ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.955

ОБ АППРОКСИМАЦИИ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Рассматривается минимаксное решение задачи Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными с условием на правом конце. Уравнения Гамильтона — Якоби рассматриваемого вида возникают в задачах динамической оптимизации систем с запаздыванием. Их аппроксимация сопряжена с дополнительными вопросами корректного перехода от бесконечномерного функционального аргумента искомого решения к конечномерному. Ранее изучались аппроксимации, основанные на кусочно-линейном приближении функционального аргумента и свойствах корректности минимаксных решений. В данной статье предложена и обоснована схема аппроксимации функциональных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными обычными уравнениями Гамильтона — Якоби с частными производными, которая основана на аппроксимации характеристических функционально-дифференциальных включений, используемых при определении искомого минимаксного решения, при помощи обыкновенных дифференциальных включений.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, обобщенные решения, коинвариантные производные, конечномерные аппроксимации, системы с запаздыванием.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. Approximation of minimax solutions to Hamilton–Jacobi functional equations for delay systems.

A minimax solution of the Cauchy problem for a functional Hamilton–Jacobi equation with coinvariant derivatives and a condition at the right end is considered. Hamilton–Jacobi equations of this type arise in dynamical optimization problems for time-delay systems. Their approximation is associated with additional questions of the correct transition from the infinite-dimensional functional argument of the desired solution to the finite-dimensional one. Earlier, the schemes based on the piecewise linear approximation of the functional argument and the correctness properties of minimax solutions were studied. In this paper, a scheme for the approximation of Hamilton–Jacobi functional equations with coinvariant derivatives by ordinary Hamilton–Jacobi equations with partial derivatives is proposed and justified. The scheme is based on the approximation of the characteristic functional–differential inclusions used in the definition of the desired minimax solution by ordinary differential inclusions.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, generalized solutions, coinvariant derivatives, finite-dimensional approximations, time-delay systems.

MSC: 35F21, 49L99, 34K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-53-62

Введение

Данная работа, инициированная, с одной стороны, исследованиями по теории позиционных дифференциальных игр [1–5], а с другой — развитием теории обобщенных (минимаксных [6], вязкостных [7]) решений уравнений Гамильтона — Якоби, примыкает к работам [8–10], посвященным функциональным уравнениям Гамильтона — Якоби, возникающим в задачах динамической оптимизации систем с запаздыванием.

Рассматривается минимаксное решение задачи Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными [9–11] с условием на правом конце. В теории уравнений Гамильтона — Якоби большое внимание уделяется аппроксимационным

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3047.2017.1.

схемам построения решений (см., например, [6;12–14]). Аппроксимация рассматриваемого уравнения Гамильтона — Якоби сопряжена с дополнительными вопросами корректного перехода от бесконечномерного функционального аргумента искомого решения к конечномерному. В работе [15] (см. также [10, § 10]) предложена аппроксимация функциональных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными, основанная на кусочно-линейном приближении функционального аргумента и свойствах корректности минимаксных решений. Ниже приводится аппроксимационная схема, которая основана на аппроксимации используемых при определении минимаксного решения характеристических дифференциальных включений с запаздыванием при помощи обыкновенных дифференциальных включений. Применяемые аппроксимации систем с запаздыванием восходят к работам [16–18] и подробно исследованы в [19].

1. Формулировка результата

Пусть зафиксированы числа $t_0, \vartheta \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta$ и $h > 0$. Через $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой $\|\cdot\|_C$. Для краткости положим $C = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$.

Рассматривается задача Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными

$$\partial_t\varphi(t,w(\cdot)) + H\big(t,w(\cdot),\nabla\varphi(t,w(\cdot))\big) = 0, \quad (t,w(\cdot)) \in [t_0,\vartheta) \times C, \tag{1.1}$$

с условием на правом конце

$$\varphi(\vartheta,w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in C. \tag{1.2}$$

Здесь искомым является функционал $\varphi : [t_0,\vartheta]\times C \to \mathbb{R}$, $\partial_t\varphi(t,w(\cdot))$ и $\nabla\varphi(t,w(\cdot))$ — коинвариантные производные [9–11] этого функционала в точке $(t,w(\cdot))$. Эти производные однозначно определяются соотношением

$$\varphi(\tau,x_\tau(\cdot)) - \varphi(t,w(\cdot)) = (\tau-t)\partial_t\varphi(t,w(\cdot)) + \langle x_\tau(0) - w(0), \nabla\varphi(t,w(\cdot))\rangle + o(\tau-t), \quad \tau\in[t,\vartheta],$$

которое должно выполняться для любой функции $x(\cdot) \in C([t-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)$, являющейся липшицевой на отрезке $[t,\vartheta]$ и удовлетворяющей равенству $x(t+\xi) = w(\xi)$ при $\xi \in [-h,0]$. Здесь функция $x_\tau(\cdot) \in C$ определяется по $x(\cdot)$ и τ согласно равенству $x_\tau(\xi) = x(\tau+\xi)$, $\xi\in[-h,0]$, символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означают скалярное произведение векторов, бесконечно малое $o(\delta)$ может зависеть от t и $x(\cdot)$, $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Предполагаются выполненными следующие условия:

$(A.1)$ Функционалы $H : [t_0,\vartheta]\times C\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\sigma : C \to \mathbb{R}$ непрерывны.

$(A.2)$ Существует такое число $a > 0$, что

$$|H(t,w(\cdot),s) - H(t,w(\cdot),r)| \leqslant a(1+\|w(\cdot)\|_C)\|s-r\|, \quad (t,w(\cdot))\in[t_0,\vartheta]\times C, \quad s,r\in\mathbb{R}^n.$$

$(A.3)$ Для любого $\alpha \geqslant 0$ справедливо равенство

$$H(t,w(\cdot),\alpha s) = \alpha H(t,w(\cdot),s), \quad (t,w(\cdot))\in[t_0,\vartheta]\times C, \quad s\in\mathbb{R}^n.$$

$(A.4)$ Для любого компакта $W \subset C$ существует такое число $\lambda = \lambda(W) > 0$, что

$$|H(t,w(\cdot),s) - H(t,z(\cdot),s)| \leqslant \lambda\|s\|\|w(\cdot)-z(\cdot)\|_C, \quad t\in[t_0,\vartheta], \quad w(\cdot),z(\cdot)\in W, \quad s\in\mathbb{R}^n.$$

Здесь символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Пусть U и V — непустые множества и многозначные отображения $F^* = F^*(t,w(\cdot),v) \subset \mathbb{R}^n$, $F_* = F_*(t,w(\cdot),u) \subset \mathbb{R}^n$, $(t,w(\cdot))\in[t_0,\vartheta]\times C$, $u\in U$, $v\in V$, обладают следующими свойствами:

$(B.1)$ Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $w(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ и $v \in V$ множества $F^*(t, w(\cdot), v)$, $F_*(t, w(\cdot), u)$ являются непустыми выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^n$.

$(B.2)$ Для любых фиксированных $u \in U$ и $v \in V$ многозначные отображения $F^*(t, w(\cdot), v)$ и $F_*(t, w(\cdot), u)$ полунепрерывны сверху по включению при изменении $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C$.

$(B.3)$ Существует число $c > 0$, для которого справедлива оценка

$$\|f\| \leqslant c(1 + \|w(\cdot)\|_C), \quad f \in F^*(t, w(\cdot), v) \cup F_*(t, w(\cdot), u),$$
$$(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

$(B.4)$ Имеет место равенство

$$H(t, w(\cdot), s) = \sup_{v \in V} \min_{f \in F^*(t, w(\cdot), v)} \langle s, f \rangle = \inf_{u \in U} \max_{f \in F_*(t, w(\cdot), u)} \langle s, f \rangle,$$
$$(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим (см. [10, с. 83]), что в силу $(A.1)$–$(A.4)$ эти условия выполнены, например, для

$$U = V = \mathbb{R}^n,$$
$$F^*(t, w(\cdot), v) = \big\{ f \in \mathbb{R}^n : \ \|f\| \leqslant \sqrt{2} a (1 + \|w(\cdot)\|_C), \ \langle f, v \rangle \geqslant H(t, w(\cdot), v) \big\},$$
$$F_*(t, w(\cdot), u) = \big\{ f \in \mathbb{R}^n : \ \|f\| \leqslant \sqrt{2} a (1 + \|w(\cdot)\|_C), \ \langle f, u \rangle \leqslant H(t, w(\cdot), u) \big\}.$$

Пусть $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C$, $u \in U$ и $v \in V$. Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием

$$\dot{x}(\tau) \in F^*(\tau, x_\tau(\cdot), v), \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.3}$$

при начальном условии

$$x(\tau) = w(\tau - t), \quad \tau \in [t - h, t]. \tag{1.4}$$

Здесь по-прежнему $x_\tau(\xi) = x(\tau + \xi)$, $\xi \in [-h, 0]$. Под решением задачи (1.3), (1.4) понимаем функцию $x(\cdot) \in C([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которая при $\tau \in [t - h, t]$ удовлетворяет равенству (1.4), а при $\tau \in [t, \vartheta]$ является абсолютно непрерывной и почти всюду удовлетворяет соотношению (1.3). Множество всех решений задачи (1.3), (1.4) обозначим через $X^*(t, w(\cdot), v)$. Соответственно через $X_*(t, w(\cdot), u) \subset C([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ обозначаем множество удовлетворяющих условию (1.4) решений дифференциального включения

$$\dot{x}(\tau) \in F_*(\tau, x_\tau(\cdot), u), \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{1.5}$$

Отметим, что в силу свойств $(B.1)$–$(B.3)$ множества $X^*(t, w(\cdot), v)$ и $X_*(t, w(\cdot), u)$ являются непустыми компактами в $C([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [10, теорема P2.1]).

Из результатов [10] (см. теорему 7.1 с учетом утверждения 10.1) следует, что при условиях $(A.1)$–$(A.4)$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное минимаксное решение — непрерывный функционал $\varphi : [t_0, \vartheta] \times C \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий краевому условию (1.2) и неравенствам

$$\begin{aligned} \sup_{(t, w(\cdot), v, \tau)} \ \min_{x(\cdot)} \big(\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) \big) \leqslant 0, \\ \inf_{(t, w(\cdot), u, \tau)} \ \max_{y(\cdot)} \big(\varphi(\tau, y_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) \big) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta) \times C, \ \ u \in U, \ \ v \in V, \ \ \tau \in (t, \vartheta], \ \ x(\cdot) \in X^*(t, w(\cdot), v), \ \ y(\cdot) \in X_*(t, w(\cdot), u),$$

каковы бы ни были удовлетворяющие условиям $(B.1)$–$(B.4)$ отображения F^* и F_*, определяющие множества $X^*(t, w(\cdot), v)$ и $X_*(t, w(\cdot), u)$. Это решение непрерывно зависит [10, теорема 9.1] от изменения функционалов H, σ и в точках коинвариантной дифференцируемости удовлетворяет [10, утверждение 4.2] уравнению (1.1).

Следуя [19], аппроксимируем дифференциальные включения с запаздыванием (1.3)–(1.5) при помощи обыкновенных дифференциальных включений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\mathbf{n} = n(m+1), \quad \mathbb{R}^{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-раз}}.$$

Всюду далее элементы пространства $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ будем выделять жирным шрифтом. Пусть $\Delta h = h/m$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](\cdot) \in C$ — линейный сплайн на отрезке $[-h, 0]$ с узлами в точках $-i\Delta h$ и значениями $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](-i\Delta h) = y_i$, $i = \overline{0, m}$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{y}_0(\tau) \in F^*\big(\tau, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau)](\cdot), v\big), \quad \dot{y}_i(\tau) = (y_{i-1}(\tau) - y_i(\tau))/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.7}$$

$$\dot{y}_0(\tau) \in F_*\big(\tau, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau)](\cdot), u\big), \quad \dot{y}_i(\tau) = (y_{i-1}(\tau) - y_i(\tau))/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.8}$$

при начальном условии

$$y_i(t) = w(-i\Delta h), \quad i = \overline{0, m}. \tag{1.9}$$

Обозначим через $\mathbf{F}^*(t, \mathbf{y}, v)$ (через $\mathbf{F}_*(t, \mathbf{y}, u)$) множество векторов $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ таких, что $f_0 \in F^*(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](\cdot), v)$ (соответственно, $f_0 \in F_*(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](\cdot), u)$) и $f_i = (y_{i-1} - y_i)/\Delta h$, $i = \overline{1, m}$. Положим

$$w_i = w(-i\Delta h), \quad i = \overline{0, m}, \quad \mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_m). \tag{1.10}$$

Тогда соотношения (1.7)–(1.9) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) \in \mathbf{F}^*(\tau, \mathbf{y}(\tau), v), \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.11}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) \in \mathbf{F}_*(\tau, \mathbf{y}(\tau), u), \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.12}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}. \tag{1.13}$$

В силу условия $(B.4)$ имеют место равенства

$$\sup_{v \in V} \min_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}^*(t, \mathbf{w}, v)} \langle \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle = \inf_{u \in U} \max_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}_*(t, \mathbf{w}, u)} \langle \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle = H(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot), s_0) + \sum_{i=1}^{m} \langle s_i, (w_{i-1} - w_i)/\Delta h \rangle,$$
$$(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

Более того, в силу условий $(B.1)$–$(B.3)$ многозначные отображения $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*(t, \mathbf{w}, v) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_*(t, \mathbf{w}, u) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $u \in U$, $v \in V$, удовлетворяют всем дополнительным свойствам, необходимым для того, чтобы в согласии с [6, с. 19] их можно было использовать для определения минимаксного решения следующей задачи Коши для обычного уравнения Гамильтона — Якоби с частными производными

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(t, \mathbf{w}) + H\Big(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot), \frac{\partial \varphi_m}{\partial w_0}(t, \mathbf{w})\Big) + \sum_{i=1}^{m} \Big\langle \frac{\partial \varphi_m}{\partial w_i}(t, \mathbf{w}), \frac{w_{i-1} - w_i}{\Delta h} \Big\rangle = 0, \quad (t, \mathbf{w}) \in (t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}},$$

$$\varphi_m(\vartheta, \mathbf{w}) = \sigma(\mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot)), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}. \tag{1.14}$$

Здесь искомой является функция $\varphi_m(t, \mathbf{w}) = \varphi_m(t, w_0, w_1, \ldots, w_m)$, через $\frac{\partial \varphi_m}{\partial w_i}(t, \mathbf{w})$ обозначен градиент этой функции по переменной w_i.

Положим

$$H_m(t, \mathbf{w}, \mathbf{s}) = H(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot), s_0) + \sum_{i=1}^{m} \langle s_i, (w_{i-1} - w_i)/\Delta h \rangle, \quad \sigma_m(\mathbf{w}) = \sigma(\mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot)),$$
$$(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}. \tag{1.15}$$

Тогда задачу (1.14) можно переписать в стандартном виде:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(t, \mathbf{w}) + H_m\Big(t, \mathbf{w}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{w}}(t, \mathbf{w})\Big) = 0, \quad (t, \mathbf{w}) \in (t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \tag{1.16}$$

$$\varphi_m(\vartheta, \mathbf{w}) = \sigma_m(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}. \tag{1.17}$$

В силу требований $(A.1)$–$(A.4)$ функции H_m и σ_m удовлетворяют всем условиям, при которых задача Коши (1.16), (1.17) имеет единственное минимаксное решение [6, теорема 3.1]. Это решение является непрерывной функцией $\varphi_m : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет краевому условию (1.17) и неравенствам

$$\begin{aligned} &\sup_{(t,\mathbf{w},v,\tau)} \min_{\mathbf{x}(\cdot)} \big(\varphi_m(\tau, \mathbf{x}(\tau)) - \varphi_m(t, \mathbf{w})\big) \leqslant 0, \\ &\inf_{(t,\mathbf{w},u,\tau)} \max_{\mathbf{y}(\cdot)} \big(\varphi_m(\tau, \mathbf{y}(\tau)) - \varphi_m(t, \mathbf{w})\big) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \;\; u \in U, \;\; v \in V, \;\; \tau \in (t, \vartheta], \;\; \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{w}, v), \;\; \mathbf{y}(\cdot) \in \mathbf{Y}_*(t, \mathbf{w}, u),$$

где через $\mathbf{Y}^*(t, \mathbf{w}, v)$ и $\mathbf{Y}_*(t, \mathbf{w}, u)$ обозначены соответственно множества решений дифференциальных включений (1.11) и (1.12) при условии (1.13). Отметим, что множества $\mathbf{Y}^*(t, \mathbf{w}, v)$ и $\mathbf{Y}_*(t, \mathbf{w}, u)$ являются непустыми компактами в $C([t, \vartheta], \mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ (см., например, [6, теорема П3]).

Имеет место

Теорема. *Пусть выполнены условия* $(A.1)$–$(A.4)$, φ *и* φ_m, $m \in \mathbb{N}$, — *минимаксные решения задач* (1.1), (1.2) *и* (1.16), (1.17) *соответственно. Тогда для любого компакта* $W_0 \subset C$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $M > 0$, *что для любых* $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times W_0$ *при условии* $m \geqslant M$ *будет справедливо неравенство*

$$|\varphi(t, w(\cdot)) - \varphi_m(t, \mathbf{w})| \leqslant \varepsilon,$$

где вектор $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ *определяется по функции* $w(\cdot)$ *в согласии с соотношениями* (1.10).

2. Доказательство теоремы

Доказательство проводится по схеме из [6, лемма 3.8; 10, теорема 7.1]. Зафиксируем компакт $W_0 \subset C$ и отображения F^*, F_*, удовлетворяющие условиям $(B.1)$–$(B.4)$. Обозначим

$$R_0 = \sup\big\{\|w(\cdot)\|_C : \; w(\cdot) \in W_0\big\},$$
$$\omega_0(\delta) = \sup\big\{\|w(\xi) - w(\eta)\| : \; w(\cdot) \in W_0, \; |\xi - \eta| \leqslant \delta, \; \xi, \eta \in [-h, 0]\big\}, \quad \delta > 0,$$

и, взяв константу c из условия $(B.3)$, положим

$$R_1 = (1 + R_0)e^{c(\vartheta - t_0)} - 1, \quad \omega_1(\delta) = \omega_0(\delta) + c(1 + R_1)\delta, \quad \delta > 0.$$

Определим компакт

$$X_0 = \Big\{x(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n) : \; \|x(t)\| \leqslant R_1, \; \|x(t) - x(\tau)\| \leqslant \omega_1(|t - \tau|), \; t, \tau \in [t_0 - h, \vartheta]\Big\}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $y(\cdot) \in X_0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$. Рассмотрим решения $y_i(\cdot)$, $i = \overline{0, m}$, системы

$$y_0(\tau) = y(\tau), \quad \dot{y}_i(\tau) = (y_{i-1}(\tau) - y_i(\tau))/\Delta h, \quad \tau \in [t, \vartheta], \quad y_i(t) = y(t - i\Delta h), \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.1}$$

Обозначим $\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot)) = (y_0(\tau), y_1(\tau), \ldots, y_m(\tau)) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\tau \in [t, \vartheta]$. В силу [19, лемма 1] имеем

$$\|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot)\|_C = \max_{i = \overline{0, m}} \|y_i(\tau)\| \leqslant \max_{\xi \in [t - h, \tau]} \|y(\xi)\|, \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{2.2}$$

Согласно [19, лемма 3] найдется такой компакт $W_1 \subset C$, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $y(\cdot) \in X_0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ будут справедливы включения $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot) \in W_1$, $y_\tau(\cdot) \in W_1$, $\tau \in [t, \vartheta]$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. В силу условия $(A.1)$ выберем число $\zeta > 0$ так, чтобы для любых $w(\cdot), z(\cdot) \in W_1$, удовлетворяющих неравенству $\|w(\cdot) - z(\cdot)\|_C \leqslant \zeta$, выполнялась оценка

$$|\sigma(w(\cdot)) - \sigma(z(\cdot))| \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

В согласии с условием $(A.4)$ определим число $\lambda_1 = \lambda(W_1)$ и положим

$$\alpha = \zeta^2 / \big(8(\vartheta - t_0) e^{2\lambda_1(\vartheta - t_0)}\big) > 0. \tag{2.4}$$

Опираясь на [19, теорема 2], выберем число $M > 0$ так, чтобы для любых $m \in \mathbb{N}$, $y(\cdot) \in X_0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ при $m \geqslant M$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot) - y_\tau(\cdot)\|_C \leqslant \min\big\{\zeta/2, \alpha/(4\lambda_1 R_0)\big\}, \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{2.5}$$

Покажем, что выбранное число M удовлетворяет утверждению теоремы.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant M$ и $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times W_0$. Пусть φ — минимаксное решение задачи (1.1), (1.2), φ_m — минимаксное решение задачи (1.16), (1.17), $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ — вектор, определенный согласно (1.10). Покажем, что

$$\varphi_m(t, \mathbf{w}) - \varphi(t, w(\cdot)) \leqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

Неравенство $\varphi(t, w(\cdot)) - \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varepsilon$ проверяется аналогично с понятными изменениями.

Обозначим через X_1 множество функций $x(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которые являются абсолютно непрерывными на $[t, \vartheta]$ и удовлетворяют соотношениям

$$x(\tau) = w(-h), \quad \tau \in [t_0 - h, t - h], \quad x(\tau) = w(\tau - t), \quad \tau \in [t - h, t],$$
$$\|\dot{x}(\tau)\| \leqslant c(1 + \max_{\xi \in [t-h, \tau]} \|x(\xi)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta].$$

Множество X_1 компактно в $C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [10, теорема P2.1]) и выполняется включение $X_1 \subset X_0$. Положим

$$Z = \Big\{(x(\cdot), y(\cdot)) \in X_1 \times X_1 \colon \\ \langle s(\tau), \dot{s}(\tau)\rangle \leqslant \lambda_1 \max_{\xi \in [t, \tau]} \|s(\xi)\|^2 + \alpha \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta],\ s(\tau) = y(\tau) - x(\tau)\Big\},$$

$$L(\tau) = \Big\{(x(\cdot), y(\cdot)) \in Z \colon \varphi(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)),\ \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varphi_m\big(\tau, \mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big)\Big\}, \quad \tau \in [t, \vartheta],$$

$$t^\circ = \max\big\{\tau \in [t, \vartheta] \colon L(\tau) \neq \varnothing\big\}. \tag{2.7}$$

Максимум в (2.7) достигается в силу компактности Z в $C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^{2n})$, непрерывности φ и φ_m и того факта, что из сходимости $y_k(\cdot) \to y(\cdot)$ при $k \to \infty$ в $C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ следует сходимость $\mathbf{y}(\cdot \mid t, y_k(\cdot)) \to \mathbf{y}(\cdot \mid t, y(\cdot))$ в $C([t, \vartheta], \mathbb{R}^{\mathbf{n}})$.

Предположим, что $t^\circ = \vartheta$, т. е. $L(\vartheta) \neq \varnothing$, и $(x(\cdot), y(\cdot)) \in L(\vartheta)$. Тогда, если учесть краевые условия (1.2) и (1.17), имеем

$$\varphi(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) = \sigma(x_\vartheta(\cdot)), \quad \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varphi_m\big(\vartheta, \mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big) = \sigma_m\big(\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big). \tag{2.8}$$

Далее, опираясь на определение множества Z, лемму Беллмана — Гроноулла (см., например, [20, с. 43, лемма 2.1]) и выбор (2.4) числа α, выводим

$$\max_{\xi \in [t, \tau]} \|y(\xi) - x(\xi)\|^2 \leqslant 2\alpha(\vartheta - t) e^{2\lambda_1(\vartheta - t)} \leqslant \zeta^2/4, \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Отсюда с учетом выбора (2.5) числа M получаем

$$\|x_\vartheta(\cdot) - \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big](\cdot)\|_C \leqslant \|x_\vartheta(\cdot) - y_\vartheta(\cdot)\|_C + \|y_\vartheta(\cdot) - \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big](\cdot)\|_C \leqslant \zeta.$$

После этого, принимая во внимание выбор (2.3) числа ζ и обозначения (1.15), заключаем

$$|\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma_m\big(\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big)| = |\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma\big(\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))](\cdot)\big)| \leqslant \varepsilon. \tag{2.9}$$

Соотношения (2.8) и (2.9) доказывают неравенство (2.6). Таким образом, для доказательства теоремы осталось убедиться, что равенство $t^\circ = \vartheta$ действительно выполняется.

Предположим от противного, что $t^\circ < \vartheta$. Пусть $(x^\circ(\cdot), y^\circ(\cdot)) \in L(t^\circ)$. Обозначим $w^\circ(\cdot) = x^\circ_{t^\circ}(\cdot)$, $\mathbf{w}^\circ = \mathbf{y}(t^\circ \mid t, y^\circ(\cdot))$ и $s^\circ(\tau) = y^\circ(\tau) - x^\circ(\tau)$, $\tau \in [t, \vartheta]$.

Опираясь на свойство $(B.4)$, выберем $v^\circ \in V$ и $u^\circ \in U$ так, чтобы для любых $f^* \in F^*(t^\circ, w^\circ(\cdot), v^\circ)$ и $f_* \in F_*(t^\circ, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}^\circ](\cdot), u^\circ)$ выполнялись неравенства

$$H(t^\circ, w^\circ(\cdot), s^\circ(t^\circ)) \leqslant \langle s^\circ(t^\circ), f^* \rangle + \alpha/8, \quad H(t^\circ, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}^\circ](\cdot), s^\circ(t^\circ)) \geqslant \langle s^\circ(t^\circ), f_* \rangle - \alpha/8. \tag{2.10}$$

Обозначим через $\widehat{X}^*$ множество таких функций $x(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, что $x(\tau) = x^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t_0 - h, t^\circ - h]$ и $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$ при $\tau \in [t^\circ - h, \vartheta]$, где $\widehat{x}(\cdot) \in X^*(t^\circ, w^\circ(\cdot), v^\circ)$. В силу $(B.3)$ справедливо включение $\widehat{X}^* \subset X_1$. Через $\widehat{Y}_*$ обозначим множество таких функций $y(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, что $y(\tau) = y^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t_0 - h, t^\circ]$ и существует функция $\widehat{\mathbf{y}}(\cdot) = (\widehat{y}_0(\cdot), \widehat{y}_1(\cdot), \ldots, \widehat{y}_m(\cdot)) \in \mathbf{Y}_*(t^\circ, \mathbf{w}^\circ, u^\circ)$, для которой $y(\tau) = \widehat{y}_0(\tau)$ при $\tau \in [t^\circ, \vartheta]$. Тогда в силу связи включений (1.8), (1.12) и системы (2.1) имеем $\widehat{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))$ при $\tau \in [t^\circ, \vartheta]$, откуда с учетом условия $(B.3)$ и неравенства (2.2) получаем $\widehat{Y}_* \subset X_1$.

Для любого $y(\cdot) \in \widehat{Y}_*$ в силу соотношений (2.1) и (2.2) выводим

$$\|\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot) - \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(t^\circ \mid t, y(\cdot))](\cdot)\|_C \leqslant \omega_1(\tau - t^\circ) + 2R_1(\tau - t^\circ)/\Delta h, \quad \tau \in [t^\circ, \vartheta].$$

Учитывая это вместе с условиями $(A.1)$, $(B.2)$ и $(B.3)$, из (2.10) получаем, что существует $\tau^\circ \in (t^\circ, \vartheta]$ такое, что для любых $x(\cdot) \in \widehat{X}^*$ и $y(\cdot) \in \widehat{Y}_*$ при почти всех $\tau \in [t^\circ, \tau^\circ]$ выполняются неравенства

$$H(\tau, x_\tau(\cdot), s(\tau)) \leqslant \langle \dot{x}(\tau), s(\tau) \rangle + \alpha/4, \quad H\big(\tau, \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot), s(\tau)\big) \geqslant \langle \dot{y}(\tau), s(\tau) \rangle - \alpha/4,$$

где $s(\tau) = y(\tau) - x(\tau)$, а стало быть, справедлива оценка

$$\langle s(\tau), \dot{s}(\tau) \rangle \leqslant H\big(\tau, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot), s(\tau)\big) - H(\tau, x_\tau(\cdot), s(\tau)) + \alpha/2.$$

Поскольку $x(\cdot), y(\cdot) \in X_0$, то при $\tau \in [t^\circ, \tau^\circ]$ имеем $x_\tau(\cdot) \in W_1$, $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot) \in W_1$ и, далее, в согласии с условием $(A.4)$ и выбором (2.5) числа M выводим

$$\begin{aligned} &H\big(\tau, \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot), s(\tau)\big) - H(\tau, x_\tau(\cdot), s(\tau)) \leqslant \lambda_1 \|s(\tau)\| \|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot) - x_\tau(\cdot)\|_C \\ &\leqslant \lambda_1 2R_1 \|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot) - y_\tau(\cdot)\|_C + \lambda_1 \|s(\tau)\| \|y_\tau(\cdot) - x_\tau(\cdot)\|_C \leqslant \alpha/2 + \lambda_1 \max_{\xi \in [t, \tau]} \|s(\xi)\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $x(\cdot) \in \widehat{X}^*$ и $y(\cdot) \in \widehat{Y}_*$ при почти всех $\tau \in [t^\circ, \tau^\circ]$ верна оценка

$$\langle s(\tau), \dot{s}(\tau) \rangle \leqslant \lambda_1 \max_{\xi \in [t, \tau]} \|s(\xi)\|^2 + \alpha.$$

Более того, так как $s(\tau) = s^\circ(\tau) = y^\circ(\tau) - x^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t, t^\circ]$ и $(x^\circ(\cdot), y^\circ(\cdot)) \in Z$, эта оценка выполняется при почти всех $\tau \in [t, \tau^\circ]$.

Опираясь на первое из неравенств в (1.6) и второе из неравенств в (1.18), в согласии с определениями множеств $\widehat{X}^*$ и $\widehat{Y}_*$ заключаем, что найдутся такие функции $x^*(\cdot) \in \widehat{X}^*$ и $y_*(\cdot) \in \widehat{Y}_*$, для которых будут справедливы неравенства

$$\varphi(t^\circ, w^\circ(\cdot)) \geqslant \varphi(\tau^\circ, x^*_{\tau^\circ}(\cdot)), \quad \varphi_m(t^\circ, \mathbf{w}^\circ) \leqslant \varphi_m\big(\tau^\circ, \mathbf{y}(\tau^\circ \mid t, y_*(\cdot))\big). \tag{2.11}$$

Положим

$$(\widetilde{x}(\tau), \widetilde{y}(\tau)) = \begin{cases} (x^*(\tau), y_*(\tau)), & \text{если } \tau \in [t_0 - h, \tau^\circ], \\ (x^*(\tau^\circ), y_*(\tau^\circ)), & \text{если } \tau \in (\tau^\circ, \vartheta]. \end{cases}$$

Тогда $(\widetilde{x}(\cdot), \widetilde{y}(\cdot)) \in Z$. Кроме того, так как по построению $\widetilde{x}(\tau) = x^\circ(\tau)$ и $\widetilde{y}(\tau) = y^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t_0 - h, t^\circ]$, в силу включения $(x^\circ(\cdot), y^\circ(\cdot)) \in L(t^\circ)$ и неравенств (2.11) имеем

$$\varphi(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi(t^\circ, w^\circ(\cdot)) \geqslant \varphi(\tau^\circ, \widetilde{x}_{\tau^\circ}(\cdot)), \quad \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varphi_m(t^\circ, \mathbf{w}^\circ) \leqslant \varphi_m\big(\tau^\circ, \mathbf{y}(\tau^\circ \mid t, \widetilde{y}(\cdot))\big).$$

Таким образом, заключаем $(\widetilde{x}(\cdot), \widetilde{y}(\cdot)) \in L(\tau^\circ)$, что противоречит определению (2.7) числа t°.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
3. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
5. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Crandall M.G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
8. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения типа Гамильтона — Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 4. С. 457–461.
9. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 110–130.
10. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. 243 с.
11. **Kim A.V.** Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
12. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН: Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
13. **Falcone M., Ferretti R.** Discrete time high order schemes for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations // Numer. Math. 1994. Vol. 67, no. 3. P. 315–344.
14. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 6. С. 736–739.
15. **Лукоянов Н.Ю.** Об аппроксимации функциональных уравнений Гамильтона — Якоби в системах с наследственной информацией // Тр. Междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, посвящен. 60-летию акад. А.И. Субботина (22–26 июня 2005 г., Екатеринбург, Россия). Т. 1. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2006. С. 108–115.
16. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
17. **Репин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
18. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.

19. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Конечномерные моделирующие поводыри в системах с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 182–195.
20. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
ИЕНиМ, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Поступила 1.10.2017

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
ИЕНиМ, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
аспирант
ИЕНиМ, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York, Springer. 1988. 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. On the problem of unifying differential games. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, no. 1, pp. 269–273.
3. Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect. *Sov. Math., Dokl.*, 1971, vol. 12, pp. 262–266.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 286 p.
5. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
6. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona-Yakobi.* [Minimax inequalities and Hamilton-Jacobi equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p.
7. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
8. Lukoyanov N.Yu. Functional equations of Hamilton–Jacobi type and differential games with hereditary information. *Dokl. Math.*, 2000, vol. 61, no. 2, pp. 301–304.
9. Krasovskii N.N., Lukoyanov N.Yu. Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2000, suppl. 1, pp. S136–S153.
10. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona-Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton-Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Ekaterinburg, Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.
11. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i-smooth calculus.* Dordrecht, Kluwer, 1999, 165 p. doi: 10.1007/978-94-017-1630-7 .

12. Taras'ev A.M., Uspenskij A.A., Ushakov V.N. Approximation schemes and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 127–139.
13. Falcone M., Ferretti R. Discrete time high order schemes for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. *Numer. Math.*, 1994, vol. 67, no. 3, pp. 315–344. doi: 10.1007/s002110050031 .
14. Subbotin A.I., Chentsov A.G. An iteration procedure for constructing minimax and viscous solutions to Hamilton–Jacobi equations. *Dokl. Math.*, 1996, vol. 53, no. 3, pp. 416–419.
15. Lukoyanov N.Yu. Approximation of the Hamilton–Jacobi functional equations in systems with hereditary information. Proc. Internat. Seminar Control Theory and Theory of Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi eguations, dedicated to the 60th birthday of Academician A.I. Subbotin, June 22-26, 2005, Ekaterinburg, Russia. Vol. 1. Ekaterinburg, Ural State University Publ., 2006, pp. 108–115 (in Russian). ISBN: 5-7996-0318-4 .
16. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5 .
17. Repin Yu.M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 2, pp. 254–264. doi: 10.1016/0021-8928(65)90029-8 .
18. Kurzhanskii A.B. On the approximation of linear differential equations with lag. *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2094–2107 (in Russian).
19. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Finite-dimensional modeling guides in systems with delay. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 182–195 (in Russian).
20. Bellman R., Cooke K.L. Differential–Difference Equations. N Y, Acad. Press, 1963, 462 p. ISBN: 9780080955148 . Translated to Russian under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya.* Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p.

The paper was received by the Editorial Office on October 1, 2017.

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: nyul@imm.uran.ru .

Anton Romanovich Plaksin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com .