ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ОБ УРАВНЕНИЯХ МЕТОДА ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ[1]

С. В. Чистяков

Неразрывно связанный с именем А.Г.Ченцова метод программных итераций возник в процессе исследования так называемых нерегулярных антагонистических дифференциальных игр. Первоначально рассматривалась лишь одна из двух возможных, двойственных итеративных процедур — максиминная процедура. В значительной мере это объясняется особым интересом, проявляемым к так называемой функции программного максимина, которая в играх преследования имеет привлекательную геометрическую интерпретацию. Вместе с тем не меньший интерес представляет и двойственная к ней минимаксная итеративная процедура. Одно из главных значений метода программных итераций состоит в том, что на его основе может быть построена теория дифференциальных игр в замкнутой и весьма компактной форме. Ранее это было проиллюстрировано для одной из версий метода, базирующейся на определенной модификации итерационных операторов. Ключевую роль в этой теории играет теорема о существовании и единственности решения уравнения, порождаемого парой упомянутых операторов. При этом максиминная итеративная процедура используется для описания ε-оптимальных, а в ряде случаев и оптимальных позиционных стратегий 1-го игрока, а минимаксная — для описания ε-оптимальных, а иногда и оптимальных позиционных стратегий 2-го игрока. В настоящей статье исследована структура множества решений обобщенного уравнения Айзекса — Беллмана, полученного с использованием исторически первых, а не модифицированных операторов метода программных итераций. При определенных предположениях доказана теорема о существовании и единственности его решения, удовлетворяющего естественному краевому условию. Тем самым показано, что исходная версия метода программных итераций, также может быть использована для построения теории дифференциальных игр в замкнутой форме. Однако при этом используются не позиционные, а так называемые рекурсивные стратегии, которые вместе с самим методом программных итераций играют существенную роль в исследовании бескоалиционных дифференциальных игр.

Ключевые слова: антагонистическая дифференциальная игра, терминальный выигрыш, метод программных итераций, обобщенное уравнение Айзекса — Беллмана.

S. V. Chistyakov. On equations of the program iteration method.

The program iteration method, which is inseparably associated with the name of A. G. Chentsov, first appeared in the study of the so-called zero-sum differential games. At early stages, only one of the two possible dual iterative procedures was considered — the maximin procedure. This can be explained by the special interest of the researchers in the so-called program maximin function, which is conveniently interpreted in geometric terms in games of pursuit. Nevertheless, the dual minimax iterative procedure is of no less interest. The program iteration method is mainly significant because it may be used as the basis for the development of a differential game theory in a closed compact form, which was shown earlier for a version of the method based on a certain modification of iterative operators. The key role in this theory belongs to the theorem that states the existence and uniqueness of a solution of the equation induced by a pair of such operators. In this case, the maximin iterative procedure is used to describe ε-optimal (in some cases, optimal) positional strategies of the first player, while the minimax procedure is used to describe ε-optimal (in some cases, optimal) positional strategies of the second player. This paper investigates the structure of the solution set of the generalized Isaacs–Bellman equation obtained with the use of historically first (not modified) operators of the program iteration method. A theorem that states the existence and uniqueness of the solution to this equation meeting a natural boundary condition is proved under certain assumptions. Thus, it is shown that the original version of the program iteration method can also be used in designing a closed-form differential game theory. However, here we use the so-called recursive strategies rather than positional ones. Such strategies, together with the program iteration method, play an essential role in the analysis of coalition-free differential games.

Keywords: zero-sum differential game, terminal payoff, program iteration method, generalized Isaacs–Bellman equation.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-288-296

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-51-53030).

1. Введение

Как и в первых работах [1; 2], посвященных методу программных итераций, рассмотрим следующую антагонистическую дифференциальную игру:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v) \tag{1.1}$$

$$(x \in \mathbb{R}^n, u \in P \in \operatorname{Comp} \mathbb{R}^k, v \in Q \in \operatorname{Comp} \mathbb{R}^l),$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$H(x(T)) \to \min_{(u)} \max_{(v)} / \max_{(v)} \min_{(u)} \tag{1.3}$$

$$(T \geq t_0).$$

В ней первый игрок распоряжается управлением v и стремится максимизировать терминальный выигрыш $H(x(T))$, а второй игрок распоряжается управлением u и стремится его минимизировать. Всюду далее, обычно не оговаривая особо, предполагается, что выполняются следующие условия:

(a) $f(\cdot) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times P \times Q)$;

(b) $f(\cdot)$ локально липшицева по x;

(c) $\exists \lambda > 0$ такое, что $\forall (t, x, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$

$$||f(t, x, u, v)|| \leq \lambda(1 + ||x||);$$

(d) $H(\cdot) \in C(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $A(t_0, x_0)$ — множество всех абсолютно непрерывных решений задачи Коши (1.1), (1.2) на отрезке $[t_0, T]$, которые соответствуют всевозможным измеримым по Лебегу программным управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяющим соответственно условиям: $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ при почти всех t. Указанные здесь программные управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, будем называть допустимыми. Множество всех допустимых программных управлений $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) обозначим через $L(P)$ ($L(Q)$). Далее, пусть

$$D(t_0, x_0) = \big\{(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \;\big|\; x = x(t),\ x(\cdot) \in A(t_0, x_0)\big\}$$

— отрезок интегральной воронки системы (1.1), исходящей из позиции (t_0, x_0). Множество $D \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ будем называть пространством позиций системы (1.1), если из того, что $(t_*, x_*) \in D$ следует $D(t_*, x_*) \subset D$.

Пусть $D \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ — произвольное ограниченное пространство позиций и $(t_0, x_0) \in D$, а стало быть и $D(t_0, x_0) \subset D$. В принципе можно считать, что $D = D(t_0, x_0)$. Из условий (a)–(c) следует, что это пространство позиций ограничено. Легко убедиться также, что если $G \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество, то объединение всех множеств $D(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in G$, будет ограниченным пространством позиций. Наряду с игрой (1.1)–(1.3), обозначаемой символом $\Gamma(t_0, x_0)$, будем рассматривать семейство аналогичных игр

$$\Gamma(D) = \{\, \Gamma(t_*, x_*) \mid (t_*, x_*) \in D\},$$

которые отличаются от нее только начальными данными, т. е. только начальной позицией игры. Семейство игр $\Gamma(D)$ далее также будем называть игрой.

2. Базовые итеративные процедуры и рекурсивные стратегии

Для заданного ограниченного пространства позиций $D \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим множество $M(D)$ всех, ограниченных на нем функций $w(\cdot) : D \to \mathbb{R}$. Пространство $M(D)$ наделим sup-нормой и отношением частичного порядка $\geq$, считая, в частности, что если $w_1(\cdot), w_2(\cdot) \in M(D)$ и $w_1(t,x) \geq w_2(t,x)$ $\forall (t,x) \in D$, то $w_1(\cdot) \geq w_2(\cdot)$ или, что то же самое, $w_2(\cdot) \leq w_1(\cdot)$. Пусть $UC(D)$ — подпространство пространства $M(D)$, составленное из всех равномерно непрерывных на множестве D функций $w(\cdot) \in M(D)$.

Рассмотрим операторы $\Phi_-, \Phi_+ : M(D) \to M(D)$, такие, что $\forall w(\cdot) \in M(D)$ и $\forall (t_*, x_*) \in D$

$$\Phi_- \circ w(t_*, x_*) = \sup_{t \in [t_*, T]} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))),$$

а

$$\Phi_+ \circ w(t_*, x_*) = \inf_{t \in [t_*, T]} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Здесь $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ — решение системы (1.1) с начальными данными t_*, x_*, которое соответствует допустимым управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$.

Нетрудно убедиться, что на пространстве $UC(D)$ в определении оператора Φ_- (соответственно Φ_+) операцию супремума (инфимума) по $t \in [t_*, T]$ можно заменить на операцию максимума (минимума) по тому же множеству. Введенные операторы, допускающие различные по форме определения, или их естественные аналоги, рассматривались в первоначальной версии метода программных итераций [1–4], которая зародилась при исследовании так называемых нерегулярных дифференциальных игр [5, § 22].

Известно, что 1) пространство $UC(D)$ инвариантно относительно каждого из операторов Φ_- и Φ_+ [6, теорема 3.1], 2) на пространстве $UC(D)$ эти операторы непрерывны в топологии равномерной сходимости [6, теорема 3.3], 3) операторы Φ_- и Φ_+ сохраняют порядок [6, лемма 3.2], т. е. если $w_1(\cdot), w_2(\cdot) \in M(D)$ и $w_1(\cdot) \geq w_2(\cdot)$, то

$$\Phi_- \circ w_1(\cdot) \geq \Phi_- \circ w_2(\cdot) \quad \text{и} \quad \Phi_+ \circ w_1(\cdot) \geq \Phi_+ \circ w_2(\cdot).$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = w(\cdot), \tag{2.1}$$

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{2.2}$$

и их последовательные приближения

$$w_-^{(n)}(\cdot) = \Phi_- \circ w_-^{(n-1)}(\cdot), \tag{2.3}$$

$$w_+^{(n)}(\cdot) = \Phi_+ \circ w_+^{(n-1)}(\cdot), \tag{2.4}$$

считая, что начальными приближениями для них являются соответственно функция программного максимина

$$w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))), \quad (t_*, x_*) \in D, \tag{2.5}$$

и функция программного минимакса

$$w_+^{(0)}(t_*, x_*) = \inf_{u(\cdot) \in L(P)} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))), \quad (t_*, x_*) \in D. \tag{2.6}$$

Легко убедиться, что $w_-^{(0)}(\cdot) \in UC(D)$ и $w_+^{(0)}(\cdot) \in UC(D)$, а так как пространство $UC(D)$ инвариантно относительно каждого из операторов Φ_- и Φ_+, то $w_-^{(n)}(\cdot) \in UC(D)$ и $w_+^{(n)}(\cdot) \in UC(D)$ для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Известно, что последовательные приближения (2.3), (2.5) образуют неубывающую последовательность

$$w_-^{(0)}(\cdot) \leq w_-^{(1)}(\cdot) \leq \dots \leq w_-^{(n)}(\cdot) \leq \dots ,$$

а последовательные приближения (2.4), (2.6) — невозрастающую

$$w_+^{(0)}(\cdot) \geq w_+^{(1)}(\cdot) \geq \dots \geq w_+^{(n)}(\cdot) \geq \dots ,$$

при этом на любом ограниченном пространстве позиций каждая из этих последовательностей сходится равномерно [6, лемма 3.4, теорема 3.5].

Последовательные приближения (2.3), (2.5) и (2.4), (2.6) для семейства игр $\Gamma(D)$ дают естественную основу введения описываемых ниже рекурсивных стратегий. В этом классе стратегий каждое из последовательных приближений (2.3), (2.5) может быть названо функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$, а каждое из последовательных приближений (2.4), (2.6), взятое со знаком минус, — функцией гарантированного выигрыша 2-го игрока в этой игре. Проиллюстрируем это на примере последовательных приближений (2.3), (2.5).

Очевидно, что если в игре $\Gamma(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in D$, при произвольно заданном $\varepsilon > 0$ 1-й игрок до конца игры будет использовать управление $v_\varepsilon(\cdot) \in L(Q)$, на котором с точностью до ε достигается супремум по $v(\cdot) \in L(Q)$ в правой части равенства (2.5), то какое бы управление $u(\cdot) \in L(Q)$ ни было выбрано 2-м игроком, выигрыш 1-го игрока разве лишь на ε будет меньше, чем $w_-^{(0)}(t_*, x_*)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и позиции $(t_*, x_*) \in D$ это и позволяет назвать функцию $w_-^{(0)}(\cdot)$ функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$.

Далее, если в игре $\Gamma(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in D$, имеет место равенство $w_-^{(1)}(t_*, x_*) = w_-^{(0)}(t_*, x_*)$, то, как следует из сказанного выше, 1-й игрок с любой степенью точности может гарантировать себе выигрыш, равный $w_-^{(1)}(t_*, x_*)$. То же имеет место и в случае, если $w_-^{(1)}(t_*, x_*) > w_-^{(0)}(t_*, x_*)$. Для доказательства этого заметим, что в данном случае, очевидно, максимум по $t \in [t_*, T]$ в правой части равенств

$$w_-^{(1)}(t_*, x_*) = \Phi_- \circ w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \max_{t \in [t_*, T]} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} w_-^{(0)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$$

не может достигаться в концах отрезка $[t_*, T]$. Пусть этот максимум достигается в точке $t_1 \in (t_*, T)$. Тогда если до момента времени $t_1 \in (t_*, T)$ 1-й игрок будет использовать управление $v_\varepsilon^{(1)}(\cdot) \in L(Q)$, с точностью до $\varepsilon/2$ доставляющее супремум по $v(\cdot) \in L(Q)$ в правой части равенств

$$w_-^{(1)}(t_*, x_*) = \Phi_- \circ w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} w_-^{(0)}(t_1, x(t_1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))),$$

а затем с момента времени t_1 и до конца игры будет использовать управление $v_\varepsilon^{(0)}(\cdot) \in L(Q)$, с точностью до $\varepsilon/2$ гарантирующее выигрыш $w_-^{(0)}(t_1, x_1)$, где (t_1, x_1) — та позиция, в которую к моменту времени t_1 перейдет игра, то, очевидно, в игре $\Gamma(t_*, x_*)$ 1-й игрок с точностью до $\varepsilon > 0$ будет гарантировать себе выигрыш, равный $w_-^{(1)}(t_*, x_*)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и позиции $(t_*, x_*) \in D$ это позволяет назвать функцию $w_-^{(1)}(\cdot)$, так же как и функцию $w_-^{(0)}(\cdot)$, функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$.

Опираясь на равенство (2.4) и определение оператора Φ_-, индукцией по n легко устанавливаем теперь, что каждое из последовательных приближений $w_-^{(n)}(\cdot)$ также представляет собой функцию гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$. При этом стратегия 1-го игрока, с точностью до произвольно заданного $\varepsilon > 0$ гарантирующая ему, в той или иной игре $\Gamma(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$, выигрыш, равный $w_-^{(n)}(t_*, x_*)$, неформально представляет собой процедуру последовательного выбора не более n моментов времени $\tau_i (i = \overline{1, k}, k \leq n)$ — моментов коррекции управления,

$$t_* < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = T,$$

и допустимых программных управлений $v^{(i)}(\cdot) \in L(Q)$, которые он использует между двумя последовательными моментами коррекции управления. При этом очередной момент коррекции τ_i и управление $v^{(i)}(\cdot) \in L(Q)$ выбираются им в предшествующий момент коррекции τ_{i-1} на основе информации о достигнутой в этот момент времени позиции $(\tau_{i-1}, x(\tau_{i-1}))$. Начальный $\tau_0 = t_*$ и конечный $\tau_k = T$ моменты времени для удобства описания здесь также условно причисляются к моментам коррекции управления. Описанную стратегию 1-го игрока будем называть рекурсивной его стратегией (с не более чем n коррекциями управления).

На более формальном определении рекурсивных стратегий здесь останавливаться не будем. В частном случае, когда игрок между двумя последовательными моментами коррекции выбирает постоянное допустимое программное управление, это определение приведено в [7, с. 38, 39].

3. Основное уравнение и теорема о существовании и единственности его решения

Как установлено [6, лемма 3.7], система двух уравнений (2.1) и (2.2) равносильна уравнению

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = \Phi_+ \circ w(\cdot), \tag{3.1}$$

т. е. всякая общая неподвижная точка операторов Φ_- и Φ_+ является решением этого уравнения и, наоборот, всякое его решение является общей неподвижной точкой этих операторов. Далее это уравнение будем называть *основным* уравнением. В [6, лемма 3.6] отмечалось также, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства

$$\Phi_- \circ w_+^{(n)}(\cdot) = w_+^{(n)}(\cdot), \tag{3.2}$$

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(\cdot) = w_-^{(n)}(\cdot). \tag{3.3}$$

Доказательство этих равенств в [5] было опущено. Поэтому приведем здесь краткий его набросок. Докажем, например, равенство (3.3).

Поскольку каждая рекурсивная стратегия 1-го игрока вместе с тем или иным допустимым программным управлением 2-го игрока порождает некоторое допустимое программное управление 1-го игрока, а каждая из функций $w_-^{(n)}(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в классе рекурсивных стратегий, то нетрудно убедиться, что каково бы ни было $n = 0, 1, 2, \ldots$ для любых $(t_*, x_*) \in D$, $\varepsilon > 0$, $t \in [t_*, T]$ и $u(\cdot) \in L(P)$ существует такое $v(\cdot) \in L(Q)$, что

$$w_-^{(n)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \geq w_-^{(n)}(t_*, x_*) - \varepsilon.$$

Тем более, для любых $(t_*, x_*) \in D$, $\varepsilon > 0$, $t \in [t_*, T]$ и $u(\cdot) \in L(P)$

$$\sup_{v(\cdot) \in L(Q)} w_-^{(n)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \geq w_-^{(n)}(t_*, x_*) - \varepsilon.$$

Поэтому для любых $(t_*, x_*) \in D$ и $\varepsilon > 0$

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(t_*, x_*) = \min_{t \in [t_*, T]} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} w_-^{(n)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \geq w_-^{(n)}(t_*, x_*) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $(t_*, x_*) \in D$ и $\varepsilon > 0$ это означает, что

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(\cdot) \geq w_-^{(n)}(\cdot).$$

Но вместе с тем из определения оператора Φ_+ следует, что $\forall w(\cdot) \in M(D)$

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) \leq w(\cdot).$$

Следовательно, имеет место равенство (3.3). Аналогично устанавливается и равенство (3.2).

Положим

$$w_-(\cdot) = \lim_{n\to\infty} w_-^{(n)}(\cdot), \quad w_+(\cdot) = \lim_{n\to\infty} w_+^{(n)}(\cdot).$$

Очевидно, каждая из функций $w_-^{(n)}(\cdot)$ и $w_+^{(n)}(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяет краевому условию

$$w(T, x) = H(x). \tag{3.4}$$

Поэтому ему удовлетворяют и обе функции $w_-(\cdot)$ и $w_+(\cdot)$.

Лемма. *Функции $w_-(\cdot)$ и $w_+(\cdot)$ являются решениями уравнения* (3.1)*, при этом*

$$w_-(\cdot) \leq w_+(\cdot). \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку операторы Φ_- и Φ_+ непрерывны в топологии равномерной сходимости, а последовательность $\{w_-^{(n)}(\cdot)\}$ сходится равномерно на множестве D, то, переходя в равенствах (2.3) и (3.3) к пределу, получим соответственно

$$\Phi_- \circ w_-(\cdot) = w_-(\cdot) \ \text{ и } \ \Phi_+ \circ w_-(\cdot) = w_-(\cdot).$$

Следовательно, функция $w_-(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (3.1). Аналогично, используя равенства (2.4) и (3.2), устанавливаем, что функция $w_+(\cdot)$ также является решением уравнения (3.1).

Далее, в силу известного неравенства для минимаксов, из определения функций $w_-^{(0)}(\cdot)$ и $w_+^{(0)}(\cdot)$ следует, что

$$w_-^{(0)}(\cdot) \leq w_+^{(0)}(\cdot).$$

Применяя n кратно к этому неравенству оператор Φ_- с учетом того, что он сохраняет порядок и имеет место равенство (3.2), получим

$$w_-^{(n)}(\cdot) \leq w_+^{(0)}(\cdot).$$

В свою очередь, применяя n кратно оператор Φ_+ к последнему неравенству, в силу того что он также сохраняет порядок и имеет место равенство (3.3), получим

$$w_-^{(n)}(\cdot) \leq w_+^{(n)}(\cdot).$$

Предельный переход в этом неравенстве приводит к неравенству (3.5). □

Теорема 1. *Для любого решения $w(\cdot) \in M(D)$ уравнения* (3.1) *с краевым условием* (3.4) *справедливы неравенства*

$$w_-(\cdot) \leq w(\cdot) \leq w_+(\cdot). \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, правое из неравенств (3.6). Так как функция $w(\cdot)$ по условию теоремы удовлетворяет краевому условию (3.4), то для любых $(t_*, x_*) \in D$, $u(\cdot) \in L(P)$ и $v(\cdot) \in L(Q)$ имеем

$$w(T, x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) = H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Следовательно, для любой позиции $(t_*, x_*) \in D$

$$\inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} w(T, x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) = \inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Тем более, для любой позиции $(t_*, x_*) \in D$

$$\inf_{t\in[t_*,T]} \inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \leq \inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} H(T, x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))),$$

т. е.
$$\Phi_+ \circ w(\cdot) \le w_+^{(0)}(\cdot).$$
А так как по условию функция $w(\cdot)$ является решением уравнения (3.1), то, как отмечалось выше, она является неподвижной точкой оператора Φ_+ . Поэтому предыдущее неравенство можно записать в виде
$$w(\cdot) \le w_+^{(0)}(\cdot).$$
Применяя n-кратно к этому неравенству оператор Φ_+, с учетом того что он сохраняет порядок, а функция $w(\cdot)$ является его неподвижной точкой, будем иметь
$$w(\cdot) \le w_+^{(n)}(\cdot).$$
Переходя здесь к пределу, получим правое из неравенств (3.6).

Левое из неравенств (3.6) получается аналогично с использованием оператора Φ_-. □

С учетом леммы из этой теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *Функция $w_-(\cdot)$ является минимальным решением уравнения* (3.1)*, удовлетворяющим краевому условию* (3.4)*, а функция $w_+(\cdot)$ — максимальным таким его решением.*

Вместе с уравнением (3.1) рассмотрим еще и уравнение
$$\Phi_-^c \circ w(\cdot) = \Phi_+^c \circ w(\cdot), \tag{3.7}$$
где операторы $\Phi_-^c, \Phi_+^c : M(D) \to M(D)$ определены так, что $\forall\, w(\cdot) \in M$ и $\forall\, (t_*, x_*) \in D$
$$\Phi_-^c \circ w(t_*, x_*) = \sup_{t\in[t_*,T]} \sup_{v\in Q} \inf_{u(\cdot)\in L(P)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v)),$$
$$\Phi_+^c \circ w(t_*, x_*) = \inf_{t\in[t_*,T]} \inf_{u\in P} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} w(t, x(t, t_*, x_*, u, v(\cdot))).$$
Уравнение (3.7) будем называть *модифицированным основным* уравнением.

Как установлено в [8, теорема 1], условие

(e) $\quad \max\limits_{v\in Q} \min\limits_{u\in P} \langle l, f(t,x,u,v)\rangle = \min\limits_{u\in P} \max\limits_{v\in Q} \langle l, f(t,x,u,v)\rangle \;\; \forall l \in \mathbb{R}^n, \;\forall (t,x) \in (-\infty, T] \in \mathbb{R}^n$

вместе с условиями (a)–(d) гарантирует существование и единственность решения уравнения (3.7), удовлетворяющего краевому условию (3.4).

Теорема 2. *Если наряду с условиями* (a)*–*(d) *выполняется и условие* (e)*, то уравнение* (3.1) *с краевым условием* (3.4) *имеет единственное решение $w^*(\cdot)$, которое совпадает с единственным решением уравнения* (3.7) *с тем же краевым условием, и, кроме того,*
$$w^*(\cdot) = w_-(\cdot) = w_+(\cdot). \tag{3.8}$$

Доказательство. По лемме множество решений уравнения (3.1) с краевым условием (3.4) непусто. Вместе с тем из определения операторов Φ_-, Φ_+, Φ_-^c и Φ_-^c следует, что для любой функции $w(\cdot) \in M(D)$ справедливы неравенства
$$\Phi_- \circ w(\cdot) \ge \Phi_-^c \circ w(\cdot) \ge w(\cdot) \ge \Phi_+^c \circ w(\cdot) \ge \Phi_+ \circ w(\cdot).$$
Следовательно, всякое решение уравнения (3.1) является и решением уравнения (3.7). Но так как уравнение (3.7) с краевым условием (3.4) имеет единственное решение $w^*(\cdot)$, то оно является также и единственным решением уравнения (3.1) с тем же краевым условием. Поэтому в силу теоремы 1 имеют место равенства (3.8). □

Из установленной в ходе доказательства этой теоремы равносильности уравнений (3.7) и (3.1) и из того, что на пространстве непрерывно дифференцируемых функций уравнение (3.7) равносильно уравнению Айзекса — Беллмана [9, теорема 2], следует, что на том же пространстве ему равносильно также и уравнение (3.1). Поэтому как модифицированное основное уравнение (3.7), так и само основное уравнение (3.1) могут быть названы обобщенными уравнениями Айзекса — Беллмана.

4. Заключение

В силу определения функций $w_-(\cdot)$ и $w_+(\cdot)$ равенства (3.8) в теореме 2 означают, что единственное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию (3.7), с одной стороны, является равномерным пределом последовательных приближений (2.3), (2.5), а с другой — равномерным пределом последовательных приближений (2.4), (2.6). Но так как каждое из последовательных приближений (2.3), (2.5) является функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в классе рекурсивных стратегий, а каждое из последовательных приближений (2.4), (2.6), взятое со знаком минус, в свою очередь, является функцией гарантированного выигрыша 2-го игрока в таком же классе стратегий, то из теоремы 2 следует, что каждая игра $\Gamma(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in D$, имеет решение в классе рекурсивных стратегий. Это наряду с другими результатами, полученными в рамках метода программных итераций, доказывает, что базовая версия метода программных итераций, связанная с операторами Φ_- и Φ_+, как и модифицированная его версия, связанная с операторами Φ_-^c и Φ_+^c, может быть положена в основу построения теории дифференциальных игр в замкнутой форме. При этом в одних случаях [2; 10; 11] более удобным является использование операторов Φ_- и Φ_+ , уравнения (10) и соответствующих итеративных процедур, а в других [9; 12; 13] — операторов Φ_-^c и Φ_+^c, уравнения (3.7), и соответствующих этим операторам итеративных процедур.

Помимо того, что условие (d) вместе с условиями (a)–(c) и (e) гарантирует существование и единственность решения уравнения (3.7) с краевым условием (3.4), значение условия (d) в теореме 2 и лемме обусловлено также и тем, что гарантируя, вместе с условиями (a)–(c), равномерную непрерывность функций $w_-^{(0)}(\cdot)$ и $w_+^{(0)}(\cdot)$ на любом ограниченном пространстве позиций, оно гарантирует на нем существование решения уравнения (3.1) с тем же краевым условием. Последнее утверждение вытекает из доказательства теоремы 3.5 в [6], а также из теоремы 3.3 и леммы 3.6 в той же статье [6].

Отметим наконец, что метод программных итераций и рекурсивные стратегии успешно использовались ранее как инструмент исследования бескоалиционных дифференциальных игр [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
2. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, вып. 3. С. 394–420.
3. **Чистяков С.В., Петросян Л.О.** Об одном подходе к решению игр преследования // Вестн. ЛГУ. 1977. Вып. 1. С. 77–82.
4. **Чистяков С.В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 825–832.
5. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
6. **Chistyakov S., Nikitin F.** On value operators in differential games // Appl. Math. Sci. 2015. Vol. 9, no. 59. P. 2941–2952.
7. **Чистяков С.В.** Операторы значения антагонистических дифференциальных игр. СПб: Изд-во СПбГУ, 1999. 62 с.
8. **Никитин Ф.Ф., Чистяков С.В.** Теорема существования и единственности решения обобщенного уравнения Айзекса — Беллмана // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 743–752.
9. **Чистяков С.В.** О функциональных уравнениях в играх сближения в заданный момент времени // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 874–877.
10. **Chentsov A.G., Subbotin A.I.** An iterative procedure for constructing minimax and viscosity solutions to the Hamilton–Jacobi equations and its generalization // Proc. Steklov Inst. Math. 1999. Vol. 224. P. 286–309.
11. **Chistyakov S.V., Nikitin F. F.** On regular differential games of persuit with fixed duration // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. 2014. Iss. 4. P. 17–24.

12. **Чистяков С.В.** Программные итерации и универсальные ε-оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 6. С. 1333–1335.
13. **Nikitin F.F.** Viscosity solutions and programmed iteration method for Isaacs-Bellman equation // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. 2014. Iss. 2. P. 84–92.
14. **Чистяков С.В.** О бескоалиционных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1052–1055.

Сергей Владимирович Чистяков
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург
e-mail: svch50@mail.ru

Поступила 10.10.2017

REFERENCES

1. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence. *Soviet Math. Dokl.*, 1976 (1975), vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
2. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
3. Chistyakov S.V., Petrosyan L.A. On an approach to the solution of pursuit games. *Vestnik Leningrad. Univ. Math.*, 1977, no. 1, pp. 77–82 (in Russian).
4. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 41, no. 5, pp. 845–852. doi: 10.1016/0021-8928(77)90167-8 .
5. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii.* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
6. Chistyakov S., Nikitin F. On value operators in differential games. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 59, pp. 2941–2952.
7. Chistyakov S.V. *Operatory znachenija antagonisticheskih differencial'nyh igr.* [Value operators in antagonistic differential games]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University Publ., 1999, 62 p.
8. Nikitin F.F., Chistyakov S.V. Existence and uniqueness theorem for a generalized Isaacs–Bellman equation. *Diff. Eq.*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 757–766. doi: 10.1134/S0012266107060031 .
9. Chistyakov S.V. On functional equations in games of encounter at a prescribed instant. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 704–706. doi: 10.1016/0021-8928(82)90023-5 .
10. Chentsov A.G., Subbotin A.I. An iterative procedure for constructing minimax and viscosity solutions to the Hamilton–Jacobi equations and its generalization. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1999, vol. 224, pp. 286–309.
11. Chistyakov S.V., Nikitin F.F. On regular differential games of persuit with fixed duration. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2014, no. 4, pp. 17–24 (in Russian).
12. Chistyakov S.V. Programmed iterations and universal ε-optimal stratagies in a positional differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 1, pp. 354–357.
13. Nikitin F.F. Viscosity solutions and programmed iteration method for Isaacs–Bellman equation. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2014, no. 2, pp. 84–92 (in Russian).
14. Chistyakov S.V. On coalition-free differential games. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 166–169.

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Sergey Vladimirovich Chistyakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: svch50@mail.ru .