$$

Аналогично в первой сумме все члены, соответствующие $i = m$, равны нулю, а в последней сумме отличен от $\mathtt{0}$ только тот член, у которого $i = m$. Что касается среднего слагаемого, то оно отлично от $\mathtt{0}$ только при $n \leq m - 1$. Поэтому при $n \geq m$ имеет место

$$z_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} \beta v_{mj}^{(n)} & \text{для} \;\; i = 1, \\ \alpha z_{ij}^{(n)} & \text{для} \;\; i = 2,\, 3,\, \ldots,\, m. \end{cases} \tag{2.6}$$

При $n = 1, 2, \ldots, m - 1$ слагаемое $\beta^{n+1} Q P^{n}$ по виду совпадает с членом $\beta v_{mj}^{(n)} Q P^{m-j}$ при $j = m - n$. Поэтому

$$z_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} \beta^{n+1} + \beta v_{m,m-n}^{(n)} & \text{для} \;\; i = 1,\; j = m - n, \\ \beta v_{m,j}^{(n)} & \text{для} \;\; i = 1,\; j \neq m - n, \\ \alpha z_{ij}^{(n)} & \text{для} \;\; i = 2,\, 3,\, \ldots,\, m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Аналогичные соотношения выводятся для коэффициентов $u_{ij}^{(n)}$ и $v_{ij}^{(n)}$ — для этого достаточно поменять в формулах (2.5)–(2.7) буквы y, z и α на v, u и β соответственно.

В силу (2.7) и аналогичного соотношения для $u_{1,m-n}^{(n+1)}$ при $n = 1, 2, \ldots, m - 1$ выражение для A^n шаг за шагом будет усложняться, хотя начиная с шага $n = m$ наступит стабилизация в числе слагаемых.

Таким образом, выведенные рекуррентные соотношения решают задачу вычисления A^n без обращения к операциям над матрицами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kostov V.P.** The minimal number of generators of a matrix algebra // J. Dynamic. Control Systems. 1996. Vol. 2, no. 4. P. 549–555. doi: 10.1007/BF02254702.
2. **Пирс Р.** Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.
3. **Laffey T.J.** Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity // Linear Algebra Appl. 1986. Vol. 84. P. 123–138. doi: 10.1016/0024-3795(86)90311-3.
4. **Laffey T.J.** Algebras generating by two idempotetnts // Linear Algebra Appl. 1981. Vol. 37. P. 45–53. doi: 10.1016/0024-3795(81)90166-X.
5. **Rowen L., Segev Y.** Associated and Jordan algebras generated by two idempotetns [e-resource]. 2016. Available at: https://arxiv.org/abs/1609.04899. 11 p.
6. **Vais I.** Algebras that are generated by two idempotents // Seminar Analysis (Berlin, 1987/1988). Berlin: Akademie-Verlag, 1988. P. 139–145.
7. **Aslaksen H., Sletsjøe Arne B.** Generators of matrix algebras in dimension 2 and 3 // Linear Algebra Appl. 2009. Vol. 430, no. 1. P. 1–6. doi: 10.1016/j.laa.2006.05.022.
8. **Popov V.L.** An analogue of M. Artin's conjecture on invariants for nonassociative algebras // Lie Groups and Lie Algebras: E. B. Dynkin's Seminar. Providence: Amer. Math. Soc., 1995. P. 121–143. (American Math. Soc. Trans. Ser. 2, vol. 169.)
9. **Варден Б.Л.** Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
10. **Тыртышников Е.Е.** Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2005. 358 с.
11. **Davis P.J.** Circulant matrices: Second edition. Providence: Amer. Math. Soc., 1994. 250 p.
12. **Кирсанов Ю.А.** Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях. М.: Физматлит, 2007. 240 с.
13. **Lee Chi-Liang** Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system // J. Chinese Inst. Eng. 2009. Vol. 77, iss. 5. pp. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552.

14. **Azamov A.A., Bekimov M.A.** A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters // Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. 2017. Vol 23, № 1. P. 12–19. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19 .
15. **Azamov A.A., Bekimov M.A.** Simplified model of the heatexchange process in rotary regenerative air pre-heaters // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
16. **Романко В.К.** Курс разностных уравнений. М.: Физматлит, 2012. 200 с.

Азамов Абдулла
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, г. Ташкент
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Поступила 18.10.2017

REFERENCES

1. Kostov V.P. The minimal number of generators of a matrix algebra. *J. Dynamic. Control Systems*, 1996, vol. 2, no. 4, pp. 549–555. doi: 10.1007/BF02254702 .
2. Pierce R.S. *Associative algebras.* N Y, Springer-Verlag, 1982, 436 p. doi: 10.1007/978-1-4757-0163-0 . Translated to Russian under the title *Assotsiativnye algebry,* Moscow, Mir Publ., 1986, 543 p.
3. Laffey Thomas J. Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity. *Linear Algebra Appl.*, 1986, vol. 84, pp. 123–138. doi: 10.1016/0024-3795(86)90311-3 .
4. Laffey Thomas J. Algebras generating by two idempotetnts. *Linear Algebra Appl.*, 1981, vol. 37, pp. 45–53. doi: 10.1016/0024-3795(81)90166-X .
5. Rowen L., Segev Y. Associated and Jordan algebras generated by two idempotetns [e-resource]. 2016. Available at: https://arxiv.org/abs/1609.04899 . 11 p.
6. Vais I. Algebras that are generated by two idempotents. *Seminar Analysis* (Berlin, 1987/1988). Berlin: Akademie-Verlag, 1988, pp. 139–145.
7. Aslaksen H., Sletsjøe Arne B. Generators of matrix algebras in dimension 2 and 3. *Linear Algebra Appl.*, 2009, vol. 430, no. 1, pp. 1–6. doi: 10.1016/j.laa.2006.05.022 .
8. Popov V.L. An analogue of M. Artin's conjecture on invariants for nonassociative algebras. *Lie Groups and Lie Algebras: E. B. Dynkin's Seminar*, American Math. Soc. Trans. Ser. 2, vol. 169, Providence: Amer. Math. Soc., 1995, pp. 121–143.
9. van der Waerden B.L. *Algebra I, II.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971, 272 p. ISBN: 3540035613 , 1967, 300 p. Translated to Russian under the title van der Varden B.L. *Algebra*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 648 p.
10. Tyrtyshnikov E.E. *Matrichnyi analiz i lineinaya algebra.* [Matrix analysis and linear algebra]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 358 p.
11. Davis Philip J. *Circulant Matrices: Second edition.* Providence: American Math. Soc., 1994, 250 p. ISBN: 0828403384 .
12. Kirsanov Yu.A. *Tsiklicheskie teplovye protsessy i teoriya teploprovodnosti v regenerativnykh vozdukhopodogrevatelyakh.* [Cyclic thermal processes and the theory of thermal conductivity in regenerative air heaters]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 240 p. ISBN: 978-5-9221-0831-7 .
13. Lee Chi-Liang Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system. *J. Chinese Inst. Eng.*, 2009, vol. 77, no. 5, pp. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552 .
14. Azamov A.A., Bekimov M.A. A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 12–19. (in Russian) doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19 .
15. Azamov A.A., Bekimov M.A. Simplified model of the heatexchange process in rotary regenerative air pre-heaters. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2 pp. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
16. Romanko V.K. *Kurs raznostnykh uravnenii.* [Course of difference equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 200 p. ISBN: 978-5-9221-1387-8 .

The paper was received by the Editorial Office on October 18, 2017.

Abdulla Azamovich Azamov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Uzbekistan Academy of Sciences V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, 100041 Uzbekistan,
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com .