ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977.1

О ГЕОМЕТРИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

М. И. Гусев, И. В. Зыков

Рассматривается нелинейная управляемая система, линейная по управляющим переменным. Ограничения на управление и траекторию системы заданы системой изопериметрических ограничений в форме неравенств для интегральных функционалов. В работе получено описание границы множества достижимости системы в заданный момент времени. Показано, что допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является слабо эффективным решением некоторой задачи оптимального управления с векторным критерием при условии полной управляемости линеаризованной системы. Компонентами критерия являются интегральные функционалы, задающие изопериметрические ограничения. Данное утверждение обобщает на случай нескольких совместных интегральных ограничений результаты предыдущих работ авторов. Доказательство опирается на теорему Грейвса для накрывающих отображений и использует свойства производной отображения "вход-выход"и ограничений задачи. Утверждение остается справедливым, если начальное состояние системы не фиксировано, а принадлежит заданному множеству. Осуществляется редукция рассматриваемой задачи к задаче управления со скалярным критерием, зависящим от параметров. В качестве скалярного критерия выбирается чебышевская свертка интегральных функционалов. Получены необходимые условия оптимальности управлений, приводящих на границу множества достижимости, в форме принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: управляемая система, изопериметрические ограничения, множество достижимости, принцип максимума.

M. I. Gusev, I. V. Zykov. On the geometry of reachable sets for control systems with isoperimetric constraints.

A nonlinear control system linear in control variables is considered. The control and the trajectory are subject to a system of isoperimetric constraints in the form of inequalities for integral functionals. We describe the boundary of the reachable set of the system at a given time and show that an admissible control taking the system to the boundary of the admissible set is a weakly efficient solution of a certain optimal control problem with a vector criterion if the linearized system is completely controllable. The components of the criterion are integral functionals that specify isoperimetric constraints. The stated result generalizes the authors' earlier results to the case of several consistent integral constraints. The proof is based on the Graves theorem on covering mappings and on the properties of the derivative of the “input–output” mapping and of the constraints. The result remains valid if the initial state of the system is not fixed but belongs to a given set. The problem is reduced to a control problem with a scalar criterion depending on parameters. The Chebyshev convolution of integral functionals is chosen as the scalar criterion. Necessary conditions are obtained for the optimality of controls taking the system to the boundary of the reachable set in the form of Pontryagin's maximum principle.

Keywords: control system, isoperimetric constraints, reachable set, maximum principle.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-63-75

1. Введение и постановка задачи

Свойствам множеств достижимости в линейных и нелинейных системах и алгоритмам их приближенного построения посвящен ряд исследований. В работах [1; 2] предложены алгоритмы построения множеств достижимости в системах с геометрическими ограничениями на управления, основанные на дискретных аппроксимациях. Внешние и внутренние аппроксимации множеств достижимости при помощи эллипсоидов и многогранников в пространстве

[1]Работа выполнена при поддержке комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-9 “Оценивание динамики нелинейных управляемых систем и маршрутная оптимизация”.

состояний анализировались в [3–5]. Вопросы устойчивости относительно возмущений ограничений, связанные с задачами достижимости, рассматривались в [6; 7].

В данной работе исследуется задача описания границы множества достижимости управляемой системы с изопериметрическими ограничениями на управление и траекторию. Указанная задача может трактоваться как обобщение задачи с интегральными ограничениями на управления игроков. Свойства множеств достижимости в нелинейных системах с интегральными ограничениями и алгоритмы их построения изучались в [8–11]. В отличие от рассматриваемой в [10] постановки мы здесь исследуем систему, у которой начальное состояние не фиксировано, а ограничения заданы системой интегральных неравенств, в которых подынтегральные функции зависят не только от управления, но и от траектории системы.

Далее мы доказываем, что допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является слабо эффективным (слабо оптимальным по Слейтеру) решением некоторой задачи оптимального управления с векторным критерием. Компонентами критерия являются интегральные функционалы, задающие изопериметрические ограничения. В работе осуществляется редукция рассматриваемой задачи к задаче управления со скалярным критерием. Получены необходимые условия оптимальности управлений, приводящих на границу множества достижимости, в форме принципа максимума Понтрягина. Принцип максимума может быть положен в основу алгоритмов вычисления множеств достижимости для систем с геометрическими ограничениями на управление [12–14].

В статье используются следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0_k обозначает нулевой вектор в $\mathbb{R}^k$. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ (x, y) — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма. Для вещественной прямоугольной $k \times m$ матрицы A через $\| A \|$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначается граница S, $\nabla g(x), g_x(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x)$ — матрица Якоби отображения $g(x)$. Символом $\mathsf{col}(x_1, \ldots, x_m)$ обозначаем вектор-столбец в $\mathbb{R}^m$ с координатами x_i. Обозначение $\mathsf{col}(x^1, \ldots, x^k)$, где x^i — векторы-столбцы разной размерности, используется для вектор-столбца, составленного из данных векторов. Через $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ и C будем обозначать соответственно пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_1}$, $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_2}$, $\| \cdot \|_C$.

Мы рассматриваем управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \quad x(t_0) \in X^0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения, X^0 — заданное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x, а также удовлетворяют соответственно условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\| f_1(t, x) \| \le l_1(t)(1+ \| x \|), \tag{1.2}$$

$$\| f_2(t, x) \|_{n \times r} \le l_2(t), \tag{1.3}$$

где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$.

Решением (траекторией) системы (1.1)*, отвечающим управлению* $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, называется абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1.1) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Для любых $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ существует единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, которое будем обозначать как $x(t, x^0, u(\cdot))$.

Пусть заданы k интегральных функционалов $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ вида

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[Q_i(t, x(t)) + u^\top(t) R_i(t, x(t)) u(t) \Big] dt, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Здесь $x(t)$ — решение системы (1.1), отвечающее управлению $u(t)$ и начальному вектору x^0, функции $Q_i(t,x)$ и симметричные матрицы $R_i(t,x)$ предполагаются непрерывными на $[t_0,t_1]\times\ \mathbb{R}^n$.

Пару функций $(x(\cdot),u(\cdot))$ назовем *управляемым процессом*, если $(x(\cdot),u(\cdot))$ удовлетворяют уравнению (1.1). Пусть задан вектор $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k)\in\mathbb{R}^r$ с положительными координатами.

О п р е д е л е н и е 1. Множеством достижимости $G(t_1)$ системы (1.1) будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управляемым процессам $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющим условиям

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))\le\mu_i,\quad i=1,\dots,k. \tag{1.4}$$

Обозначим через $J(x(\cdot),u(\cdot))=(J_1(x(\cdot),u(\cdot)),\dots,J_k(x(\cdot),u(\cdot)))$ векторный функционал, компонентами которого являются функционалы $J_i(x(\cdot),u(\cdot))$. Рассмотрим следующую многокритериальную задачу оптимального управления для системы (1.1):

$$J(x(\cdot),u(\cdot))\to\min,\quad x(t_0)\in X^0,\quad x(t_1)=x^1,\quad u(\cdot)\in\mathbb{L}_2, \tag{1.5}$$

где x^1 — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$. Управляемый процесс $(x(\cdot),u(\cdot))$ назовем допустимым в задаче (1.5), если $x(t_0)\in X^0,\ x(t_1)=x^1$. Напомним следующие определения из теории многокритериальной оптимизации (см., например, [15]).

О п р е д е л е н и е 2. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется эффективным (неулучшаемым, оптимальным по Парето) в задаче (1.5), если не существует допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ такого, что

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))\le J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)),\quad i=1,\dots,k,\quad \text{и}\quad \exists\ i_0\ J_{i_0}(x(\cdot),u(\cdot))<J_{i_0}(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)). \tag{1.6}$$

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется локально эффективным (локально оптимальным по Парето), если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющего неравенствам $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}}<\varepsilon$, $\|u(\cdot)-\hat{u}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}<\varepsilon$, не выполняется (1.6).

О п р е д е л е н и е 3. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется слабо эффективным (оптимальным по Слейтеру) в задаче (1.5), если не существует допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ такого, что

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))<J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)),\quad i=1,\dots,k. \tag{1.7}$$

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется слабо локально эффективным (локально оптимальным по Слейтеру), если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющего неравенствам $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}}<\varepsilon$, $\|u(\cdot)-\hat{u}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}<\varepsilon$, не выполняется (1.7).

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $(x(t),u(t))$ — управляемый процесс. Линейная система

$$\dot{\delta x}=A(t)\delta x+B(t)\delta v,$$

где $A(t)=\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t))+\dfrac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u(t)],\ B(t)=f_2(t,x(t))$, называется линеаризацией системы (1.1) вдоль $(x(t),u(t))$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть функции* $f_1(t,x),f_2(t,x)$ *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.3), *множество* X^0 *ограничено и существуют* $i,\ 1\le i\le k,\ \alpha>0$ *такие, что* $Q_i(t,x)\ge0,\ u^\top R_i(t,x)u\ge\alpha\|u\|^2$ *для всех* $(t,x,u)\in[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$. *Тогда множество траекторий системы* (1.1), *удовлетворяющих ограничению* (1.4), *относительно компактно в пространстве* $\mathbb{C}=\ \mathbb{C}[t_0,t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ удовлетворяют ограничениям (1.4). Тогда, очевидно, $\| u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} \leq \dfrac{\mu_{i_0}}{\alpha}$, и $\| \ x(t_0) \| \leq K$, где K — радиус шара с центром в нуле, содержащего X^0. Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет рассуждения из доказательства [10, Proposition 3]. □

Лемма 2. *Пусть $u_p(\cdot)$ — последовательность управлений из $\mathbb{L}_2$, x_p^0 — последовательность в $\mathbb{R}^n$. Если $u_p(\cdot)$ слабо сходится к $u(\cdot)$, а x_p^0 сходится к x^0 при $p \to \infty$, то последовательность траекторий $x_p(t) = x(t, x_p^0, u_p(\cdot))$ на $[t_0, t_1]$ равномерно сходится к траектории $x(t) = x(t, x^0, u(\cdot))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность x_p^0 лежит в ограниченном множестве, поэтому в силу леммы 1 множество траекторий $x_p(\cdot)$ относительно компактно в пространстве $\mathbb{C}$ и, значит, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_p(t)$ равномерно на $[t_0, t_1]$ сходится к непрерывной вектор-функции $x(t)$. Очевидно, $x(t_0) = x^0$.

Представим $x_p(t)$ в виде

$$x_p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_1(\tau, x_p(\tau)) d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, x_p(\tau)) u_p(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.1}$$

В силу непрерывности f_1 и f_2 имеем $f_i(\tau, x_p(\tau)) \rightrightarrows f_i(\tau, x(\tau)),\ t_0 \leq \tau \leq t_1,\ i = 1, 2$. Второе слагаемое в правой части (2.1) представим в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, x_p(\tau)) u_p(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, x(\tau)) u_p(\tau) d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \left[f_2(\tau, x_p(\tau)) - f_2(\tau, x(\tau)) \right] u_p(\tau) d\tau. \tag{2.2}$$

Так как $u_p(\cdot)$ ограничена в $\mathbb{L}_2$, а $f_2(\tau, x_p(\tau)) \rightrightarrows f_2(\tau, x(\tau))$, то второе слагаемое в правой части (2.2) стремится к нулю. В силу слабой сходимости $u_p(\cdot)$ к $u(\cdot)$

$$\int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, x(\tau)) u_p(\tau) d\tau \to \int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, x(\tau)) u(\tau) d\tau, \quad p \to \infty,$$

для любого $t_0 \leq t \leq t_1$. Переходя в обеих частях равенства (2.1) к пределу, получим, что $x(t) = x(t, x^0, u(\cdot))$. □

Лемма 3. *Пусть $u_p(\cdot) \to u(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$, $x_p^0 \to x^0$, $x(t, x_p^0, u_p(\cdot)) = x_p(t)$, $x(t, x^0, u(\cdot))$=x(t) и линеаризованная вдоль $(x(\cdot), u(\cdot))$ система (1.1) вполне управляема. Тогда для всех достаточно больших p линеаризованная вдоль $(x_p(\cdot), u_p(\cdot))$ система также будет вполне управляемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 следует, что $x_p(t) \rightrightarrows x(t),\ t_0 \leq t \leq t_1$. Дальнейшее доказательство проводится по схеме [10, Lemma 1], так как требует только равномерной сходимости траекторий и сходимости управлений в $\mathbb{L}_2$. □

Лемма 4. *Функционалы $J_i(x(\cdot), u(\cdot)),\ i = 1, \ldots, k$ непрерывны в $\mathbb{C} \times \mathbb{L}_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $u(\cdot), \bar{u}(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, $x(\cdot), \bar{x}(\cdot) \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, k$, справедлива оценка

$$|J_i(x(\cdot), u(\cdot)) - J_i(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))|$$

$$= \Bigg| \int\limits_{t_0}^{t_1} \bigg(\big(Q_i(t, x(t)) - Q_i(t, \bar{x}(t)) \big) + \big(u^\top(t) - \bar{u}^\top(t) \big) R_i(t, x(t)) u(t)$$

$$+\,\bar u^\top(t)R_i(t,x(t))(u(t)-\bar u(t))+\bar u^\top(t)\big(R_i(t,x(t))-R_i(t,\bar x(t))\big)\bar u(t)\Big)dt\Big|$$

$$\le \max_t \parallel Q_i(t,x(t))-Q_i(t,\bar x(t))\parallel\cdot|t_1-t_0|$$

$$+\parallel u(\cdot)-\bar u(\cdot)\parallel_{\mathbb{L}_2}\parallel R_i(\cdot,x(\cdot))\parallel_{\mathbb{C}}\big(\parallel u(\cdot)\parallel_{\mathbb{L}_2}+\parallel \bar u(\cdot)\parallel_{\mathbb{L}_2}\big)$$

$$+\max_t \parallel R_i(t,x(t))-R_i(t,\bar x(t))\parallel\cdot\parallel \bar u(\cdot)\parallel^2_{\mathbb{L}_2}\,. \tag{2.3}$$

Зафиксируем $\delta>0$ и рассмотрим $x(\cdot)$ такие, что $\parallel x(\cdot)-\bar x(\cdot)\parallel_{\mathbb{C}}\le\delta$. Множество $K=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \parallel x(t)-\bar x(t)\parallel\le\delta,\ t_0\le t\le t_1\}$ компактно в $\mathbb{R}^{n+1}$. Из равномерной непрерывности функций $Q_i(t,x)$ и $R_i(t,x)$ на K следует, что $Q_i(t,x(t))\rightrightarrows Q_i(t,\bar x(t)),\ R_i(t,x(t))\rightrightarrows R_i(t,\bar x(t))$ при $\parallel x(\cdot)-\bar x(\cdot)\parallel_{\mathbb{C}}\to 0$. Следовательно, правая часть неравенства (2.3) стремится к нулю при $\parallel u(\cdot)-\bar u(\cdot)\parallel_{\mathbb{L}_2}\to 0$, $\parallel x(\cdot)-\bar x(\cdot)\parallel_{\mathbb{C}}\to 0$. Лемма доказана. □

3. Условия оптимальности для граничных процессов

Управляемый процесс $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющий ограничениям (1.4), будем называть *граничным*, если $x(t_1)\in\partial G(t_1)$.

Теорема 1. *Пусть управляемый процесс* $(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))$ *является граничным, и пусть линеаризация системы* (1.1) *вдоль* $(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))$ *вполне управляема. Тогда* $(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))$ *является локально слабо эффективным решением в задаче* (1.5), *где* $x^1=\hat x(t_1)$ *и* $J_i(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))=\mu_i$ *хотя бы для одного* $i,\ 1\le i\le k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо доказать, что найдется $\varepsilon>0$ такое, что не существует допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, для которого выполнены условия

$$\parallel x(\cdot)-\hat x(\cdot)\parallel_{\mathbb{C}}<\varepsilon,\quad \parallel u(\cdot)-\hat u(\cdot)\parallel_{\mathbb{L}_2}<\varepsilon,\quad x(t_1)=\hat x(t_1)\ \text{ и }\ J_i(x(\cdot),u(\cdot))<J_i(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot)) \tag{3.1}$$

для всех $i=1,\dots,k$. Допустим противное. Тогда для каждого $p\in\mathbb{N}$ существует допустимый процесс $(x_p(\cdot),u_p(\cdot))$, для которого выполняются неравенства (3.1) при $\varepsilon=1/p$. Допустимый процесс $(x_p(\cdot),u_p(\cdot))$ порождается начальным вектором $x_p{}^0=x_p(t_0)\in X^0$ и управлением $u_p(\cdot)\in\mathbb{L}_2$.

В силу леммы 3 найдется $\bar p\in\mathbb{N}$ такое, что линеаризованная вдоль $(x_{\bar p}(\cdot),u_{\bar p}(\cdot))$ система (1.1) будет вполне управляемой. Обозначим

$$\delta=\frac{1}{2}\min_{1\le i\le k}\{J_i(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))-J_i(x_{\bar p}(\cdot),u_{\bar p}(\cdot))\}>0,\quad \bar x^0=x_{\bar p}(t_0).$$

Из непрерывности функционалов J_i (см. лемму 4) следует, что найдется $\sigma>0$ такое, что для любого управления $u(\cdot)$, удовлетворяющего неравенству $\parallel u_{\bar p}(\cdot)-u(\cdot)\parallel_{\mathbb{L}_2}<\sigma$, и отвечающей $u(\cdot)$ траектории системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=\bar x^0$ имеет место неравенство

$$|J_i(x_{\bar p}(\cdot),u_{\bar p}(\cdot))-J_i(x(\cdot),u(\cdot))|<\frac{\delta}{2},\quad i=1,\dots,k,$$

и, следовательно,

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))\le J_i(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))-\frac{\delta}{2}\le\mu_i,\quad i=1,\dots,k.$$

Определим отображение $F:\mathbb{L}_2\to\mathbb{R}^n$ равенством $F(u(\cdot))=x(t_1)$, где $x(t)$ — отвечающая $u(\cdot)$ траектория системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=\bar x^0$. Тогда $F(u_{\bar p}(\cdot))=x^1$ и в силу [10, Lemma 2] производная Фреше $F'(u_{\bar p}(\cdot))$ определяется равенством $F'(u_{\bar p}(\cdot))=\delta x(t_1)$. Здесь $\delta x(t_1)$ — решение линеаризованной вдоль $(x_{\bar p}(\cdot),u_{\bar p}(\cdot))$ системы

$$\delta\dot x(t)=A_{\bar p}(t)\delta x(t)+B_{\bar p}(t)v(t),\quad \delta x(t_0)=0. \tag{3.2}$$

Так как система (3.2) вполне управляема, то $\mathsf{Im}F'(u_{\bar p}(\cdot)) = \mathbb{R}^n$, т. е. отображение $F'(u_{\bar p}(\cdot))$ сюръективно. По теореме Грейвса — Люстерника (см., например, [16; 17]) существует окрестность V точки $x^1 = F(u_{\bar p})$, которая принадлежит образу шара $\{u(\cdot) :\| u(\cdot) - u_{\bar p}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \sigma\}$ при отображении F. Поскольку данный образ состоит из концов траекторий системы (1.1), отвечающих управлениям $u(\cdot)$ и удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) = \bar x^0 \in X^0$, то $V \subset G(t_1)$. Это противоречит условию $x^1 \in \partial G(t_1)$.

Если $J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) < \mu_i$ для всех i, то, взяв в качестве $(x_{\bar p}(\cdot), u_{\bar p}(\cdot))$ пару $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ и придерживаясь приведенных выше рассуждений, приходим к противоречию. Поэтому $J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) = \mu_i$, по крайней мере для одного i. Теорема доказана. □

Применим к функционалам задачи (1.5) чебышевскую свертку критериев. Если управляемый процесс $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ доставляет локальный минимум в задаче (1.5), то найдутся числа $w_i > 0,\ i = 1, \dots, k,\ \sum w_i = 1$, такие, что $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ доставляет локальный минимум функционалу

$$J_w(x(\cdot), u(\cdot)) = \max_{1 \le i \le k} w_i J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \tag{3.3}$$

в классе процессов, удовлетворяющих условиям $x(t_0) \in X^0,\ x(t_1) = x^1$. Доказательство этого факта вполне элементарно, если $J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) > 0,\ i = 1, \dots, k$, достаточно взять коэффициенты $w_i = \dfrac{1}{J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))},\ i = 1, \dots, k$ (см., например, [15]). Рассматриваемый критерий (3.3) не очень удобен, так как функционал J_w не дифференцируем. Однако по известной схеме, используемой, например, в линейных задачах целевого программирования [18], задачу минимизации функционала (3.3) можно заменить эквивалентной задачей

$$v \to \min, \quad w_i J(x(\cdot), u(\cdot)) \le v \tag{3.4}$$

в классе процессов, для которых $x(t_1) = x^1,\ x(t_0) \in X^0$. Действительно, из неравенств

$$w_i J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \le v$$

следует, что $J_w(x(\cdot), u(\cdot)) \le v$ и задача минимизации (3.4) эквивалентна задаче минимизации $J_w(x(\cdot), u(\cdot))$ по $(x(\cdot), u(\cdot))$. Систему (1.1) дополним дифференциальными уравнениями

$$\dot x_{n+i} = Q_i(t, x) + u^\top R_i(t, x) u, \quad i = 1, \dots, k, \tag{3.5}$$

с нулевыми начальными условиями $x_{n+i}(t_0) = 0,\ i = 1, \dots, k$, и уравнением

$$\dot x_{n+k+1} = 0; \tag{3.6}$$

начальное условие для x_{n+k+1} не задано. Будем вначале считать, что X^0 состоит из единственной точки $X^0 = \{x^0\}$. Тогда задачу 3.4 мы можем представить в виде

$$\psi_0(\bar x(t_0), \bar x(t_1)) = x_{n+k+1}(t_1) \to \min \tag{3.7}$$

при ограничениях, задаваемых дифференциальными уравнениями (1.1), (3.5), (3.6) и системой ограничений для правого и левого концов траекторий:

$$\psi_1(\bar x(t_0), \bar x(t_1)) \le 0, \quad \psi_2(\bar x(t_0), \bar x(t_1)) = 0.$$

Здесь и далее $\bar x, \bar y \in \mathbb{R}^{n+k+1}$ — векторы с координатами

$$\bar x = \mathsf{col}(x_1, \dots, x_{n+k+1}) = \mathsf{col}(x, x_{n+1}, \dots, x_{n+k+1}),$$

$$\bar y = \mathsf{col}(y_1, \dots, y_{n+k+1}) = \mathsf{col}(y, y_{n+1}, \dots, y_{n+k+1}), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функции $\psi_1 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^k$ и $\psi_2 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{2n+k}$ определены равенствами

$$\psi_1(\bar x, \bar y) = \mathsf{col}(w_1 y_{n+1} - y_{n+k+1}, w_2 y_{n+2} - y_{n+k+1}, \dots, w_k y_{n+k} - y_{n+k+1}),$$

$$\psi_2(\bar{x},\bar{y}) = \mathsf{col}(x_1 - x_1^0,\dots,x_n - x_n^0, 0,\dots,0, y_1 - x_1^1,\dots,y_n - x_n^1) = \mathsf{col}(x - x^0, 0_k, y - x^1).$$

Таким образом, $\psi_1(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$ зависит только от $\bar{x}(t_1)$, а $\psi_2(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$ от $\bar{x}(t_0)$ и $\bar{x}(t_1)$. Рассмотрим функцию Понтрягина следующего вида

$$H(t,p,\nu,x,u) = p^\top(f_1(t,x) + f_2(t,x)u) - \sum_{i=1}^{k}\nu_i\Big(Q_i(t,x) + u^\top R_i(t,x)u\Big).$$

Теорема 2. *Пусть допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ есть решение задачи (3.4). Тогда существуют вектор $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_k) \neq 0$ с неотрицательными координатами и решение $p(t)$ дифференциального уравнения*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\,(t,p(t),\nu,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) \tag{3.8}$$

такие, что

$$H(t,p(t),\nu,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) = \max_{u\in\mathbb{R}^r} H(t,p(t),\nu,\hat{x}(t),u) \tag{3.9}$$

и, следовательно,

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{k}\nu_i R_i(t,\hat{x}(t))\Big)^{-1} f_2\,(t,\hat{x}(t))\,p(t). \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\hat{\bar{x}}(t)$ вектор-функцию

$$\hat{\bar{x}}(t) = \mathsf{col}\,(\hat{x}(t), x_{n+1}(t),\dots,x_{n+k+1})\,,$$

где $x_i(t),\quad i = n+1,\dots,n+k+1$ — решения дифференциальных уравнений (3.5), (3.6), получаемые при подстановке в их правую часть $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$. Тогда управляемый процесс $\big(\hat{\bar{x}}(\cdot),\hat{u}(\cdot)\big)$ доставляет локальное решение в задаче (3.7) для системы (1.1), (3.5), (3.6) при ограничениях

$$\psi_1(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)) \le 0,\quad \psi_2(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)) = 0. \tag{3.11}$$

Поскольку локальный минимум в $\mathbb{L}_2$ допускает игольчатые вариации управления, то процесс $(\hat{\bar{x}}(t),\hat{u}(t))$ удовлетворяет принципу максимума.

Введем функцию Понтрягина

$$H_1(t,\bar{p},\bar{x},u) = p^\top(f_1(t,x) + f_2(t,x)u) + \sum_{i=1}^{k} p_{n+1}\big(Q_i(t,x) + u^\top R_i(t,x)u\big),$$

где $\bar{p} = \mathsf{col}(p_1,\dots,p_n,p_{n+1},\dots,p_{n+k}) = \mathsf{col}(p,,p_{n+1},\dots,p_{n+k})$, и функцию

$$l(\bar{x},\bar{y}) = \lambda_0\psi_0(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_1^\top\psi_1(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_2^\top\psi_2(\bar{x},\bar{y}).$$

Тогда (см.,например, [19, §5, т. 2]) найдутся $(\lambda_0,\lambda^1,\lambda^2) \neq 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^k$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{2n+k}$, $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0$ и функция $\bar{p}(t)$ такие, что

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial \bar{x}}\left(t,\bar{p}(t),\hat{\bar{x}}(t),\hat{u}(t)\right), \tag{3.12}$$

выполнены условия трансверсальности

$$\bar{p}(t_0) = l_{\bar{x}}\left(\hat{\bar{x}}(t_0),\hat{\bar{x}}(t_1)\right),\quad \bar{p}(t_1) = -l_{\bar{y}}\left(\hat{\bar{x}}(t_0),\hat{\bar{x}}(t_1)\right), \tag{3.13}$$

условие дополняющей нежесткости

$$\lambda^{1^\top}\psi_1(\hat{\bar{x}}(t_0),\hat{\bar{x}}(t_1)) = 0$$

и условие максимума

$$H_1(t,\bar{p}(t),\hat{\bar{x}}(t),\hat{u}(t)) = \max_{u\in\mathbb{R}^r} H(t,\bar{p}(t),\hat{\bar{x}}(t),u). \tag{3.14}$$

Представим вектор $\lambda^2\in\mathbb{R}^{2n+k}$ в виде $\lambda^2 = \begin{pmatrix}\lambda_I^2\\ \lambda_{II}^2\end{pmatrix}$, где $\lambda_I^2\in\mathbb{R}^{n+k}$, $\lambda_{II}^2\in\mathbb{R}^n$. Тогда из условий трансверсальности (3.13) будем иметь

$$\bar{p}(t_0) = \begin{pmatrix}\lambda_I^2\\ 0\end{pmatrix}, \quad \bar{p}(t_1) = -\begin{pmatrix}\lambda_{II}^2\\ \lambda_w^1\\ \lambda_0-\sum\lambda_i^1\end{pmatrix},$$

где обозначено $\lambda_w^1 = \mathsf{col}(\lambda_1^1 w_1,\ldots,\lambda_k^1 w_k)$.

Из уравнений (3.12) вытекает

$$\dot{p}_{n+i}(t) = 0, \quad i=1,\ldots,k+1,$$

следовательно, $\dot{p}_{n+i}(t) = \mathrm{const}$. Учитывая условия трансверсальности, имеем $p_{n+i}(t)\equiv w_i\lambda_i^1$, $i=1,\ldots,k$, и $p_{n+k+1}(t)\equiv 0$. Из последнего равенства получаем $\lambda_0-\sum_{i=1}^k\lambda_i^1 = 0$. Допустим, что $\lambda_0 = 0$, тогда $\sum\lambda_i^1 = 0$. Учитывая неравенства $\lambda_i^1\geq 0$, $i=1,\ldots,k$, выводим $\lambda^1 = 0$.

Соотношение (3.14) в этом случае принимает вид

$$p^\top(t)f_2(t,\hat{x}(t))\hat{u}(t) = \max_{u\in\mathbb{R}^2} p^\top(t)f_2(t,\hat{x}(t))u, \tag{3.15}$$

где $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$. Здесь $A(t)$ — матрица линеаризованной вдоль $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ системы (1.1). Пусть матрица $B(t)$ определяется равенством $B(t) = f_2(t,\hat{x}(t))$. Равенство (3.15) возможно только при $p^\top(t)B(t)\equiv 0$. Так как по условию пара $(A(t),B(t))$ вполне управляема, то из условия $p^\top(t)B(t)\equiv 0$ следует, что $p(t)\equiv 0$. Тогда из условий трансверсальности получаем равенство $\lambda^2 = 0$. Таким образом, $(\lambda_0,\lambda^1,\lambda^2) = 0$, что противоречит утверждению принципа максимума. Наше допущение, что $\lambda_0 = 0$, привело к противоречию, значит, $\lambda_0 > 0$ и, следовательно, $\sum\lambda_i^1 = \lambda_0 > 0$, т.е. λ^1 — ненулевой вектор.

Введем неотрицательные величины ν_i равенствами $\nu_i = \lambda_i^1 w_i$, $i=1,\ldots,k$, очевидно, $\sum_i\nu_i > 0$. В данных обозначениях соотношение максимума (3.14) перейдет в (3.9). Приравнивая нулю градиент H по u и учитывая, что $\sum_{i=1}^k\nu_i R_i(t,\hat{x}(t))$ — невырожденная матрица, получим равенство (3.10). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Если условие $J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) > 0$, $i=1,\ldots,k$, не выполнено, формулировка теоремы 2 остается справедливой. В этом случае можно определить $M = \max_i |J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))|+1$ и ввести функционалы $\tilde{J}_i$, добавляя к J_i константу M:

$$\tilde{J}_i(x(\cdot),u(\cdot)) = J_i(x(\cdot),u(\cdot)) + M.$$

Очевидно, $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ является локально оптимальным по Слейтеру процессом для векторного функционала $\tilde{J} = (\tilde{J}_1\ldots,\tilde{J}_k)$. Положим в этом случае $w_i = \dfrac{1}{\tilde{J}_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))} > 0$, тогда $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ локально минимизирует функционал

$$\max_i w_i\tilde{J}_i(x(\cdot),u(\cdot)) = \max_i w_i\left(J_i(x(\cdot),u(\cdot)) + M\right).$$

В этом случае ограничения (3.4) примут вид $w_iJ_i(x(\cdot),u(\cdot)) + w_iM\leq v$ и схема доказательства теоремы полностью сохраняется. По-другому будут только выглядеть условия дополняющей нежесткости, которые в окончательной формулировке теоремы не используются.

Предположим далее, что X^0 имеет вид $X^0 = \{x\colon g_j(x)\leq 0,\ j=1,\ldots,m\}$, $m\geq 1$, где $g_j(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Теорема 3. *Пусть допустимый процесс* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *есть локальное решение задачи* (3.4) *и линеаризованная вдоль* $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$ *система вполне управляема. Тогда существуют векторы* $\nu \geq 0,\ \nu \neq 0,\ \gamma \geq 0$ *и вектор-функция* $p(t)$ *такие, что выполнены условия* (3.8)–(3.10) *и*

$$p(t_0) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \nabla g_j(\hat{x}(t_0)), \quad \gamma_j g_j(\hat{x}(t_0)) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, как и ранее при доказательстве теоремы 2, управляемый процесс $(\hat{\bar{x}}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ для системы (1.1), (3.5), (3.6). Терминальные ограничения имеют в рассматриваемой задаче вид (3.11), где

$$\psi_1 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{k+1} \ \text{ и } \ \psi_2 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{n+k}$$

определяются соотношениями

$$\psi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \mathsf{col}(g(x), w_1 y_{n+1} - y_{n+k+1}, \ldots, w_k y_{n+k} - y_{n+k+1}),$$

$$\psi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \mathsf{col}(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, y_1 - x_1^1, \ldots, y_n - x_n^1).$$

Определим функцию

$$l(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_0 \psi_0(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j g_j(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^1 (w_i y_{n+i} - y_{n+k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 x_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k+i}^2 (y_i - x_i^1),$$

где $\lambda_0, \gamma_j, \lambda_i^1, \lambda_i^2$ — заданные параметры (множители Лагранжа). Из принципа максимума (см. [19, § 5, т. 2]) следует существование множителей $\lambda_0 \geq 0, \gamma \geq 0, \lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0,\ (\lambda_0, \gamma, \lambda^1, \lambda^2) \neq 0$ и функций $\bar{p}(t)$ таких, что выполняются соотношения (3.12), (3.14), условия трансверсальности (3.13) и условия дополняющей нежесткости

$${\lambda^1}^\top \psi_1(\hat{\bar{x}}(t_0), \hat{\bar{x}}(t_1)) = 0, \quad \gamma^\top g(x(t_0)) = 0.$$

Из условий трансверсальности имеем

$$\bar{p}(t_0) = \begin{pmatrix} \sum \gamma_i \nabla g_i(x(t_0)) \\ \lambda_I^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}(t_1) = \begin{pmatrix} \lambda_{II}^2 \\ \lambda_w \\ \lambda_0 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^1 \end{pmatrix}.$$

(см. обозначения в доказательстве теоремы 2). Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2. □

Пусть управляемая система линейна:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{3.17}$$

вполне управляема на $[t_0, t_1]$, функционалы $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ имеют вид

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[x^\top(t) Q_i(t) x(t) + u(t)^\top R_i(t) u(t) \Big] \, dt,$$

где $Q_i(t), R_i(t)$ — непрерывные симметричные матрицы; $Q_i(t)$ неотрицательно определена, $R_i(t)$ положительно определена для всех $t \in [t_0, t_1]$; множество X^0 выпукло.

Теорема 4. *Пусть пара* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *является граничным процессом. Тогда* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *есть парето-оптимальное решение задачи* (3.4), *где* $x^1 = \hat{x}(t_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ в виде суммы

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = J_i^1(x(\cdot)) + J_i^2(u(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где

$$J_i^1(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} x^\top(t)Q_i(t)x(t)dt, \quad J_i^2(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} u^\top(t)R_i(t)u(t)dt.$$

Очевидно, J_i^1 выпуклый по $x(\cdot)$, а J_i^2 строго выпуклый по $u(\cdot)$ функционалы. Предположим, что процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ не является парето-оптимальным в задаче (3.4). Тогда найдется пара $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, удовлетворяющая ограничениям задачи (3.4) такая, что

$$J_i(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \leq J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, k,$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое. Следовательно, $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \neq (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Если допустить, что $\bar{u}(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$, то тогда $\bar{x}(t)$ и $\hat{x}(t)$ — две траектории одной и той же системы дифференциальных уравнений, приходящие в одну точку $\hat{x}(t_1) = x^1$. Из теоремы единственности решения тогда получим $\bar{x}(t) \equiv \hat{x}(t)$.

Таким образом, $\bar{u}(\cdot) \neq \hat{u}(\cdot)$. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ положим

$$u_\alpha(\cdot) = \alpha\bar{u}(\cdot) + (1-\alpha)\hat{u}(\cdot)$$

и обозначим через $x_\alpha(t)$ траекторию системы (3.17), порожденную управлением $u_\alpha(\cdot)$ и начальным вектором

$$x_\alpha(t_0) = \alpha\bar{x}(t_0) + (1-\alpha)\hat{x}(t_0) \in X^0.$$

Тогда $x_\alpha(t) = \alpha\bar{x}(t) + (1-\alpha)\hat{x}(t)$. В силу выпуклости J_i^1 и строгой выпуклости J_i^2 имеем $(i = 1, \ldots, k)$

$$J_i^1(x_\alpha(\cdot)) \leq \alpha J_i^1(\bar{x}(\cdot)) + (1-\alpha)J_i^1(\hat{x}(\cdot)), \quad J_i^2(u_\alpha(\cdot)) < \alpha J_i^2(\bar{u}(\cdot)) + (1-\alpha)J_i^2(\hat{u}(\cdot))$$

для всех $0 < \alpha < 1$, и, значит,

$$J_i(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) < J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, k.$$

При $\alpha \to 0 \quad (x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) \to (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ и, значит, пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ не является локально оптимальной по Слейтеру, что противоречит утверждению теоремы 1. □

Из выпуклости функционалов $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ и линейности ограничений задачи (3.16) следует существование коэффициентов $w_i \geq 0$, $\sum w_i = 1$ таких, что $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ минимизирует линейную свертку критериев

$$J_w(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{i=1}^{k} w_i J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \to \min$$

при ограничениях (3.16). Этот факт следует из леммы Карлина [20]. Обозначим

$$Q_w(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i Q_i(t), \quad R_w(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i R_i(t),$$

матрица $Q_w(t)$ неотрицательно определена, $R_w(t)$ положительно определена для любого $t \in [t_0, t_1]$. Пусть для простоты $X^0 = \{x^0\}$. Из принципа максимума, учитывая полную управляемость системы (3.16), получим, что существует решение $p(t)$ сопряженной системы такое, что

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2} R_w^{-1}(t) B^\top(t) p(t).$$

Для пары $(x(t), p(t))$ ($x(t)$ — отвечающая $\hat{u}$ траектория) получим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t)R_w^{-1}(t)B^\top(t) \\ 2Q_w(t) & -A^\top(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix},$$

$x(t_0) = x^0,\ p(t_0) = p^0$.

Ограничения $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \le \mu_i$ можно заменить системой квадратичных неравенств

$$x^{0\top} S_w^{1i} x^0 + x^{0\top} S_w^{2i} p^0 + p^{0\top} S_w^{3i} p^0 \le \mu_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.18}$$

относительно p^0. Здесь $S_w^{1i},\ S_w^{2i},\ S_w^{3i}$ — $n \times n$ матрицы, S_w^{1i} неотрицательно определены, а S_w^{3i} положительно определены (см., например, [21]). Хотя бы одно из неравенств (3.18) должно выполняться как равенство. Все граничные точки области достижимости содержатся среди решений управляемой системы, порождаемых решениями p^0 системы (3.18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Незнахин А.А., Ушаков В.Н.** Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Вычисл. математика и математическая физика. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–908.
2. **Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320–328.
3. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Basel: Birkhäuser, 1997. 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9 .
4. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
5. **Filippova T.F.** Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity // AIP Conference Proc. 2016. Vol. 1773. P. 1–10. doi: 10.1063/1.4964998 .
6. **Ченцов А.Г.** Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления // Изв. вузов. Математика. 1995. № 2. С. 60–71; № 3 С. 62–73.
7. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805 .
8. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Series A: Math. Analysis. 2004. Vol. 11, no. 2-3. C. 255–267.
9. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls / K.G. Guseinov, O. Ozer, E. Akyar, V.N. Ushakov // Nonlinear Diff. Eq. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. **Gusev M.I., Zykov I.V.** On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
11. **Gusev M.I.** An algorithm for computing boundary points of reachable sets of control systems under integral constraints // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 1. P. 44–51. doi: 10.15826/umj.2017.1.003 .
12. **Baier R., Gerdts M., Xausa I.** Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .
13. **Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** Построение множества достижимости интегратора Брокетта // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 5. С. 707–724.
14. **Горнов А.Ю.** Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.
15. **Подиновский В.В., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
16. **Dontchev A.L.** The Graves theorem revisited // J. Convex Anal. 1996. Vol. 3, no. 1. P. 45–53.
17. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.

18. **Штойер Р.** Многокритериальная оптимизация Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
19. **Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал пресс, 2006. 144 с.
20. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 835 с.
21. **Gusev M.I., Zykov I.V.** A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2, P. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

Поступила 31.10.2017

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Зыков Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: zykoviustu@mail.ru

REFERENCES

1. Neznakhin A.A., Ushakov V.N. A grid method for the approximate construction of the viability kernel for a differential inclusion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 6, pp. 846–859.
2. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
3. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Basel, Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9 .
4. Kostousova E.K. External and internal parallelotopic estimates for attainability sets. *Vychisl. Tekhnol.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).
5. Filippova T.F. Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity. *AIP Conference Proc.*, 2016, vol. 1773, pp. 1–10. doi: 10.1063/1.4964998 .
6. Chentsov A.G. Asymptotic attainability with perturbation of integral constraints in an abstract control problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, part I: no. 3, pp. 60–71, part II: no. 2, pp. 57–68.
7. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* Dordrecht, Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997, 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805-0 .
8. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
9. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Diff. Eq. and Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
11. Gusev M.I. An algorithm for computing boundary points of reachable sets of control systems under integral constraints. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 44–51. doi: 10.15826/umj.2017.1.003 .
12. Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .

13. Vdovin S.A., Taras'ev A.M., Ushakov V.N. Construction of an attainability set for the Brockett integrator. *J. Appl. Math. Mech.*, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 631–646. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2004.09.001 .
14. Gornov A.Yu. *Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya.* [The computational technologies for solving optimal control problems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 278 p. ISBN: 978-5-02-023284-6 .
15. Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach.* [Pareto optimal solutions of multicriteria problems]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 256 p. ISBN (2nd ed.): 978-5-9221-0812-6 .
16. Dontchev A.L. The Graves theorem revisited. *J. Convex Anal.*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 45–53.
17. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik's theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surveys*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973 .
18. Steuer R.E. *Multiple criteria optimization: theory, computation, and application.* N Y, Willey, 1986, 546 p. ISBN: 0471859702 . Translated to Russian under the title *Mnogokriterial'naya optimizatsiya. Teoriya, vychisleniya i prilozheniya.* M.: Radio i svjaz' Publ., 1992. 504 p.
19. Arutyunov A.V., Magaril-Ilyaev G.G., Tikhomirov V.M. *Printsip maksimuma Pontryagina. Dokazatel'stvo i prilozheniya.* [Pontryagin maximum principle. Proof and applications]. Moscow, Faktorial Press, 2006, 144 p. ISBN: 5886880828 .
20. Karlin S. *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. Vol. I, II.* London, Paris, Pergamon Press. 1959, Vol. I: 433 p. ISBN: 9781483222981 . Vol. II: 386 p. ISBN: 9781483224008 . Translated to Russian under the title *Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i ekonomike.* Moscow, Mir Publ., 1964, 835 p.
21. Gusev M.I., Zykov I.V. A numerical method for solving linear-quadratic control problems with constraints. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

The paper was received by the Editorial Office on October 31, 2017.

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: gmi@imm.uran.ru .

Igor' Vladimirovich Zykov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: zykoviustu@mail.ru .