ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий

Рассматривается конфликто-управляемый процесс сближении траектории с цилиндрическим терминальным множеством. Предлагаемая формализация охватывает широкий круг квазилинейных функционально-дифференциальных систем. С использованием техники многозначных отображений и их селекторов получены достаточные условия завершения игры за конечное время. Идейно методика близка к схеме, связанной со временем первого поглощения. В качестве иллюстрации исследуются квазилинейные интегро-дифференциальные игры. Получено представление решения в виде аналога формулы Коши. Конкретные вычисления проведены для системы с простой матрицей. В качестве областей управления игроков выступают шары с центром в нуле, а терминальное множество — линейное подпространство. В зависимости от соотношений между начальным состоянием и параметрами процесса получены условия окончания игры. В одном из случаев найден явный вид гарантированного времени.

Ключевые слова: конфликтно-управлямый процесс, селектор многозначного отображения, интеграл Ауманна, опорная функция, интегро-дифференциальное уравнение.

A. A. Chikrii, G. Ts. Chikrii. Game problems of approach for quasilinear systems of general form.

We study a conflict-controlled process of the approach of a trajectory to a cylindrical terminal set. The problem statement encompasses a wide range of quasilinear functional–differential systems. We use the technique of set-valued mappings and their selections to derive sufficient conditions for the game termination in a finite time. The methodology used is close to the scheme that involves the time of the first absorption. By way of illustration, quasilinear integro-differential games are examined. For this purpose, their solutions are presented in the form of an analog of the Cauchy formula. The calculations are performed for the case of a system with a simple matrix; the control sets of the players are balls centered at the origin and the terminal set is a linear subspace. Depending on the relations between the initial state of the system and the parameters of the process, sufficient conditions for the game termination are derived. An explicit form of the guaranteed time is found in one specific case.

Keywords: conflict-controlled process, selection of a set-valued mapping, Aumann's integral, support function, integro-differential equation.

MSC: 49N70, 91A25, 49N90, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-273-287

Введение

Широкий спектр исследований посвящен задачам управления в условиях конфликта и неопределенности. Одним из центральных в этом направлении является позиционный подход [1; 2]. Построение управлений по позиции зачастую требует их непрерывной зависимости от фазовой переменной [3], чтобы обеспечить существование решения соответствующего уравнения. Иногда это условие можно ослабить, переходя к рассмотрению дифференциальных включений. Упомянутые условия регулярности позволяют использовать для решения некоторые вспомогательные задачи программного управления. Эта идеология положена, в частности, в основу метода программных итераций А. Г. Ченцова [4].

Плодотворный позиционный подход в сочетании с иными идеями стал источником для развития методов решения многих задач управления и связанных с ними проблем [5–7].

Заметим также, что в ряде случаев при иных информационных предположениях удается обойти вопрос, связанный с существованием решения конфликтно-управляемого процесса. Так дело обстоит при определенной дискриминации игрока с использованием ε-стратегий [8; 9], квазистратегий [4] и стробоскопических стратегий [10;11], предписывающих контруправления.

В данной работе в свете вышесказанного рассматриваются игровые задачи для систем, у которых при представлении решения блок управления отделен от блока начальных данных. При этом охватываются процессы различной природы, включая системы с дробными производными и импульсным воздействием.

Для иллюстрации подхода выбрана игровая задача, в которой динамика описывается системой интегро-дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи, вспомогательные построения

Пусть состояние конфликтно-управляемого процесса в произвольный момент времени t, $t \geq t_0 \geq 0$, описывается вектором

$$z(t) = g(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\left(t, s, u(s), v(s)\right) ds. \tag{1.1}$$

Здесь $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $g(t), g\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, — непрерывная вектор-функция; функция $\varphi(t, s, u, v)$, $\varphi\colon \Delta(t_0) \times U \times V \to \mathbb{R}^n$, непрерывна по совокупности переменных.

Обозначим $\Delta(t_0) = \{(t, s)\colon t_0 \leq s \leq t < +\infty\}$, области управления $U \in K(\mathbb{R}^n)$, $V \in K(\mathbb{R}^n)$. Допустимые управления $u(s), v(s)$ — измеримые функции, принимающие значения из компактов U и V соответственно. Обозначим

$$\Omega_U = \{u(s) : u(s) \in U,\ s \in [t_0, +\infty)\}, \quad \Omega_V = \{v(s) : v(s) \in V,\ s \in [t_0, +\infty)\}.$$

Элементы множеств Ω_U и Ω_V — это $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$.

Кроме динамики задано терминальное множество $M^*, M^* \subset \mathbb{R}^n$, имеющее цилиндрический вид:

$$M^* = M_0 + M, \tag{1.2}$$

где M_0 — линейное подпространство из $\mathbb{R}^n$, а M — выпуклый компакт из подпространства L, $L \subset \mathbb{R}^n$, которое является ортогональным дополнением к M_0 в $\mathbb{R}^n$, т. е. $M \in \mathrm{co}K(L)$. Будем считать, что $g(t_0) \notin M^*$.

Целью преследователя (u) является вывод траектории объекта (1.1) на терминальное множество M^*. Цель убегающего (v) — уклонить траекторию от встречи с терминальным множеством. Игра заканчивается в момент времени $T,\ T > t_0$, такой, что $z(T) \in M^*$или $\pi z(T) \in M$, где π — ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в L.

Станем на сторону преследователя и найдем гарантированное время окончания игры. Пусть игроки на интервале времени $[t_0, t)$ и далее применили допустимые управления

$$u_t(\cdot) = \{\, u(s) : s \in [t_0, t)\}, \quad v_t(\cdot) = \{\, v(s) : s \in [t_0, t)\}, \quad u(\cdot) \in \Omega_U, \quad v(\cdot) \in \Omega_V.$$

Тогда для произвольных конечных моментов T и t, $t_0 \leq t \leq T$,

$$z(T) = z(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)) + \int\limits_{t}^{T} \varphi(T, s, u(s), v(s))\ ds,$$

где

$$z(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)) = g(T) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\ (T, s, u(s), v(s))\ ds. \tag{1.3}$$

Заметим, что $z(T, t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)) = g(T)$.

Обозначив $\zeta = z\left(T, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)$, введем в рассмотрение функцию

$$W\left(T, t, \zeta;\ p\right) = \left(\zeta, p\right) + \int\limits_t^T \min_{v \in V} \max_{u \in U} \left(\varphi\ \left(T, s, u, v\right), p\right)\, ds, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Ее градиент по t, ζ имеет вид

$$\nabla_{t,\zeta} W\left(T, t, \zeta;\ p\right) = \begin{pmatrix} \nabla_t W\left(T, t, \zeta;\ p\right) \\ \nabla_\zeta W\left(T, t, \zeta;\ p\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\min\limits_{v \in V} \max\limits_{u \in U}\ \left(p, \varphi\ \left(T, t, u, v\right)\right) \\ p \end{pmatrix}$$

и является непрерывной функцией переменных T, t, p в силу непрерывности функции $\varphi\left(t, s, u, v\right)$ по совокупности переменных.

Рассмотрим опорную функцию множества M^*:

$$C\left(M^*;\ p\right) = \begin{cases} C\left(M;\ p\right), & p \in L, \\ +\infty\,, & p \notin L. \end{cases}$$

Подпространство L является барьерным конусом множества M^* [12]. Поскольку M — компакт из L, то функция $C\left(M;\ p\right)$ непрерывна на множестве L. Введем функцию

$$\lambda\left(T, t, \zeta\right) = \min_{\|p\|=1, p \in L} \left[W\left(T, t, \zeta;\ p\right) + C\left(M;\ -p\right)\right]. \tag{1.4}$$

Обозначим

$$T\left(t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = \min\left\{T \geq t\colon \lambda\left(T, t, z\left(T, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right) = 0\right\}, \tag{1.5}$$

$$\Gamma\left(T, t, \zeta\right) = \left\{p\colon p \in L,\ \|p\| = 1,\ W\left(T, t, \zeta;\ p\right) + C\left(M;\ -p\right) = \lambda\left(T, t, \zeta\right)\right\}. \tag{1.6}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$W\left(T, t\right) = \bigcap_{v(\cdot) \in \Omega_V} \left(M - \int\limits_t^T \pi\ \varphi\ \left(T, s, U, v\left(s\right)\right)\ ds\right). \tag{1.7}$$

В это выражение входит интеграл от многозначного отображения — интеграл Ауманна [12]. Отображение $W\left(T, t\right)$ выпуклозначно в силу его свойств. Определим время

$$T_0 = \min\left[\,T\colon T \geq t_0,\ \pi\ g\left(T\right) \in W\left(T, t_0\right)\right].$$

Будем считать, что минимум достигается.

Вычислим опорную функцию множества $W\left(T, t_0\right)$:

$$C\left(W\left(T, t_0\right);\ p\right) = \mathrm{co}\left[C\left(M;\ p\right) + \int\limits_{t_0}^T \min_{v \in V} \max_{u \in U} \left(-p, \varphi\ \left(T, s, u, v\right)\right) ds\right],$$

где знак co обозначает овыпукление функции [12].

Очевидно, что $g\left(T\right) \in W\left(T, t_0\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{p \in L, \|p\|=1} \left[C\left(W\left(T, t_0\right);\ -p\right) + \left(p, g\left(T\right)\right)\right] \geq 0.$$

Поскольку минимум функции совпадает с минимумом ее овыпукления, то

$$\min_{p \in L, \|p\|=1} \left[C\left(W\left(T, t_0\right);\ -p\right) + \left(p, g\left(T\right)\right)\right] = \lambda\left(T, t_0, g\left(T\right)\right).$$

Это означает, что

$$T_0 = T\left(t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right) = \min\left[T \geq t_0 \colon \lambda\left(T, t_0, g(T)\right) = 0\right].$$

Будем считать, что минимум достигается и конечен. Включение $\pi\, g(T_0) \in W(T_0, t_0)$ означает, что T_0 — минимальное время, за которое преследователь может при помощи выбора своего управления гарантированно вывести траекторию системы (1.1) на множество M^*, зная наперед управление убегающего. Покажем, что $T_0 > t_0$. Используя обозначения (1.4), (1.7), имеем

$$\lambda\left(t_0, t_0, z\left(t_0, t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right)\right) = \min_{\|p\|=1, p\in L}\left[W\left(t_0, t_0, g(t_0), p\right) + C\left(M;\ -p\right)\right].$$

Поскольку $g(t_0) \notin M$, то $\lambda\left(t_0, t_0, g(t_0)\right) < 0$, поэтому $T_0 \neq t_0$.

Лемма 1. *Если $T\left(t, u_t(\cdot),\ v_t(\cdot)\right) = t$, то $\pi z(t) \in M$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на интервале $[t_0, t)$ игроки применили управления $u_t(\cdot)$, $v_t(\cdot)$. Если $T\left(t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t$, то из выражения (1.4) следует, что

$$\lambda\left(t, t, z\left(t, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)\right) \geq 0,$$

а с учетом формулы (1.3)

$$z\left(t, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right) = g(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\left(t, s, u(s), v(s)\right) ds$$

получим $\{\pi z(t)\} \cap M \neq \varnothing$.

Лемма доказана.

2. Достаточные условия завершения игры

Обозначим $T_t = T\left(t,\ u_t(\cdot),\ v_t(\cdot)\right)$. Текущей позицией в игре будем считать пару $\left(t,\ z\left(T_t,\ t,\ u_t(\cdot),\ v_t(\cdot)\right)\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \geq t_0$, начальной позицией игры является пара

$$\left(t_0,\ z\left(T_0, t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right)\right) = \left(t_0, g(T_0)\right).$$

Далее будут установлены условия, при которых, пользуясь лишь информацией о текущей позиции игры, можно закончить игру не позже времени T_0.

Теорема 1. *Пусть в игре сближения* (1.1), (1.2) *выполнены следующие условия*:

1) *образы отображения $W(T, t)$ являются непустыми для $t_0 \leq t \leq T \leq T_0 < +\infty$;*

2) *для любой позиции $\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$, $t_0 \leq t^* \leq T_0$, такой, что $T_{t^*} \leq T_0$, существует окрестность $\Omega\ \left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$ точки $\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$, такая, что для всех $(t, \zeta) \in \Omega\ \left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$ множество $\Gamma(T_{t^*}, t, \zeta)$ состоит из единственного элемента $p(T_{t^*}, t, \zeta)$.*

Тогда при произвольном допустимом управлении убегающего преследователь может закончить игру из начального состояния не позже, чем в момент T_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t^* = t_0$. При произвольном фиксованном $T \geq t_0$ функция $z\left(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)$, $t_0 \leq t \leq T$, непрерывна по t. Учитывая условие 2), можно утверждать, что существует момент времени t_1, $t_1 > t_0$, такой, что для всех возможных $z\left(T_0, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)$, $t \in [t_0, t_1)$, множество $\Gamma\left(T_0,\ t,\ z\left(T_0,\ t,\ u_t(\cdot),\ v_t(\cdot)\right)\right)$ (1.6) состоит из единственного элемента $p_0\ \left(T_0,\ t,\ z\ \left(T_0,\ t,\ u_t(\cdot),\ v_t(\cdot)\right)\right)$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U^e\left(T_0, p_0\left(T_0, t, \zeta\right), t, v\left(t\right)\right) = \Big\{u\colon u \in U,\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_0, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_0, t, u, v\left(t\right)\right)\right] \tag{2.1}$$

$$= \left(p_0\left(T_0, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_0, t, u, v\left(t\right)\right)\right)\Big\}, \quad t \in \left[t_0, t_1\right),$$

где

$$\zeta = z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right).$$

В силу допущений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1.1) многозначное отображение (2.1) является компактнозначным и полунепрерывным сверху по переменным (p, t, v) [14]. Поэтому, в силу теоремы об измеримом выборе можно утверждать, что отображение $U^e\left(T_0, p_0, t, v\right)$ имеет хотя бы один борелевский селектор $u^e\left(p_0, t, v\right)$ [13].

Учитывая непрерывную зависимость $z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)$ от t, можно утверждать, что $p_0\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$ непрерывно зависит от $t, t \in \left[t_0, t_1\right)$. Из измеримости управления $v\left(t\right), t \in \left[t_0, t_1\right)$, и непрерывности по t функции $p_0\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$ следует, что селектор $u^e\left(p_0, t, v\right)$ есть суперпозиционно измеримая функция, а значит,

$$u^e\left(t\right) = u^e\big(p_0\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right), v\left(t\right)\big), \quad t \in \left[t_0, t_1\right),$$

является измеримой функцией. Управление преследователя на полуинтервале $\left[t_0, t_1\right)$ будем выбирать в виде селектора $u^e\left(t\right),\ t \in \left[t_0, t_1\right)$.

Согласно свойствам функции минимума при каждом фиксированном $T,\ T \geq t_0$, функция $\lambda\left(T, t, \zeta\right),\ t_0 \leq t \leq T,\ \zeta \in \mathbb{R}^n$, как функция t, ζ является дифференцированной вдоль любого направления. К тому же, поскольку в некоторой окрестности $\Omega\left(t^*, \zeta^*\right)$ точки $\left(t^*, \zeta^*\right)$ множество $\Gamma\left(T, t, \zeta\right)$ состоит из единственного элемента $p\left(T, t, \zeta\right)$ для всех $\left(t, \zeta\right)$ из этой окрестности, то $p\left(T, t, \zeta\right)$ непрерывно зависит от $\left(t, \zeta\right)$ и

$$\partial_{t,\zeta}\lambda\left(T, t, \zeta\right) = \begin{pmatrix} -\min\limits_{v \in V}\ \max\limits_{u \in U}\left[p\left(T, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T, t, u, v\right)\right] \\ p\left(T, t, \zeta\right) \end{pmatrix} \quad \forall\left(t, \zeta\right) \in \Omega\left(t^*, \zeta^*\right).$$

Применив управление $u^e\left(t\right),\ t \in \left[t_0, t_1\right)$, и произвольное допустимое управление $v\left(t\right),\ t \in \left[t_0, t_1\right)$, получим позицию $\left(t_1, z\left(T_{t_1}, t_1, u_{t_1}\left(\cdot\right), v_{t_1}\left(\cdot\right)\right)\right)$, причем $T_0 \geq T_{t_1}$. Оценим производную

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right), \quad t \in \left[t_0, t_1\right).$$

Обозначим $z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = \zeta^e$. Учитывая выражение (1.3), получим

$$\frac{d}{dt}z\left(T, t, u_{\mathrm{t}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = \varphi\left(T, t, u\left(t\right), v\left(t\right)\right).$$

Далее, имеем

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_0, t, \zeta^e\right) = -\min_{v \in V}\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\left(T_0, t, u\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right]$$

$$+ \left(p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\ \left(T_0, t, u^e\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right)$$

$$= -\min_{v \in V}\left[p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\ \left(T_0, t, u^e\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right] + \left(p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\ \left(T_0, t, u^e\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right) \geq 0,$$

Заметим, что при дифференцировании функции $\lambda\left(T_0, t, \zeta^e\right)$ по t существенно использовалось условие 2) теоремы.

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right) \geq 0, \quad t \in \left[t_0, t_1\right).$$

Иначе говоря, функция $\lambda\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right)\right)$ на интервале $[t_0, t_1)$ не убывает. Поскольку $\lambda\left(T_0, t_0, z\left(T_0, t_0, u_{t_0}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right)\right) \geq 0$, то $\lambda\left(T_0, t_1, z\left(T_0, t_1, u_{t_1}^{e}(\cdot), v_{t_1}(\cdot)\right)\right) \geq 0$. Последнее неравенство свидетельствует, что согласно (1.5)

$$T_{t_1} \leq T_0, \quad T\left(t_1, u_{t_1}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_1}(\cdot)\right) \leq T_0.$$

Не исключено, что на полуинтервале $[t_0, t_1)$ будет иметь место равенство $T\left(t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t$. Это будет означать, что в силу леммы 1 игра завершена. Если нет, то согласно условиям теоремы найдется момент времени $t_2,\ t_2 > t_1$, такой что на интервале $[t_1, t_2)$ можно повторить процедуру нахождения селектора многозначного отображения

$$U^e\left(T_{t_1}, p_0\left(T_{t_1}, t, \zeta\right), t, v(t)\right) = \Big\{u\colon u \in U,\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_{t_1}, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_{t_1}, t, u, v(t)\right)\right]$$
$$= \left(p_0\left(T_{t_1}, t, \zeta\right), \varphi\left(T_{t_1}, t, u, v(t)\right)\right)\Big\}, \quad t \in [t_1, t_2).$$

где $\zeta = z\left(T_{t_1}, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)$.

Возможно, на отрезке $[t_1, t_2)$ реализуется равенство $T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t$. Тогда игра завершена. Если нет, то найдется момент времени $t_3, t_3 > t_2$, такой, что на полуинтервале $[t_2, t_3)$ можно повторить описанную выше процедуру построения управления. Продолжая этот процесс, получим последовательность полуинтервалов $[t_0, t_1),\ [t_1, t_2),\ [t_2, t_3),\ \ldots$. На каждом из них управление преследователя выбирается в виде суперпозиционно измеримого селектора многозначного отображения

$$U^e\left(T_{t_k}, p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right), t, v(t)\right) \tag{2.2}$$
$$= \Big\{u\colon u \in U,\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u, v(t)\right)\right] = \left(p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_{t_k}, t, u, v(t)\right)\right)\Big\},$$

где $\zeta = z\left(T_{t_k}, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_{k+1} \leq T_{t_k}$.

Поскольку многозначное отображение $U^e(T, p_0, t, v)$ является компактнозначным и при любом T полунепрерывным сверху по (p_0, t, v), то в нем существует борелевский селектор $u^e(p_0,\, t,\, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Учитывая, что $p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right)$ и $\zeta = \zeta(t)$ непрерывны по t, можно сделать вывод, что $p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta(t)\right)$ непрерывна по t, а значит, контруправление — селектор отображения (2.2); $u^e(t)$ — измеримая функция на каждом из полуинтервалов $[t_k, t_{k+1})$.

Согласно [15] построенная функция $u^e(t)$ измерима на каждом из полуинтервалов $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, измерима на их счетном объединении, т. е. при $t \geq t_0$.

Покажем, что

$$T\left(t_k, u_{\mathrm{t}_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right) \geq T\left(t_{k+1}, u_{\mathrm{t}_k+1}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_{k+1}}(\cdot)\right). \tag{2.3}$$

Для этого оценим производную

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_{t_k}, t, z\left(T_{t_k}, t, u_{t_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right)\right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Обозначим $z\left(T_{t_k}, t, u_{t_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right) = \zeta_k^e$. Аналогично предыдущему

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_{t_k}, t, \zeta^e\right)$$
$$= -\min_{v \in V}\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u, v\right)\right] + \left(p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u^e(t), v\right)\right)$$
$$= -\min_{v \in V}\left[p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u^e(t), v\right)\right] + \left(p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u^e(t), v\right)\right) \geq 0.$$

Таким образом, $\dfrac{d}{dt}\lambda\left(T_{t_k},\, t,\, z\left(T_{t_k},\, t,\, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot),\, v_t(\cdot)\right)\right) \geq 0$, $t \in [t_k,\, t_{k+1})$, т. е. функция $\lambda\left(T_{t_k}, t, z\left(T_{t_k}, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right)\right)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ не убывает. Согласно определению $\lambda\left(T_{t_k}, t_k, z\left(T_{t_k}, t_k, u_{t_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right)\right) \geq 0$, поэтому

$$\lambda\Big(T_{t_k}, t_{k+1}, z\Big(T_{t_k}, t_{k+1}, u_{t_{k+1}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_{k+1}}(\cdot)\Big)\Big) \geq 0.$$

Отсюда имеем неравенство (2.3), а с ним и тот факт, что

$$T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right) \leq T_0, \quad t_0 \leq t \leq T_0.$$

С другой стороны, согласно (1.5) $T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right) \geq t$, $t_0 \leq t \leq T_0$. Таким образом,

$$t \leq T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right) \leq T_0, \quad t_0 \leq t \leq T_0. \tag{2.4}$$

Следовательно, равенство

$$T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t, \tag{2.5}$$

означающее в силу леммы 1 окончание игры, реализуется не позже времени T_0.

Продолжая построение управления указанным способом, получим последовательность полуинтервалов $[t_0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3), \ldots$. При этом $t_k < T_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Если на одном из них реализовалось равенство (2.5), то процесс обрывается. В противном случае заметим, что последовательность $\{t_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является монотонно возрастающей и ограниченной сверху, поэтому существует предел $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = \bar{t}$. Очевидно, что $T\left(\bar{t}, u_{\bar{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{\bar{t}}(\cdot)\right) \leq T_0$. Начиная с момента $\bar{t}$ и позиции $\left(\bar{t}, z\left(T_{\bar{t}}, \bar{t}, u_{\bar{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{\bar{t}}(\cdot)\right)\right)$, можно продолжить построение управления.

Очевидно, что для всех движений, которые осуществляются под влиянием управлений $u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо двойное неравенство (2.4), согласно которому условие (2.5) будет иметь место не позже момента времени T_0.

Теорема доказана.

3. Интегро-дифференциальные игры сближения

Рассмотрим задачу сближения для конфликтно-управляемого процесса, эволюция которого описывается системой интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = A(t)\, z(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\, z(s)\, ds + B(t)\, \varphi_1(u(t), v(t))$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} C(t,s)\, \varphi_2(u(s), v(s))\, ds + f(t). \tag{3.1}$$

Здесь $z(t_0) = z_0, t \geq t_0 \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^n$; $A(t), B(t)$ — матричные функции размеров $n \times n_1$ и $n \times n_2$ соответственно, они непрерывны на полуоси $R_{t_0} = \{t : t \geq t_0\}$; $f(t)$ — непрерывная на R_{t_0} вектор-функция; $K(t,s), C(t,s)$ — матричные функции размеров $n \times n$, $n \times n_2$, являющиеся непрерывными в треугольнике Δ_{t_0}; $\varphi_1(u,v) : U \times V \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\varphi_2(u,v) : U \times V \to \mathbb{R}^{n_2}$ — непрерывные по совокупности переменных вектор-функции; U и V — заданные компакты, $U \subset \mathbb{R}^{r_1}$, $V \subset \mathbb{R}^{r_2}$. Терминальное множество имеет вид (1.2).

Лемма 2. *Пусть функция $g(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, T)$. Тогда уравнение*

$$\dot{z}(t) = A(t)\, z(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\, z(s)\, ds + g(t) \tag{3.2}$$

имеет единственное, непрерывное на $[t_0, T)$ решение:

$$z(t) = \tilde{g}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\, \tilde{g}(s)\, ds.$$

Здесь

$$\tilde{g}(t) = H(t, t_0)\ z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ g(\tau)\, d\tau, \tag{3.3}$$

$H(t, s)$ — *матрицант однородной системы*

$$\dot{z}(t) = A(t)\ z(t)\,, \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in [t_0, T)\,;$$

$\tilde{R}(t, s)$ — *резольвента матрицы* $\tilde{K}(t, s)$, *являющаяся непрерывной на множестве* $\Delta_{t_0}^{T} = \{(t, s) : t_0 \le s \le t \le T\}$ *матричной функцией, определяемой равномерно сходящимся на* $\Delta_{t_0}^{T}$ *рядом, где*

$$\tilde{R}(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_n(t, s)\,, \tag{3.4}$$

$$\tilde{K}_1(t, s) = \tilde{K}(t, s)\,, \quad \tilde{K}_n(t, s) = \int\limits_{s}^{t} \tilde{K}(t, \tau)\, \tilde{K}_{n-1}(\tau, s)\, d\tau, \tag{3.5}$$

$$n = 2, 3, \ldots, \quad \tilde{K}(t, s) = \int\limits_{s}^{t} H(t, \tau)\ K(\tau, s)\, d\tau\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность непрерывного решения уравнения (3.2) вытекает из предположений относительно параметров системы (3.1) [16]. Введем функцию

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s)\ z(s)\ ds + g(t)$$

и рассмотрим задачу Коши для системы

$$\dot{z}(t) = A(t)\ z(t) + F(t)\,, \quad z(t) = z_0, \quad t \in [t_0,\ T)\,.$$

Она имеет единственное решение

$$z(t) = H(t, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ F(\tau)\, d\tau\,.$$

Подставим в эту формулу значение $F(t)$. Тогда

$$z(t) = H(t, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{\tau} H(t, \tau)\ K(\tau, s)\, z(s)\ ds\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ g(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда с учетом формулы Дирихле [17] имеем

$$z(t) = H(t, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} H(t, \tau)\ K(\tau, s)\, z(s)\ d\tau \right) z(s)\, ds + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ g(\tau)\, d\tau.$$

Это выражение в силу (3.3), (3.5) является уравнением Вольтерра второго рода:

$$z(t) = \tilde{g}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{K}(t, s)\ z(s)\, ds, \quad t \in [t_0,\ T)\,,$$

где $\tilde{K}(t,s)$, $\tilde{g}(t)$ — функции, непрерывные в областях своего определения. Это уравнение имеет единственное решение [17]: $z(t)=\tilde{g}(t)+\int_{t_0}^{t}\tilde{R}(t,s)\ \tilde{g}(s)\,ds,\ t\in[t_0,\ T)$, где $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{R}(t,s)$ задаются выражениями (3.3)–(3.5) соответственно.

Лемма доказана.

Следствие. *На произвольном отрезке* $[t_0,T]$ *уравнение* (3.2) *имеет единственное непрерывное решение, которое может быть представлено в виде*

$$z(t)=g_0(t)+\int\limits_{t_0}^{t}M(t,s)\ \varphi_1(u(s),v(s))\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}N(t,s)\ \varphi_2(u(s),v(s))\,ds. \tag{3.6}$$

Здесь

$$g_0(t)=f_0(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\tilde{R}(t,s)\ f_0(s)\,ds, \tag{3.7}$$

$$f_0(t)=H(t,t_0)\,z_0+\int\limits_{t_0}^{t}H(t,s)\ f(s)\,ds,\quad t\in[t_0,\ T); \tag{3.8}$$

$$M(t,s)=\tilde{B}(t,s)+\int\limits_{s}^{t}\tilde{R}(t,\tau)\ \tilde{B}(\tau,s)\,d\tau, \tag{3.9}$$

$$\tilde{B}(t,s)=H(t,s)\,B(s); \tag{3.10}$$

$$N(t,s)=\tilde{C}(t,s)+\int\limits_{s}^{t}\tilde{R}(t,\tau)\ \tilde{C}(\tau,s)\,d\tau, \tag{3.11}$$

$$\tilde{C}(t,s)=\int\limits_{s}^{t}H(t,\tau)\ C(\tau,s)\,d\tau. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность вытекает из леммы 2. Положим

$$g(t)=B(t)\ \varphi_1(u(s),v(s))+\int\limits_{t_0}^{t}C(t,s)\ \varphi_2(u(s),v(s))\ ds+f(t).$$

Тогда согласно лемме 2

$$z(t)=\tilde{g}(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\tilde{R}(t,s)\ \tilde{g}(s)\,ds,\quad t\in[t_0,\ T),$$

где

$$\tilde{g}(t)=H(t,t_0)\,z_0+\int\limits_{t_0}^{t}H(t,s)\ f(s)\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}H(t,s)\ B(s)\ \varphi_1(u(s),v(s))\,ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{s}^{t}H(t,\tau)\ C(\tau,s)\,d\tau\right)\varphi_2(u(s),v(s))\,ds.$$

Перепишем последнюю формулу, используя обозначения (3.8), (3.10), (3.12):

$$\tilde{g}(t) = f_0(t) + \int_{t_0}^{t} \tilde{B}(t,s)\ \varphi_1(u(s), v(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \tilde{C}(t,s)\ \varphi_2(u(s), v(s))\,ds.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{g}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ f_0(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\,\tilde{B}(s,\tau)\ \varphi_1(u(\tau), v(\tau))\,d\tau\,ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{C}(s,\tau)\ \varphi_2(u(\tau), v(\tau))\,d\tau\,ds.$$

Применим формулу Дирихле к двум последним членам суммы:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{B}(s,\tau)\ \varphi_1(u(\tau), v(\tau))\,d\tau\,ds = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{s}^{t} \tilde{R}(t,\tau)\ \ \tilde{B}(\tau,s)\,d\tau\right) \varphi_1(u(s), v(s))\,ds,$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{C}(s,\tau)\ \varphi_2(u(\tau), v(\tau))\,d\tau\,ds = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{s}^{t} \tilde{R}(t,\tau)\ \ \tilde{C}(\tau,s)\,d\tau\right) \varphi_2(u(s), v(s))\,ds.$$

Учитывая (3.9), (3.11), получим формулу (3.6).
Следствие доказано.

Таким образом, решение уравнения (3.1) представлено в виде (1.1), где $g(t) = g_0(t)$ задается формулой (3.7), а

$$\varphi(t,s,u,v) = M(t,s)\ \varphi_1(u,v) + N(t,s)\ \varphi_2(u,v)\,, \tag{3.13}$$

$$(t,s) \in \Delta(t_0)\,, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Эти функции удовлетворяют всем условиям, наложенным на систему (1.1), и, следовательно, к анализу интегро-дифференциальной игры (3.1) применима теорема 1. Ее эффективность проиллюстрируем на примере конкретной интегро-дифференциальной игры, когда аналитические вычисления можно провести до конца.

4. Пример

Рассмотрим игровую задачу сближения для системы

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) + u(t) - v(t) + \int_{0}^{t} (u(s) - v(s))\ ds; \quad t_0 = 0, \quad z(0) = z_0, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Терминальное множество — линейное подпространство M_0. В предыдущих обозначениях $r_1 = r_2 = n_1 = n_2 = n$, области управления

$$U = \{\, u : u \in \mathbb{R}^n,\ \|u\| \le a,\ a > 1\}\,; \quad V = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| \le 1\}\,.$$

Кроме того, $A(t) = \lambda E$, $B(t) = E$, $C(t,s) = E$, где E — единичная матрица порядка n; $\varphi_1(u,v) = \varphi_2(u,v) = u - v$, $f(t)$ – нулевой n-мерный вектор-столбец, λ — число.

В данном примере $K(t,s)$ — нулевая матрица порядка n, в силу (3.5) таковой является и матрица $\tilde{K}(t,s)$, причем $H(t,s) = e^{\lambda(t-s)}E$. Исследуем два случая.

С л у ч а й I. $\lambda \neq 0$. Тогда из формул (3.7), (3.8) вытекает, что $f_0(t) = g_0(t) = e^{\lambda t} z_0$, а из (3.10), (3.12) следует

$$\tilde{B}(t,s) = e^{\lambda(t-s)} E, \quad \tilde{C}(t,s) = \left(\int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)} d\tau \right) E = \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda(t-s)} - 1 \right) E.$$

Используя выражения (3.9), (3.11), находим

$$M(t,s) = e^{\lambda(t-s)} E, \quad N(t,s) = \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda(t-s)} - 1 \right) E.$$

Из выражения (3.6) получим

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 + \int\limits_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u(s) - v(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Согласно формуле (3.13) имеем

$$\varphi(t,s,u,v) = \left(e^{\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u - v),$$

$$\zeta = z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot)) = e^{\lambda T} z_0 + \int\limits_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u(s) - v(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Функция $W(T,t,\zeta,p)$ имеет вид

$$W(T,t,\zeta,p) = (\zeta,p) + \int\limits_t^T \left\{ \min_{v \in S} \max_{u \in aS} \left[p, \left(e^{\lambda(T-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u - v) \right] \right\} ds,$$

$$S = \{ v : \|v\| \leq 1 \}.$$

Поскольку $\left(e^{\lambda(T-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) \geq 0$, $s \in [0,T]$ при любом λ, $\lambda \neq 0$, то

$$W(T,t,\zeta,p) = (\zeta,p) + (a-1)\, \|p\| \int\limits_t^T \left(e^{\lambda(T-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) ds$$

$$= (\zeta,p) + (a-1)\, \|p\| \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right).$$

Далее по схеме получим

$$\lambda(T,t,z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot)))$$

$$= \min_{p \in L, \|p\|=1} \left[(z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot)), p) + (a-1) \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right) \right]$$

$$= -\|\pi\, z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot))\| + (a-1) \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right).$$

По определению $T_t(t, u_t(\cdot), v_t(\cdot))$ является наименьшим положительным корнем относительно T уравнения

$$\|\pi\, z(T,t,u(\cdot), v(\cdot))\| = (a-1) \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right), \quad T > t. \tag{4.2}$$

Положив в (4.2) $t = 0$, получим уравнение для нахождения времени окончания игры:

$$\left\|\pi e^{\lambda T} z_0\right\| = (a-1)\,\frac{1}{\lambda}\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\left(e^{\lambda T}-1\right)-T\right). \qquad (4.3)$$

Заметим, что $\|\pi\, z_0\| \neq 0$. Перепишем уравнение (4.3) в виде

$$e^{\lambda T}\left((a-1)\,\frac{1}{\lambda}\Big(1+\frac{1}{\lambda}\Big)-\|\pi\, z_0\|\right) = (a-1)\,\frac{1}{\lambda}T + (a-1)\,\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (4.4)$$

Решим относительно λ неравенство $(a-1)\,\dfrac{1}{\lambda}\Big(1+\dfrac{1}{\lambda}\Big)-\|\pi\, z_0\| \geq 0$. Последнее эквивалентно неравенству $\|\pi z_0\|\,\lambda^2-(a-1)\,\lambda-(a-1)\leq 0$. Его решение

$$\lambda \in \Big[\frac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|},0\Big)\bigcup\Big(0,\frac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big),$$

где $d=\sqrt{(a-1)^2+4\,\|\pi z_0\|\,(a-1)}$.

Уравнение (4.4) имеет вид

$$e^{\lambda T}\left(b-\|\pi z_0\|\right)=kT+b, \quad T>0, \qquad (4.5)$$

где $b=(a-1)\,\frac{1}{\lambda}\Big(1+\dfrac{1}{\lambda}\Big),\ k=(a-1)\,\dfrac{1}{\lambda}$.

Введем обозначения $f_1\,(T)=e^{\lambda T}\left(b-\|\pi z_0\|\right),\ f_2\,(T)=kT+b$ и запишем уравнение (4.5) в виде

$$f_1\,(T)=f_2\,(T)\,, \quad T>0. \qquad (4.6)$$

Возможны следующие случаи.

1) $\lambda\in\Big(0,\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big)$. Тогда в уравнении (4.5) $b-\|\pi z_0\|>0, \quad k>0$, а следовательно, функции $f_1\,(T)\,,\ f_2\,(T)$ монотонно возрастают, $T>0$, $f_1\,(T)$ экпоненциально, $f_2\,(T)$ линейно, причем $f_1\,(0)<f_2\,(0)$, поскольку $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|\,,\ f_2\,(0)=b$. Поэтому существует единственный корень уравнения (4.6).

2) $\lambda=\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}$. Тогда в уравнении (4.5) $b-\|\pi z_0\|=0$, $k>0$, $f_1\,(T)\equiv 0,\ \ T\geq 0$, $f_2\,(0)=b$, а при $T>0$ $f_2\,(T)$ монотонно возрастает. В этом случае уравнение (4.5) не имеет корней.

3) $\lambda>\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}$. Тогда $b-\|\pi z_0\|<0$, $k>0$, $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|\,,\ f_2\,(0)=b$, $f_1\,(T)$ монотонно убывает, а $f_2\,(T)$ монотонно возрастает при $T>0$. Очевидно, уравнение (4.6) также не имеет корней.

4) $\lambda\in\Big[\dfrac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|},0\Big)$. Тогда $b-\|\pi z_0\|>0$, $k<0$, $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|<b$, $f_1\,(0)<f_2\,(0)=b$. При $T\geq 0$ $f_1\,(T)$ монотонно убывает, стремясь к нулю, а $f_2\,(T)$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности. Поэтому уравнение (4.6) имеет положительный корень.

5) $\lambda=\dfrac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|}$. Тогда $b-\|\pi z_0\|=0$, $k<0$, $f_1\,(T)\equiv 0$, а функция $f_2\,(T)$ монотонно убывает и $f_2\,(0)=b>0$. Уравнение (4.6) имеет единственный корень.

6) $\lambda\in\Big(-\infty,\dfrac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big)$. Тогда в (4.5) $b-\|\pi z_0\|<0$, $k<0$, функция $f_1\,(T)$ монотонно убывает, стремясь к нулю, а $f_2\,(T)$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности, $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|<b=f_2\,(0)$. Существует единственный корень уравнения (4.6).

Анализ случаев 1)–6) показывает, что уравнение (4.3) имеет решение, если

$$\lambda\in(-\infty,0)\bigcup\Big(0,\frac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big).$$

Если $\|\pi z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\|\neq 0$, то минимум в выражении для $\lambda\left(T,t,z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$ достигается на единственном элементе

$$p_0\left(T,t,z\left(T_0,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\right)=-\frac{1}{\|\pi z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\|}\,\pi z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right), \tag{4.7}$$

если же $\|\pi z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\|=0$, то на произвольном векторе p, $p\in L$.

Пусть t — произвольный момент времени, когда игра еще не завершена, т.е. $z(t)\notin M_0$. Тогда по лемме 1 и определению (1.5) $T_t>t$. Имеет место неравенство

$$(a-1)\,\frac{1}{\lambda}\,\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\,\left(e^{\lambda(T_t-t)}-1\right)-(T_t-t)\right)>0.$$

Так как T_t — корень уравнения (4.2), то $\|\,\pi\,z\,\left(T_t,\,t,\,u_t\,\left(\cdot\right),\,v_t\,\left(\cdot\right)\right)\|>0$. Поскольку функция $z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)$ непрерывным образом зависит от t, то в некоторой окрестности текущего состояния выполнено условие 2) с вектором (4.7).

С л у ч а й II. $\lambda=0$. Очевидно, $H(t,s)=E$. Из формул (3.7), (3.8) имеем $f_0(t)=z_0$, $g_0(t)=z_0$, из формул (3.10), (3.12) получим $\tilde{C}(t,s)=(t-s)\,E$, $\tilde{B}(t,s)=E$, поскольку $B(t)=E$, $C(t,s)=E$, а из формул (3.8), (3.9) получим $M(t,s)=E$, $N(t,s)=(t-s)\;E$. Тогда траектория системы (3.6) в случае (4.1) имеет вид

$$z\left(t\right)=z_0+\int\limits_0^t\left(t-s+1\right)\,\left(u\left(s\right)-v\left(s\right)\right)\,ds,\quad t\geq 0.$$

По формуле (3.13) $\varphi\;(t,s,u,v)=(t-s+1)\;(u-v)$,

$$z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)=z_0+\int\limits_0^t\left(T-s+1\right)\,\left(u\left(s\right)-v\left(s\right)\right)\,ds.$$

Функция $W(t,s,\zeta;p)$ имеет вид

$$W\left(T,t,\zeta,p\right)=\left(\zeta,p\right)+\int\limits_t^T\left(\min_{v\in S}\max_{u\in aS}\left(p,\left(T-s+1\right)\right)\,\left(u-v\right)\right)ds.$$

Поскольку $T-s+1>0$ для $0\leq t\leq s\leq T$, то

$$W\left(T,t,\zeta,p\right)=\left(\zeta,p\right)+\left(a-1\right)\,\|p\|\int\limits_t^T\left(T-s+1\right)\,ds=\left(\zeta,p\right)+\left(a-1\right)\,\|p\|\,\left(T-t\right)\,\left(\frac{T-t}{2}+1\right).$$

Тогда по формуле (4.2), учитывая, что $M=\{0\}$, получим

$$\lambda\Big(T,t,z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\Big)$$

$$=\min_{\|p\|=1,p\in L}\Big[\;\left(z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right),p\right)+\left(a-1\right)\,\left(T-t\right)\,\left(\frac{T-t}{2}+1\right)\Big]$$

$$=-\,\|\pi\,z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\|+\left(a-1\right)\,\left(T-t\right)\,\left(\frac{T-t}{2}+1\right).$$

Согласно формуле (4.2) $T\left(t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)$ определяется как первый корень относительно переменной T следующего уравнения:

$$\left(a-1\right)\,\left(T-t\right)\,\left(\frac{T-t}{2}+1\right)=\|\pi\,z\left(T,t,u_t\left(\cdot\right),v_t\left(\cdot\right)\right)\|\,,\quad T\geq t.$$

Таким образом, время окончания игры является первым положительным корнем уравнения $(a-1)\,T\left(\dfrac{T}{2}+1\right)=\|\pi\,z_0\|\,,\ T>0.$

Отсюда

$$T_0=-1+\sqrt{1+\frac{2\,\|\pi\,z_0\|}{a-1}}.$$

Видим, что время является конечным, с какого бы состояния $z_0,\ \|\pi\,z_0\|<\infty$, ни начиналась игра. Объединив случаи I и II, приходим к выводу, что если $\lambda\in\Big(-\infty,\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big)$, где $d=\sqrt{(a-1)^2+4\,\|\pi z_0\|\,(a-1)}$, то сближение может быть завершено в момент времени, меньший или равный T_0.

В работе получены достаточные условия приведения траектории квазилинейного конфликтно-управляемого процесса общего вида на цилиндрическое терминальное множество. Результаты иллюстрируются на примере интегро-дифференциальной игры сближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Пшеничный Б.Н.** Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 65–78.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 456 с.
7. **Chentsov A.G., Morina S.J.** Extensions and relaxations. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
8. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988, Т. 2. 576 с.
9. **Пшеничный Б.Н.** Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 285–287.
10. **Hajek O.** Pursuit games. N Y: Acad. Press, 1975. T. 12. 266 p.
11. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p. ISBN: 9401711364 .
12. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
13. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990. 461 p. ISBN: 0817634789 .
14. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
15. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
16. **Михлин С.Т.** Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 304 с.
17. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 4, ч. 1. 236 с.

Поступила 4.10.2017

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Украины
зав. отделом
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН У, г. Киев
e-mail:chik@d165.icyb.kiev.ua

Чикрий Грета Цолаковна д-р физ.-мат. наук,
вед. научный сотрудник
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН У, г. Киев
e-mail:g.chikrii@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii.* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Pshenichnyi B.N. Linear differential games. *Automat. Remote Control*, 1968, no. 1, pp. 55–67.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya.* [Optimization of a guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
6. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti.* [Control and Observation Under the Conditions of Uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
7. Chentsov A.G., Morina S.J. Extensions and relaxations. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
8. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. T.* 2. [Selected Scientific Works, Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 576 p.
9. Pshenichnyi B.N. The structure of differential games. *Dokl. AN USSR*, 1969, vol. 184, no. 2, pp. 285–287 (in Russian).
10. Hajek O. *Pursuit games.* N Y, Acad. Press, 1975, 266 p. ISBN: 0123172608 .
11. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston, London, Dordrecht, Springer Science and Busines Media, 2013, 424 p. ISBN: 9401711364 .
12. Rockafellar R. *Convex analysis.* Princeton, Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1973, 470 p.
13. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston, Basel: Berlin, Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0817634789 .
14. Aubin J.P., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis.* N Y, Wiley-Interscience, 1984, 518 p. ISBN: 0-471-05998-6 . Translated to Russian under the title *Prikladnoi nelineinyi analiz.* Moscow, Mir Publ., 1988, 512 p.
15. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable.* N Y, Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p. (Translation of chapters I to IX of the 1st edition). Original Russian text (3rd ed.) published in *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p.
16. Mikhlin S.G. *Linear Integral Equations.* Delhi, Hindustan Publ. Corp., 1960, 223 p. Original Russian text published in *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam.* Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 304 p.
17. Smirnov V.I. *A course of higher mathematics. Vol. IV*. [Integral equations and partial differential equations]. Oxford: N Y, Pergamon Press 1964, 811 p. ISBN: 9781483194714 . Original Russian text (6th ed.) published in *Kurs vysshei matematiki.* Moscow, Nauka Publ., 1974, vol. 4, Ch. 1, 236 p.

The paper was received by the Editorial Office on October 4, 2017.

Arkadii Alekseevich Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of National Academy of Sciences of Ukraine, Glushkov Cybernetics Institute of NASU, Kiev, 03187 Ukraine, e-mail:chik@d165.icyb.kiev.ua .

Greta Tsolakovna Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Senior Scientific Researcher, Glushkov Cybernetics Institute of NASU, Kiev, 03187 Ukraine, e-mail:g.chikrii@gmail.com .